AP limites de suites

2°) Calculs de limites

• $u_n = n - 2\sqrt{n}$ (f.i)

Pour tout $n \geq 1$, $u_n = n\left(1 - \frac{2\sqrt{n}}{n}\right) = n\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$

donc par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1$

Par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ car $1 > 0$.

• $u_n = \sqrt{n} + \frac{(-1)^n}{n}$ $(n \geq 1)$

Comme la suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ n'a pas de limite, on ne peut pas utiliser les règles opératoires.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ (car $n > 0$)

donc $\sqrt{n} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \sqrt{n} + \frac{1}{n}$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc par somme,

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n} - \frac{1}{n}\right) = +\infty$.

Comme, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{n} - \frac{1}{n}$, on applique le théorème de comparaison : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

⚠ ce n'est pas le théorème des gendarmes car les deux suites qui encadrent (u_n) ne convergent pas

• $u_n = \frac{2n^3 + 3}{n + 1}$ (f.i)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n^3\left(2 + \frac{3}{n^3}\right)}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = n^2 \times \frac{2 + \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{1}{n}}$

On rédige en détail la limite de chaque partie et les règles opératoires permettent de conclure :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

• $u_n = \frac{5n^2 - n + 9}{8n^2 + 7}$ (f.i)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n^2\left(5 - \frac{1}{n} + \frac{9}{n^2}\right)}{n^2\left(8 + \frac{7}{n^2}\right)} = \frac{5 - \frac{1}{n} + \frac{9}{n^2}}{8 + \frac{7}{n^2}}$

On rédige --- et on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{5}{8}$.

- $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ (f.i)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ (par somme)

donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty$ $(1>0)$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ par quotient.

3) Exemples de suites

a) $u_n = -2\times 5^n$

$u_n = 5-3n$

$u_n = (-4)^n$

b) - $u_n = n$ et $v_n = -n$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = 0$.

- $u_n = n+10$ et $v_n = -n$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = 10$.

- $u_n = n$ et $v_n = -n^2$ (sans parenthèsis)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$.

- $u_n = n^2$ et $v_n = -n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$.