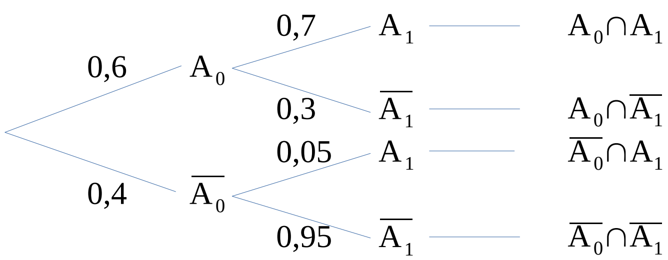
EXERCICE 2 (OBLIGATOIRE) : CORRECTION

1. a) Représentation par un arbre pondéré de l'évolution de la situation entre 2015 et 2016 :



(1 point)

La probabilité qu'un salarié de cette entreprise utilise sa voiture en 2016 est $p(A_1)$.

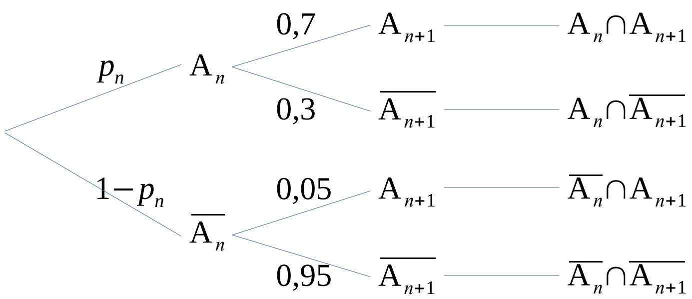
Les événements A_0 et $\overline{A_0}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales on a : $p(A_1) = p(A_0 \cap A_1) + p(\overline{A_0} \cap A_1)$.

Or $p(A_0 \cap A_1) = p(A_0) \times p_{A_0}(A_1) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42$
$p(\overline{A_0} \cap A_1) = p(\overline{A_0}) \times p_{\overline{A_0}}(A_1) = 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}02$

Donc $p_1 = p(A_1) = 0{,}42 + 0{,}02 = 0{,}44$. (1 point)

b) La probabilité que le salarié ait utilisé sa voiture en 2015, sachant qu'il ne l'utilise pas en 2016 est : $p_{\overline{A_1}}(A_0) = \dfrac{p(A_0 \cap \overline{A_1})}{p(\overline{A_1})} = \dfrac{p(A_0)\, p_{A_0}(\overline{A_1})}{1 - p(A_1)} = \dfrac{0{,}6 \times 0{,}3}{1 - 0{,}44} \approx 0{,}321$ (arrondi au millième). (1 point)

c) Représentation par un arbre pondéré de l'évolution de la situation entre $2015+n$ et $2016+n$:



(1 point)

Pour tout entier naturel n :
$p_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(\overline{A_n} \cap A_{n+1})$ d'après la formule des probabilités totales
donc $p_{n+1} = p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(\overline{A_n}) \times p_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$
$\Leftrightarrow p_{n+1} = p_n \times 0{,}7 + (1 - p_n) \times 0{,}05$
$\Leftrightarrow p_{n+1} = 0{,}65\, p_n + 0{,}05$. (1 point)

2. a) Pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{7} \Leftrightarrow u_{n+1} = 0{,}65\, p_n + 0{,}05 - \frac{1}{7} \Leftrightarrow u_{n+1} = 0{,}65\, p_n - \frac{0{,}65}{7} \Leftrightarrow u_{n+1} = 0{,}65\left(p_n - \frac{1}{7}\right) \Leftrightarrow u_{n+1} = 0{,}65\, u_n$$
La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0{,}65$ et de premier terme u_0 avec :
$u_0 = p_0 - \dfrac{1}{7} = 0{,}6 - \dfrac{1}{7} = \dfrac{16}{35}$. (2 points)

b) Pour tout entier naturel n : $u_n=u_0\times q^n \Leftrightarrow u_n=\frac{16}{35}\times 0,65^n$;

Or $p_n=u_n+\frac{1}{7}$ donc $p_n=\frac{16}{35}\times 0,65^n+\frac{1}{7}$. (1 point)

c) $-1<0,65<1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 0,65^n=0$;

par produit, $\lim_{n\to+\infty} \frac{16}{35}\times 0,65^n=0$, et par somme, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{16}{35}\times 0,65^n+\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{7}$.

La suite (u_n) converge donc vers $\frac{1}{7}$. (1 point)

3. Dans un grand nombre d'années, si cette évolution se poursuit, la probabilité qu'un salarié n'utilise pas sa voiture personnelle pour se rendre à son travail sera proche de $\frac{1}{7}$.

Cela signifie qu'il n'est pas possible d'envisager qu'à long terme, aucun salarié n'utilise sa voiture.
(1 point)