Chapitre 9. Nombres premiers

1. Problème 9.1

1.1 Enoncé

Le professeur d'Education Physique et Sportive organise en fin d'année un tournoi avec les 147 élèves de $4^{\text{ème}}$ et les 105 élèves de $3^{\text{ème}}$. Il souhaite les répartir de telle façon que dans tous les groupes il y ait le même nombre d'élèves de $3^{\text{ème}}$, et que dans tous les groupes, il y ait le même nombre d'élèves de $4^{\text{ème}}$. Il souhaite également avoir le plus grand nombre possible de groupes. Combien de groupes pourra-t-il faire et comment ces groupes seront-ils constitués ?

1.2 Une méthode de résolution

On cherche tous les diviseurs commun de 147 et 105 :

$147 = 1 \times 147 = 3 \times 49 = 7 \times 21$

$105 = 1 \times 105 = 3 \times 35 = 5 \times 21 = 7 \times 15$

Les diviseurs communs de 147 et de 105 sont : 1, 3, 7 et 21.

Conclusion : On pouvait donc faire 1, 3, 7 ou 21 groupes.

1.3 PGCD de deux nombres entiers

Le plus grand diviseur commun de 147 et 105 est 21.

On admet la propriété suivante :

Propriété

Soient a et b deux nombres entiers naturels.

a et b possèdent un plus grand diviseur commun.

D'où la définition :

Définition

Soient a et b deux nombres entiers naturels.

On appelle PGCD de a et b le plus grand diviseur commun de a et b.

On le note PGCD(a ; b).

Exemple : PGCD(147 ; 105) = 21

2. Problème 9.2

2.1 Enoncé

1. Un engrenage est constitué d'une roue à 6 dents et d'une roue à 8 dents. On marque une dent sur chaque roue. Au bout de combien de tours, les deux roues seront-elles revenues dans la même position ?

2. Même question avec une engrenage constitué de trois roues comportant respectivement 14 dents, 6 dents et 10 dents.

2.2 Une méthode de résolution

Engrenage avec 6 dents	Nombre de dents « passées »	Engrenage avec 8 dents
1 tour	6	Moins de 1 tour
2 tours	12	Entre 1 et 2 tours
3 tours	18	Entre 2 et 3 tours
4 tours	24	3 tours

2.3 PPCM de deux nombres entiers

Le plus petit multiple commun de 6 et 8 est 24.

On admet la propriété suivante :

Propriété

Soient a et b deux nombres entiers naturels.

a et b possèdent un plus petit multiple commun.

D'où la définition :

Définition

Soient a et b deux nombres entiers naturels.

On appelle PPCM de a et b le plus petit multiple commun de a et b.

On le note PPCM$(a\ ;\ b)$.

Exemple : PPCM$(6\ ;\ 8) = 24$

3. Nombres premiers

3.1 Méthodes de détermination du PGCD et du PPCM de deux entiers

3.1.1 Méthodes de détermination du PGCD de deux nombres entiers

On reprend l'exemple du problème 1. On a :

$147 = 3 \times 49 = 3 \times 7^2$ (On ne peut plus « décomposer » les facteurs)

$105 = 7 \times 15 = 3 \times 5 \times 7$ (On ne peut plus « décomposer » les facteurs)

On remarque que :

PGCD(147 ; 105) $= 21 = 3 \times 7$ (On prend les facteurs commun dans les deux décompositions et on les affecte de la plus petite puissance).

3.1.1 Méthodes de détermination du PPCM deux entiers

On reprend l'exemple du problème 2. On a :

$6 = 2 \times 3$ (On ne peut plus « décomposer » les facteurs)

$8 = 2 \times 2 \times 2$ (On ne peut plus « décomposer » les facteurs)

On remarque que :

PPCM(6 ; 8) $= 24 = 2^3 \times 3$ (On prend tous les facteurs qui interviennent dans les deux décompositions et on les affecte de la plus grande puissance).

3.2 Définition

Définition

On appelle nombre premier, un nombre entier naturel qui admet exactement deux diviseurs 1 et lui-même.

Remarque : 1 ne possède qu'un seul diviseur lui-même. Donc, compte-tenu de la définition, 1 n'est pas un nombre premier.

Liste des nombres premiers inférieur à 30 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29.

3.3. Décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers

On admet le théorème suivant :

Théorème

1. Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.
2. Tout entier strictement positif peut être écrit comme un produit de nombres premiers

Exemple : $1620 = 2 \times 810 = 2 \times 2 \times 405 = 2 \times 2 \times 9 \times 45 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 9 \times 5$

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^4 \times 5$

Remarque : On peut démontrer que cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

3.4. Détermination du PGCD et du PPCM de deux nombres entiers

On admet le théorème suivant :

Théorème

Soient m et n deux nombres entiers.

On décompose chacun des deux entiers m et n en produit de nombres premiers.

1. Le PGCD de m et n est égal au produit des nombres premiers communs aux deux décompositions, chacun d'eux étant affecté du plus petit des deux exposants.
2. Le PPCM de a et b est égal au produit des nombres premiers apparaissant dans l'une au moins des deux décompositions, chacun d'eux étant affecté du plus grand des deux exposants.

4. Fraction irréductible

Définition

Soient a et b deux nombres entiers naturels avec b non nul.

La fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** signifie que a et b ont 1 pour seul diviseur commun

Remarques : Une fraction irréductible est une fraction qui ne peut plus être simplifiée.