AP : Fonctions trigonométriques.

1 Période et parité

$f(x) = 5\cos(3x)$ sur $\mathbb{R}$

1°) Rappel : f paire $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = 5\cos(3\times(-x)) = 5\cos(-3x) = 5\cos(3x) = f(x)$

car cosinus est paire

Donc f est paire

2°) Rappel f a pour période T $\Leftrightarrow$ pour tout réel x, $f(x+T) = f(x)$.

Pour tout réel x, $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 5\cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$= 5\cos(3x + 2\pi)$

$= 5\cos(3x)$ car cosinus a pour période 2π

$= f(x)$.

3°) • Comme $\frac{2\pi}{3}$ est une période on peut étudier f sur un intervalle de longueur $\frac{2\pi}{3}$

• Comme f est paire, on choisit comme intervalle de longueur $\frac{2\pi}{3}$ l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right]$ et on étudie f seulement sur $\left[0 ; \frac{\pi}{3}\right]$.

Remarque : Si on demande le procédé de construction de la courbe de f sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ par exemple

• on commence par tracer $\mathcal{C}_f$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{3}\right]$ à l'aide de l'étude faite sur $\left[0 ; \frac{\pi}{3}\right]$

• on construit le symétrique de cette courbe par rapport à l'axe des ordonnées (car f est paire) on obtient alors $\mathcal{C}_f$ sur $\left[-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right]$

• on translate cette courbe du vecteur $\vec{u}\left(\frac{2\pi}{3} ; 0\right)$ pour obtenir la courbe sur $\left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$ et du vecteur $-\vec{u}$ pour obtenir la courbe sur $\left[-\pi ; -\frac{\pi}{3}\right]$ car $\frac{2\pi}{3}$ est une période de f.

2 Dérivées

Rappels
- $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$
- la dérivée de $x \mapsto u(ax+b)$ est $x \mapsto a u'(ax+b)$.

a) $f(x) = 10\cos\left(\frac{1}{5}x\right)$ donc $f'(x) = 10 \times \frac{1}{5} \times \left(-\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\right) = -2\sin\left(\frac{x}{5}\right)$

b) $g(x) = \frac{1}{3}\sin\left(-5x + \frac{\pi}{3}\right)$ donc $g'(x) = \frac{1}{3} \times (-5) \times \cos\left(-5x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{5}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right)$

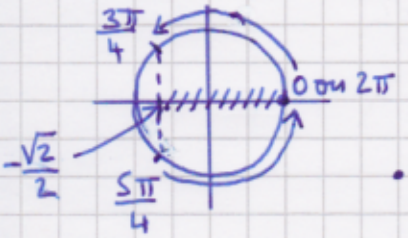
c) $h(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ formule : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ ⚠

$u(x) = \sin x$ et $u'(x) = \cos x$
$v(x) = \cos x$ et $v'(x) = -\sin x$

$$\text{donc } h'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{=1}}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

3) Etudes de signe

a) $2\cos t + \sqrt{2}$ sur $[0 ; 2\pi]$



• $2\cos t + \sqrt{2} = 0 \iff \cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff t = \frac{3\pi}{4}$ ou $t = \frac{5\pi}{4}$ car $t \in [0 ; 2\pi]$

• $2\cos t + \sqrt{2} > 0 \iff \cos t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

⚠ se résout sur le cercle trigo, les solutions s'écrivent sous forme d'intervalles

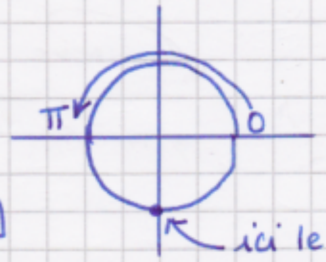
$\iff t \in [0 ; \frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{5\pi}{4} ; 2\pi]$

d'où

t	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$2\cos t + \sqrt{2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $1 + \sin t$ sur $[0 ; \pi]$

• $1 + \sin t = 0 \iff \underbrace{\sin t = -1}_{\text{pas de solution sur } [0 ; \pi]}$



ici le sinus vaut −1 mais les valeurs associées ne sont pas dans $[0 ; \pi]$

• $1 + \sin t > 0 \iff \sin t > -1$

$\iff t \in [0 ; \pi]$ (car $\sin t \geq 0$ sur $t \in [0 ; \pi]$)

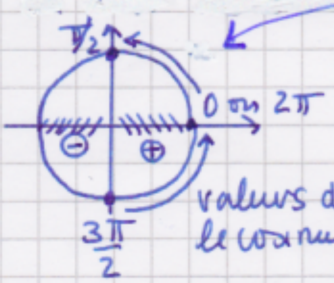
t	0		π
$1 + \sin t$		$+$	

c) $\cos(2t)$ sur $[0 ; \pi]$

si $0 \leq t \leq \pi$, $0 \leq 2t \leq 2\pi$

⚠ On ne raisonne pas directement sur le cercle trigo car il s'agit de $\cos(2t)$ et non de $\cos t$.

on étudie le signe de cosinus sur $[0 ; 2\pi]$



$\cos(2t) = 0 \iff 2t = \frac{\pi}{2}$ ou $2t = \frac{3\pi}{2}$

$\iff t = \frac{\pi}{4}$ ou $t = \frac{3\pi}{4}$

$\cos(2t) > 0 \iff 2t \in [0 ; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2} ; 2\pi]$

$\iff t \in [0 ; \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{3\pi}{4} ; \pi]$

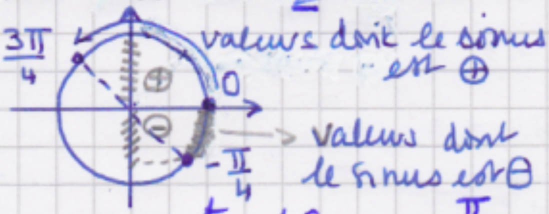
D'où :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\cos(2t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d) $\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$ sur $[0;\pi]$

si $0 \leq t \leq \pi$, $-\frac{\pi}{4} \leq t-\frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$ donc $t-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$

on étudie le signe de sinus sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$



- $\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow t-\frac{\pi}{4}=0 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{4}$
- $\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)>0 \Leftrightarrow t-\frac{\pi}{4} \in \left]0;\frac{3\pi}{4}\right[$
  $\Leftrightarrow t \in \left]\frac{\pi}{4};\pi\right]$

d'où

t	0		$\frac{\pi}{4}$		π
$t-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{3\pi}{4}$
$\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$		$-$	0	$+$	

5 Limites

taux de variation de sin en 0

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \sin'(0)=\cos(0)=1.$

sinus est dérivable en 0

f.i.

b) $u_n = \underbrace{n^2}_{+\infty} \sin\left(\underbrace{\frac{4}{n^2}}_{\to 0}\right)$ pour $n \geq 1$.

$= \dfrac{\sin\left(\frac{4}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

$= 4 \times \dfrac{\sin\left(\frac{4}{n^2}\right)}{\left(\frac{4}{n^2}\right)}$ ← quotient de la forme $\frac{\sin x}{x}$

composée $n \xrightarrow[\text{suite}]{} \frac{4}{n^2} \xrightarrow{\text{fonction}} \dfrac{\sin\left(\frac{4}{n^2}\right)}{\frac{4}{n^2}}$

or $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}=0 \text{ donc, par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=1 \text{ donc par produit } \lim\limits_{x\to 0} 4\frac{\sin x}{x}=4 \end{cases}$

donc par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} 4\dfrac{\sin\left(\frac{4}{n^2}\right)}{\left(\frac{4}{n^2}\right)}=4$.

Donc (u_n) converge vers 4.

4 Etude des variations

$f(x)=(1-\cos x)\sin x$ sur $[0;\pi]$

a). On pose $u(x)=1-\cos x$ et $v(x)=\sin x$
$u'(x)=\sin x$ et $v'(x)=\cos x$

formule : $(uv)'=u'v+uv'$

donc $f'(x)=\sin x \times \sin x + (1-\cos x)\cos x = \sin^2 x + \cos x - \cos^2 x$.

- Pour tout réel x, $(1+2\cos x)(1-\cos x) = 1+2\cos x - \cos x - 2\cos^2 x$
$= 1+\cos x - 2\cos^2 x$

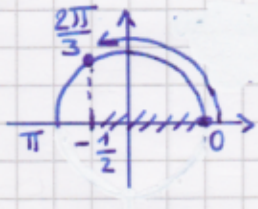
Pour établir l'égalité demandée, on utilise : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
donc $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ donc $f'(x)=(1-\cos^2 x)+\cos x - \cos^2 x$
$= 1+\cos x - 2\cos^2 x$

donc on a bien : $f'(x) = (1 + 2\cos x)(1 - \cos x)$

b) On étudie le signe de $1 + 2\cos x$:

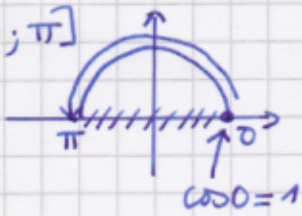
- $1 + 2\cos x = 0 \iff \cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \frac{2\pi}{3}$ car $x \in [0; \pi]$
- $1 + 2\cos x > 0 \iff \cos x > -\frac{1}{2} \iff x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right[$

cercle trigo



On étudie le signe de $1 - \cos x$:

- $1 - \cos x = 0 \iff \cos x = 1 \iff x = 0$ car $x \in [0; \pi]$
- $1 - \cos x > 0 \iff \cos x < 1 \iff x \in]0; \pi]$



D'où :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$1 + 2\cos x$		$+$	0	$-$	
$1 - \cos x$	0		$+$		
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

$f(0) = (1 - 1) \times 0 = 0$

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
$= \frac{3\sqrt{3}}{4}$

$f(\pi) = (1 - (-1)) \times 0$
$= 0$