DM 3: s'entraîner à justifier

Exercice 1:

L'évolution du nombre d'abonnés à l'opéra d'une année à la suivante est modélisée par le directeur qui prévoit que 75 % des personnes abonnées renouvelleront leur abonnement l'année suivante et qu'il y aura chaque année 300 nouveaux abonnés.

En 2014, il y a 500 abonnés.

Parmi ces trois algorithmes, déterminer lequel permette d'afficher l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnés sera supérieur à 1 190 et expliquer pourquoi les deux autres ne conviennent pas.

Algorithme 1

```
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que U ⩽ 1 190
   Affecter à n la valeur n + 1
   Affecter à U la valeur – 700 × 0,75^n + 1 200
Fin Tant que
Affecter à n la valeur n + 2014
Afficher n
```

Algorithme 2

```
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que U ⩽ 1 190
   Affecter à U la valeur – 700 × 0,75^n + 1 200
   Affecter à n la valeur n + 1
Fin Tant que
Affecter à n la valeur n + 2014
Afficher n
```

Algorithme 3

```
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que U ⩽ 1 190
   Affecter à n la valeur n + 1
   Affecter à U la valeur – 700 × 0,75^n + 1 200
   Affecter à n la valeur n + 2014
Fin Tant que
Afficher n
```

Exercice 2:

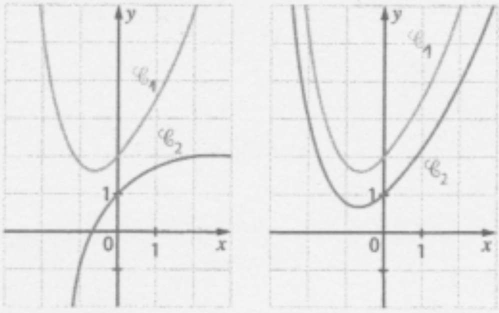
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f', la fonction dérivée de f.

Le point A de coordonnées (0 ; 2) appartient à la courbe $\mathscr{C}_1$.

Le point B de coordonnées (0 ; 1) appartient à la courbe $\mathscr{C}_2$.

1. Dans les deux situations ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_1$ de f. Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathscr{C}_2$ est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.



2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en A.

3. On sait que, pour tout réel x, $f(x) = e^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.

Déterminer la valeur de b, puis prouver que $a = 2$.

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x + 2)$.

a. Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire la position de $\mathscr{C}_1$ par rapport à la droite Δ.

DM : s'entraîner à rédiger

① • Traduction de l'énoncé en terme de suites

n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2014
u_n désigne le nombre d'abonnés à l'opéra en 2014 + n.

D'après l'énoncé : $u_0 = 500$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 0,75\, u_n + 300$.

• Dans chacun des algorithmes la nouvelle valeur affectée à u dans le traitement est $-700 \times 0,75^n + 1200$.

On conjecture donc que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -700 \times 0,75^n + 1200$

dém. par récurrence :
• initialisation : $n = 0$
$u_0 = 500$ et $-700 \times 0,75^0 + 1200 = -700 + 1200 = 500$
donc la propriété est vraie au rang 0.

• hérédité : on suppose que pour un rang $n \geq 0$ on a
$u_n = -700 \times 0,75^n + 1200$
montrons qu'au rang $(n+1)$ on a bien :
$u_{n+1} = -700 \times 0,75^{n+1} + 1200$.

or $u_{n+1} = 0,75\, u_n + 300$
donc, par hyp. de récurrence, $u_{n+1} = 0,75\,(-700 \times 0,75^n + 1200) + 300$
$= -700 \times 0,75^{n+1} + 900 + 300$
$= -700 \times 0,75^{n+1} + 1200$.
donc la propriété est héréditaire

Conclusion : par le principe de récurrence la propriété est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

• L'initialisation de chaque algorithme est correcte, elle traduit $u_0 = 500$

• le test d'arrêt est correct, il traduit la recherche de l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnés sera supérieur à 1100.

• En ce qui concerne le traitement

→ l'algo① affecte la valeur suivante à n avant d'appliquer la formule donnant u_n en fonction de n.
ce qui permet bien de calculer les termes successifs de (u_n) au cours de la boucle.
l'instruction après la boucle permet de calculer l'année cherchée, l'année de départ étant 2014.

Donc cet algorithme convient.

→ l'algo② ne convient pas : si on fait fonctionner cet algorithme on obtient le tableau suivant :

n	u	test
0	500	/
1	500	vrai
⋮	⋮	⋮

donc ici $u_1 = 500$ ce qui est faux

→ l'algo 3 ne convient pas : si on fait fonctionner l'algorithme on obtient

n	u	test
0	500	/
2015 ~~1~~	675	vrai
4030 ~~2016~~	1200	faux

affichage : 4030

or un tableau de valeur à la calculatrice obtenu avec n min $= 0$
$u(n) = 0{,}75 \times u(n-1) + 300$
$u(n \text{ min}) = 500$

montre que u_n dépasse 1190 bien avant 4030 !
$u_{14} \approx 1187{,}5$
$u_{15} \approx 1190{,}6$ donc u_n dépasse 1190 à partir de 2029

2 1°) La courbe C_2 du graphique de droite est située au dessus de l'axe des abscisses, c'est donc la courbe d'une fonctions strictement positive sur $\mathbb{R}$. Or le signe de la dérivée f' donne le sens de variation de la fonction f, si C_2 était la courbe de f', on aurait f' strictement positive donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Or la courbe C_1 n'est pas la courbe d'une fonctions strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc le graphique de droite ne convient pas.

2°) $\Delta : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ car A a pour abscisse 0
$A(0;2) \in C_f$ donc $f(0) = 2$
$B(0;1) \in C_{f'}$ donc $f'(0) = 1$
donc $\Delta : y = x + 2$.

3°) • $f(0) = e^0 + a \times 0 + b = 1 + b$
$f(0) = 2 \iff 1 + b = 2 \iff b = 1$.
• $f'(x) = -e^{-x} + a$ donc $f'(0) = -e^{-0} + a = -1 + a$
$f'(0) = 1 \iff -1 + a = 1 \iff a = 2$

4°) a) $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = f(x) - (x+2)$
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont
$\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = f'(x) - 1 = -e^{-x} + 2 - 1 = -e^{-x} + 1$.
$g'(x) = 0 \iff -e^{-x} + 1 = 0 \iff e^{-x} = 1 \iff e^{-x} = e^0 \iff -x = 0 \iff x = 0$
$g'(x) > 0 \iff -e^{-x} + 1 > 0 \iff -e^{-x} > -1 \iff e^{-x} < e^0 \iff -x < 0 \iff x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

g admet pour minimum 0 sur $\mathbb{R}$. ⚠

b) On en déduit le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

- $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) > 0$ c'est à dire $f(x) > x+2$
  donc sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ $\mathcal{C}$ est au dessus de Δ
- $g(x) = 0 \iff x = 0$ c'est à dire $f(x) = x+2 \iff x = 0$
  donc le point d'abscisse 0 est l'unique point d'intersection de $\mathcal{C}$ et Δ .