Correction exercices d'AP sur ln (livre)

n°34 p.213 Inéquations

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}$

$0,4999 \leqslant u_n \leqslant 0,5 \iff \overbrace{-0,0001 \leqslant -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n}^{(*)} \underbrace{\leqslant 0}_{\text{toujours vrai}}$

On résout donc l'inéquation $(*)$:

$(*) \iff 0,0001 \geqslant \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n \iff 0,0006 \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\iff \ln(0,0006) \geqslant \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ par stricte croissance de ln sur $]0;+\infty[$

$\iff \ln(0,0006) \geqslant n\ln\left(\frac{1}{3}\right)$

$\iff \frac{\ln(0,0006)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \leqslant n$ car $\ln\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ ⚠

$\iff n \geqslant 7$ — V. approchée à 10^{-1} : 6,8

n°39 p.213 Tangentes

a) la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse a ($a \in \mathbb{R}_+^*$) a pour coefficient directeur 1 ssi $g'(a) = 1$.

$(uv)' = u'v + uv'$

Or $\forall x > 0 \quad g'(x) = 2x \times \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} + 1$
$= 2x\ln x + x + 1$

$g'(a) = 1 \iff 2a\ln a + a + 1 = 1$
$\iff 2a\ln a + a = 0$
$\iff a(2\ln a + 1) = 0$
$\iff 2\ln a + 1 = 0$ car $a \neq 0$
$\iff \ln a = -\frac{1}{2}$
$\iff a = e^{-\frac{1}{2}}$ → on peut écrire $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

b) la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse a passe par $O(0;0)$ ssi $0 = g'(a)(0-a) + g(a)$ car la tangente a pour équation $y = g'(a)(x-a) + g(a)$.

$0 = g'(a)(0-a) + g(a) \iff 0 = (2a\ln a + a + 1)(-a) + a^2\ln a + a$
$\iff 0 = a(-2a\ln a - a - 1 + a\ln a + 1)$
$\iff 0 = a(-a\ln a - a)$
$\iff 0 = a^2(-\ln a - 1)$
$\iff 0 = -\ln a - 1$ car $a^2 \neq 0$
$\iff \ln a = -1$
$\iff a = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

n° 46 p 214 Limites

1) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

b) On cherche $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ (x>0)}} x\ln x$: on pose $X = \frac{1}{x}$ $(x>0)$ — $x = \frac{1}{X}$

X tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 $(x>0)$ donc

$\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{X}(-\ln X) = \lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$

2°) a) limites de $x \overset{f}{\mapsto} \dfrac{1}{x\ln x}$

• en 0 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\ln x = 0^-$ Comme la fonction est au dénominateur, il faut connaître signe

x	0		1		$+\infty$
x	‖		$+$		
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
$x\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

donc, par passage à l'inverse $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$.

• en 1 : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x\ln x = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} x\ln x = 0^+$ par produit

donc, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = +\infty$.

• en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln x = +\infty$ par produit avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

donc, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) limites de $x \overset{f}{\mapsto} x(\ln x - x)$.

• en 0 : fi $\longrightarrow$ on développe : $f(x) = x\ln x - x^2$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} -x^2 = 0$ donc par somme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0$.

• en $+\infty$ fi $\longrightarrow$ on factorise par x^2 : $f(x) = x^2\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

n° 51 p. 214 (Limites avec composée

• en -2 : $\lim\limits_{x \to -2} (x+3) = 1$ (>0) et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} (x+2) = 0^+$

Donc par quotient $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+3}{x+2} = +\infty$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, donc, par composition $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$

• en $+\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+3}{x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 1$

par quotient.

or $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Interprétation graphique : $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes, l'une d'équation $x = -2$ et l'autre d'équation $y = 0$ en $+\infty$.