Chapitre 12 : Diviseurs et multiples de nombres entiers

1. Problème 12.1

1.2 Enoncé

Le professeur d'Education Physique et Sportive organise en fin d'année un tournoi avec les 147 élèves de $4^{\text{ème}}$ et les 105 élèves de $3^{\text{ème}}$. Il souhaite les répartir de telle façon que dans tous les groupes il y ait le même nombre d'élèves de $3^{\text{ème}}$, et que dans tous les groupes, il y ait le même nombre d'élèves de $4^{\text{ème}}$. Il souhaite également avoir le plus grand nombre possible de groupes. Combien de groupes pourra-t-il faire et comment ces groupes seront-ils constitués ?

1.2 Une méthode de résolution

On cherche tous les diviseurs commun de 147 et 105 :

- $147 = 1 \times 147 = 3 \times 49 = 7 \times 21 = 1 \times 147$
- $105 = 1 \times 105 = 3 \times 35 = 7 \times 15$

Les diviseurs communs de 147 et de 105 sont : 1, 3, 7 et 21.

Conclusion : On pouvait donc faire 1, 3, 7 ou 21 groupes.

1.3 PGCD de deux nombres entiers

Le plus grand diviseur commun de 147 et 105 est 21.

On admet la propriété suivante :

Propriété

Soient a et b deux nombres entiers naturels.

a et b possèdent un plus grand diviseur commun.

D'où la définition :

Définitions

Soient a et b deux nombres entiers naturels.

On appelle PGCD de a et b le plus grand diviseur commun de a et b.

On le note PGCD(a ; b).

Exemple : PGCD(147 ; 105) = 21

2. Problème 11.2

2.1 Enoncé

1. Un engrenage est constitué d'une roue à 6 dents et d'une roue à 8 dents. On marque une dent sur chaque roue. Au bout de combien de tours, les deux roues seront-elles revenues dans la même position ?

2. Même question avec une engrenage constitué de trois roues comportant respectivement 14 dents, 6 dents et 10 dents.

2.2 Une méthode de résolution

Engrenage avec 6 dents	Nombre de dents « passées »	Engrenage avec 8 dents
1 tour	6	Moins de 1 tour
2 tours	12	Entre 1 et 2 tours
3 tours	18	Entre 2 et 3 tours
4 tours	24	3 tours

2.3 PPCM de deux nombres entiers

Le plus petit multiple commun de 6 et 8 est 24.

On admet la propriété suivante :

Propriété

Soient a et b deux nombres entiers naturels.

a et b possèdent un plus petit multiple commun.

D'où la définition :

Définitions

Soient a et b deux nombres entiers naturels.

On appelle PPCM de a et b le plus petit multiple commun de a et b.

On le note PPCM(a ; b).

Exemple : PPCM(6 ; 8) = 24

3. Nombres premiers

3.1 Définition

Définition

On appelle nombre premier, un nombre entier naturel qui admet exactement deux diviseurs 1 et lui-même.

Remarque : 1 ne possède qu'un seul diviseur lui-même. Donc, compte-tenu de la définition, 1 n'est pas un nombre premier.

Liste des nombres premiers inférieur à 30 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29.

3.2. Décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers

On admet le théorème suivant :

Théorème

1. Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.
2. Tout entier strictement positif peut être écrit comme un produit de nombres premiers

Exemple : $1620 = 2 \times 810 = 2 \times 2 \times 405 = 2 \times 2 \times 9 \times 45 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 9 \times 5$

$$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^4 \times 5$$