Terminale S

Approfondissement : Equations fonctionnelles

A L'équation fonctionnelle des logarithmes : $f(xy) = f(x) + f(y)$

On cherche les fonctions f dérivables sur $]0\,;+\infty[$, autres que la fonction nulle, telles que :

$$\forall x, y \in]0\,;+\infty[,\ f(xy) = f(x) + f(y) \quad (E_A).$$

1. Supposons qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tout réel x.
En prenant $x = y = 0$, montrer que $f(0) = 0$. En déduire que pour tout x réel, $f(x) = 0$.
Ceci explique que l'on cherche à résoudre cette équation uniquement sur $]0\,;+\infty[$ et pas sur $\mathbb{R}$.

2. Vérifier que les fonctions définies pour $x > 0$ par $x \mapsto k \ln x$ pour k réel donné, sont solutions de (E_A).

3. Étude de la réciproque
Soit f une solution non nulle, de l'équation fonctionnelle (E_A), dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
a. En prenant $x = y = 1$, montrer que $f(1) = 0$.
b. Soit y un réel strictement positif. On note f_y la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_y(x) = f(xy) = f(x) + f(y)$.
Dériver de deux façons différentes f_y pour montrer que pour tout $y > 0$, $f'(x) = yf'(xy)$.
En déduire que pour tout $y > 0$, $f'(y) = \dfrac{k}{y}$ où $k = f'(1)$.
c. Soit h la fonction définie pour $x > 0$ par $h(x) = f(x) - k \ln x$, où $k = f'(1)$.
Montrer que h est constante sur $]0\,;+\infty[$.
En utilisant la valeur de $f(1)$, montrer que $f(x) = k \ln x$.

4. Conclure : quelles sont les solutions non nulles et dérivables sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation fonctionnelle (E_A) ?

Commentaires

Pour tout k réel non nul, il existe un réel a strictement positif et différent de 1 tel que $k = \dfrac{1}{\ln a}$ $(a = e^{1/k})$.
Alors $x \longmapsto k \ln x$ s'écrit $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\ln a}$ et s'appelle le logarithme de base a.
Pour $a = e$, on retrouve le logarithme népérien ou logarithme de base e, et pour $a = 10$, le logarithme décimal.
Les solutions non nulles de l'équation (E_A) sont les fonctions logarithmes de base a, $a > 0$.

B L'équation fonctionnelle des exponentielles : $f(x + y) = f(x)f(y)$

On cherche toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, autres que la fonction nulle, telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x)f(y) \quad (E_B).$$

1. Montrer que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto e^{kx}$, où k est un réel, est une solution de (E_B).

2. Étude de la réciproque
Soit f une solution non nulle de l'équation fonctionnelle (E_B), dérivable sur $\mathbb{R}$.
a. Montrer que si $f(0) = 0$, f serait la fonction nulle puis que $f(0) = 1$.
b. Soit x un réel. On note f_x la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_x(y) = f(x + y) = f(x)f(y)$.
Montrer que $f'(x) = kf(x)$ où $k = f'(0)$.
c. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x)\, e^{-kx}$ où $k = f'(0)$.
Montrer que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.
d. Montrer que $f(x) = e^{kx}$.

3. Conclure : quelles sont les solutions non nulles et dérivables sur $\mathbb{R}$ de l'équation fonctionnelle (E_B) ?

Commentaires

On sait que pour tout k réel, il existe $a > 0$ tel que $k = \ln a$.
Alors $e^{kx} = e^{x \ln a}$.
Quand x est entier, on sait que :
$$e^{x \ln a} = e^{\ln a^x} = a^x.$$
On étend cette notation à x réel donnant ainsi un sens à des écritures comme 2^{π} $(2^{\pi} = e^{\pi \ln 2})$.
Pour $a > 0$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto a^x$ s'appelle l'exponentielle de base a.
Pour $a = e$, on retrouve $x \longmapsto e^x$.
Les solutions non nulles de (E_B) sont donc les fonctions exponentielles de base a, $a > 0$.

Corrigé AP approfondissement.

A **1.** Pour $x = y = 0$, on a : $f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0$.

Pour x réel et $y = 0$, on a : $f(0) = f(x) + f(0)$ d'où $f(x) = 0$.

2. x et y sont dorénavant strictement positifs.

Pour $x > 0$, $f_k(x) = k\ln x$. Soit $y > 0$.

$f_k(xy) = k\ln xy = k\ln x + k\ln y = f_k(x) + f_k(y)$

Les fonctions f_k sont donc solutions de (E_A)

3. a. Pour $x = y = 1$, on a : $f(1) = 2f(1)$ d'où $f(1) = 0$.

b. On a, d'une part, $f'_y(x) = yf'_y(xy)$, d'autre part $f'_y(x) = f'(x)$ donc, pour $y > 0$, $yf'_y(xy) = f'(x)$.

Si $x = 1$, cette relation indique que pour $y > 0$, $f'(y) = \frac{f'(1)}{y} = \frac{k}{y}$ avec $k = f'(1)$.

c. Pour $x > 0$, $h'(x) = f'(x) - \frac{k}{x} = \frac{f'(1)}{x} - \frac{f'(1)}{x} = 0$ donc h est une fonction constante.

Pour $x > 0$, $h(x) = h(1) = 0$ donc $f(x) = k\ln x$.

4. Les seules fonctions non nulles, dérivables sur $]0\,;+\infty[$ solutions de l'équation fonctionnelle (E_A) sont les fonctions $x \mapsto k\ln x$.

B. (E_B) $f(x+y) = f(x)f(y)$, x et y réels.

1. Soit k un réel. Pour tout x réel, $f_k(x) = e^{kx}$.

Soit y un réel.

$f_k(x+y) = e^{k(x+y)} = e^{kx}e^{ky} = f_k(x)f_k(y)$

Les fonctions f_k sont donc solutions de (E_B).

2. a. Supposons que $f(0) = 0$. Pour tout x réel,

$f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0$ donc $f(0) \neq 0$.

L'égalité $f(x) = f(x)f(0)$ implique que $f(0) = 1$.

b. On a, d'une part, $f'_x(y) = f'(x+y)$, d'autre part $f'_x(y) = f(x)f'(y)$ donc, pour y réel, $f'(x+y) = f(x)f'(y)$.

Si $y = 0$, $f'(x) = f(x)f'(0)$.

Pour tout x réel, $f'(x) = kf(x)$ avec $k = f'(0)$.

c. Pour x réel, $h'(x) = f'(x)e^{-kx} - ke^{-kx}f(x)$ d'où $h'(x) = kf(x)e^{-kx} - ke^{-kx}f(x) = 0$ donc h est une fonction constante.

d. Pour x réel, $h(x) = h(0) = 1$ donc $f(x) = \frac{1}{e^{-kx}} = e^{kx}$.

3. Les seules fonctions non nulles, dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation fonctionnelle (E_B) sont les fonctions $x \mapsto e^{kx}$.