Épreuve de Mathématiques

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Février 2016

Durée de l'épreuve : 4 heures

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5 .
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'utilisation de la calculatrice est autorisée.
L'usage du téléphone portable, y compris en tant que montre ou calculatrice, est strictement interdit.
Le prêt ou l'échange de calculatrice en cours d'épreuve est strictement interdit.

Chaque exercice sera traité sur une feuille séparée.

Exercice 1 (5 points)

Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie. Chaque réponse fausse et chaque question sans réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point. Aucune justification n'est demandée.

Pour les questions 1 à 3, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

• **1)** L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{12+z}{z-1} = 1 - 2z$ est :

a) $\left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \ ; \ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3} \right\}$ **b)** $\left\{ \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i} \ ; \ \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\mathrm{i} \right\}$

c) $\left\{ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i} \ ; \ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i} \right\}$ **d)** $\left\{ \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3} \ ; \ \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{3} \right\}$

• **2)** À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par $z' = \dfrac{\mathrm{i}\,\overline{z} - 1}{\overline{z} + 2}$.
M désigne le point d'affixe z et M' celui d'affixe z'.

Si le point M a pour coordonnées $(4\,; -8)$, le point M' a pour coordonnées .....

a) $(0{,}22 \ ; \ 0{,}96)$ **b)** $(-0{,}22 \ ; \ -0{,}96)$

c) $(0{,}22 \ ; \ -0{,}96)$ **d)** $(-0{,}22 \ ; \ 0{,}96)$

• **3)** On reprend les notations de la question 2).
L'ensemble des points M tels que M' appartienne à l'axe des ordonnées est .....

a) un cercle **b)** une droite

c) une droite privée d'un point **d)** un cercle privé d'un point

Dans les questions 4 à 6, f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

• **4)** f est une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ de période .....

a) 3π **b)** $\dfrac{3\pi}{2}$

c) $\dfrac{\pi}{3}$ **d)** $\dfrac{2\pi}{3}$

• **5)** $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ est égal à .....

a) $3\sqrt{3}$ **b)** $2\sqrt{3}$

c) $-3\sqrt{3}$ **d)** $-2\sqrt{3}$

• **6)** L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $|f(x)| = \sqrt{2}$ est .....

a) $\left\{\dfrac{\pi}{36} + k \times \dfrac{\pi}{6} \, , k \in \mathbb{Z}\right\}$ **b)** $\left\{\dfrac{\pi}{18} + k \times \dfrac{\pi}{6} \, , k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{\dfrac{\pi}{36} + k \times \dfrac{\pi}{3} \, , k \in \mathbb{Z}\right\}$ **d)** $\left\{\dfrac{\pi}{18} + k \times \dfrac{\pi}{3} \, , k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercice 2 (5 points)

En raison d'une forte augmentation du prix des carburants entre 2015 et 2016, certains salariés d'une grande entreprise changent de mode de déplacement pour se rendre sur leur lieu de travail.
En 2015, 60% des salariés utilisaient leur voiture personnelle.
En 2016, 30% des salariés qui utilisaient leur voiture en 2015 ne l'utilisent plus, tandis que 5% de ceux qui ne l'utilisaient pas en 2015 l'utilisent en 2016.
On suppose que cette évolution se poursuit d'une année sur l'autre à partir de 2016.

On choisit au hasard un salarié de l'entreprise.

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'événement « la personne choisie utilise sa voiture personnelle au cours de l'année $(2015+n)$ » et $\overline{A_n}$ l'événement contraire de A_n.
On note p_n la probabilité de l'événement A_n. Ainsi, $p_0 = p(A_0) = 0{,}6$.

1) **a)** Construire un arbre pondéré modélisant l'évolution de la situation entre 2015 et 2016. Calculer alors la probabilité qu'un salarié de cette entreprise utilise sa voiture en 2016.

b) Le salarié choisi n'utilise pas sa voiture en 2016 pour se rendre à son travail. Quelle est la probabilité qu'il l'ait utilisée en 2015 ? On donnera une valeur approchée au millième du résultat.

c) Tracer un nouvel arbre pondéré modélisant l'évolution de la situation entre l'année $(2015+n)$ et l'année $(2015+n+1)$ et démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} = 0{,}65p_n + 0{,}05 .$$

2) La suite (u_n) est définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par $u_n = p_n - \dfrac{1}{7}$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis celle de p_n, pour tout n de $\mathbb{N}$.

c) Déterminer la limite de la suite (p_n).

3) En supposant que cette évolution se poursuive, est-il possible d'envisager qu'à long terme aucun des salariés de cette entreprise n'utilise sa voiture personnelle pour se rendre à son travail ? Justifier la réponse.

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x} .$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x .$$

a) Déterminer la limite de g en $-\infty$ puis la limite de g en $+\infty$.

b) Dresser, en le justifiant, le tableau des variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
En déduire le signe de $g(x)$.

2) Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

3) On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} g(x) .$$

4) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.

6) **a)** Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

c) En déduire que $-0{,}5 < \alpha < 0$.

Exercice 4 (5 points)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}\,u_n + 3 \times 0{,}5^n \text{ , pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) **a)** Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2) **a)** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n \ .$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

3) *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

b) En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n \ .$$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

4) **a)** Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0{,}01$.

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que ...	(1)
	... prend la valeur ...	(2)
	... prend la valeur ...	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

b) Pourquoi l'algorithme s'arrête-t-il ?