

Ex1 (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + 3$
 Montrons par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 4^n - 1$.

- Initialisation: $n = 0$
 $u_0 = 1$
 $2 \times 4^0 - 1 = 2 - 1 = 1$ } donc $u_0 = 2 \times 4^0 - 1$
 donc la propriété est vraie au rang 0
- Hérédité: supposons que, pour un rang $n \geq 0$, $u_n = 2 \times 4^n - 1$
 et montrons alors que $u_{n+1} = 2 \times 4^{n+1} - 1$.

or $u_{n+1} = 4u_n + 3$
 donc, par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = 4(2 \times 4^n - 1) + 3$
 $= 2 \times 4 \times 4^n - 4 + 3$
 $= 2 \times 4^{n+1} - 1$

donc la propriété est héréditaire.

Conclusion: par le principe de récurrence, $u_n = 2 \times 4^n - 1$
 pour tout n de $\mathbb{N}$

Ex2 (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5$

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 3$, $u_n \leq u_{n+1}$.

- Initialisation: $n = 3$
 Calculons u_3 et u_4 pour les comparer:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0,5u_0 + 0,5 \times 0 - 1,5 = 0,5 \times 5 - 1,5 = 1 \\ u_2 &= 0,5u_1 + 0,5 \times 1 - 1,5 = 0,5 + 0,5 - 1,5 = -0,5 \\ u_3 &= 0,5u_2 + 0,5 \times 2 - 1,5 = 0,5 \times (-0,5) + 1 - 1,5 = -0,75 \\ u_4 &= 0,5u_3 + 0,5 \times 3 - 1,5 = 0,5 \times (-0,75) + 1,5 - 1,5 = -0,375 \end{aligned}$$

$$-0,75 \leq -0,375 \quad \text{donc } u_3 \leq u_4$$

donc la propriété est vraie au rang 3.

- Hérédité: supposons que pour un rang $n \geq 3$, $u_n \leq u_{n+1}$
 et montrons qu'alors $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

or $u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5$ et $u_{n+2} = 0,5u_{n+1} + 0,5(n+1) - 1,5$
 $= 0,5u_{n+1} + 0,5n - 1$

Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} u_n &\leq u_{n+1} \quad \text{donc} \quad 0,5u_n \leq 0,5u_{n+1} \quad \text{car } 0,5 > 0 \\ &\quad \text{donc} \quad 0,5u_n + \boxed{0,5n - 1,5} \leq 0,5u_{n+1} + \boxed{0,5n - 1,5} \\ &\quad \text{donc} \quad u_{n+1} \leq \boxed{0,5u_{n+1} + 0,5n - 1,5} \end{aligned}$$

or $-1,5 < -1$ donc $\boxed{0,5u_{n+1} + 0,5n - 1,5} < \underbrace{0,5u_{n+1} + 0,5n - 1}_{u_{n+2}}$
 donc $u_{n+1} < u_{n+2}$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 3$.