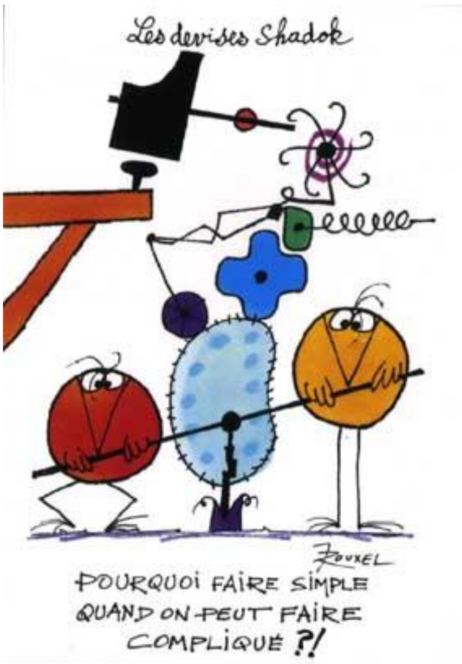
NOMBRES COMPLEXES 1

Petite histoire des complexes

Historiquement, c'est en essayant de résoudre les équations de la forme $x^3 + px = q$ que les mathématiciens italiens **Cardan** *et* **Bombelli** *(XVIème siècle) ont eu pour la première fois l'idée d'utiliser des nombres dont le carré est négatif : lors de la recherche de solutions pour l'équation $x^3 - 15x = 4$, ils sont amenés à utiliser un nombre dont le carré est égal à –121 pour finalement trouver que 4 est solution de cette équation . Cette audace a permis d'obtenir des résultats et a conduit à l'introduction de nombres « imaginaires » car de carré négatif.*
Au milieu du XVIIIème siècle, **Euler** *propose une autre notation : il remplace l'écriture $\sqrt{-1}$ par la lettre i donc* $\mathbf{i^2 = -1}$*. Ainsi, i est solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$ qui n'a aucune solution sur $\mathbb{R}$.*
Plus tard, ***D'Alembert*** *montre que ces nouveaux nombres sont de la forme $x + iy$ où x et y sont des réels. Ils sont appelés* ***nombres complexes*** *par* **Gauss***. Les réels apparaissent alors comme des nombres complexes particuliers.*



1. Ensemble des nombres complexes

Définition : On appelle ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres qui s'écrivent de façon unique sous la forme $x + iy$ où x et y sont des réels et où i est tel que $i^2 = -1$.

Exemples : $-6 + 5i$, $\frac{7}{3}$, $i\sqrt{2}$ sont des nombres complexes

Conséquence de la définition : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Définition : Soit z un nombre complexe quelconque s'écrivant $x + iy$ où x, y sont réels.
Le réel x s'appelle la **partie réelle de z** et se note Re(z)
Le réel y s'appelle la **partie imaginaire de z** et se note Im(z).
L'écriture $x + iy$ s'appelle **la forme algébrique de z.**

La partie imaginaire d'un nombre complexe est un réel

Exemples : si $z = -6 + 5i$, Re(z) = -6 et Im(z) = 5
si $z = \frac{7}{3}$, Re(z) = $\frac{7}{3}$ et Im(z) = 0
si $z = i\sqrt{2}$, Re(z) = 0 et Im(z) = $\sqrt{2}$

Définition : Un nombre complexe de partie réelle nulle est un nombre **imaginaire pur.**

Notation : l'ensemble des imaginaires purs se note $i\,\mathbb{R}$.

Conséquence de l'unicité de la forme algébrique : Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$

Autrement dit, **deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire**.

Cas particulier : un nombre complexe est nul ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Moyen de reconnaître

Caractérisation des réels et des imaginaires purs : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$
$z \in i\,\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$

Pour tout nombre complexe z

2. Opérations sur les nombres complexes

a) Somme et produit de nombres complexes

On admet qu'il existe sur $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication qui prolongent celles définies sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire qui ont les mêmes propriétés.

Exemples : soient $z = 1 + i$ et $z' = -2+3i$

$z + z' = (1 + i) + (-2 + 3i) = (1-2) + i(1 + 3) = -1 + 4i$

$zz' = (1 + i)(-2 + 3i) = -2 - 2i + 3i + 3i^2 = -5 + i$.

on développe le produit

$i^2 = -1$

Conséquences:

- Tout nombre complexe z a un opposé noté $-z$ tel que $z + (-z) = 0$. Si z a pour forme algébrique $x + iy$, $-z$ a pour forme algébrique $-x - iy$. On peut alors définir **la différence** de deux complexes:
  Pour tous nombres complexes z et z', $z - z' = z + (-z')$.
- Les identités remarquables et la propriété « un produit de facteurs est nul ssi un des facteurs est nul » sont valables sur $\mathbb{C}$.

b) Conjugué d'un nombre complexe

Définition : Pour tout complexe z de forme algébrique $x + iy$ (x, y réels), le **conjugué de z** est le nombre complexe noté $\overline{z}$ de forme algébrique $x + i(-y)$.

Exemples : $\overline{2+3i} = 2-3i$, $\overline{-5} = -5$, $\overline{-i} = i$.

Entraînement : Pour tout z de forme algébrique $x + iy$, donner la forme algébrique de $z + \overline{z}$, $z - \overline{z}$ et $z\overline{z}$.

Le dernier calcul d'entraînement permet d'énoncer :

Propriété : Pour tout nombre complexe z, $z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$

C'est donc un réel positif

c) Inverse et quotient

Comme tout réel non nul, tout nombre complexe **non nul** admet un **inverse** noté $\frac{1}{z}$ tel que $z \times \frac{1}{z} = 1$.

On définit alors le **quotient** de deux complexes par : $\forall z \in \mathbb{C}\ \forall z' \in \mathbb{C}^*$, $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.

Exemple : l'inverse de $1-2i$ se note $\frac{1}{1-2i}$

ce n'est pas une forme algébrique

Pour déterminer la forme algébrique de ce nombre, on utilise le fait que $(1-2i)(\overline{1-2i})$ est un réel d'après la propriété énoncée au b) ci-dessus :

$$\frac{1}{1-2i} = \frac{1\times(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1+2i}{1^2+(-2)^2} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

On utilise la propriété énoncée au b)

C'est bien une forme algébrique

Entraînement : Écrire sous forme algébrique l'inverse de i et l'inverse de $\frac{1}{2} + i$.

On utilise la même méthode pour obtenir la forme algébrique d'un quotient : **on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur**.

Exemple : On cherche la forme algébrique du nombre $\frac{4-i}{2+7i}$

$$\frac{4-i}{2+7i} = \frac{(4-i)(2-7i)}{(2+7i)(2-7i)} = \frac{8-2i-28i+7i^2}{2^2+7^2} = \frac{1-30i}{53} = \frac{1}{53} - \frac{30}{53}i.$$

$\overline{2+7i} = 2-7i$

$i^2 = -1$

Entraînement : Vérifier que la forme algébrique de $\frac{i}{i-3}$ est $0{,}1 - 0{,}3i$.