

# Chapitre 11 : Puissances

## 1. Puissances d'exposants positifs

### Définitions

Quel que soit le nombre  $a$  et quel que soit l'entier  $n$  supérieur à 2, on pose :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

**Lecture** : On lit «  $a$  puissance  $n$  » ou «  $a$  exposant  $n$  ».

**Exemples** :  $100\,000\,000\,000\,000 = 10^{14}$

## 2. Propriétés

### 2.1 Produit de deux puissances d'un même nombre

On a :

$$5^7 \times 5^8 = \underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}_{7 \text{ facteurs}} \times \underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}_{8 \text{ facteurs}}$$

$$5^7 \times 5^8 = \underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}_{15 \text{ facteurs}}$$

$$5^7 \times 5^8 = 5^{15}$$

Plus généralement, on admet le propriété suivante :

Propriété

Pour tout nombres  $a$  et pour tous nombres entiers  $m$  et  $n$  supérieurs ou égaux à 2 , on a :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

## 2.2 Quotient de deux puissances d'un même nombre

On a :

$$\frac{7^{12}}{7^5} = \frac{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}$$

$$\frac{7^{12}}{7^5} = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$$

$$\frac{7^{12}}{7^5} = 7^7$$

Plus généralement, on admet le propriété suivante :

Propriété

Pour tout nombre  $a$  non nul et pour tous nombres entiers naturels  $m$  et  $n$  supérieurs ou égaux à 2 avec  $m > n$ , on a :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

## 2.3 Produit de deux puissances de même exposant

On a :

$$5^3 \times 2^3 = (5 \times 5 \times 5) \times (2 \times 2 \times 2)$$

$$5^3 \times 2^3 = (5 \times 2) \times (5 \times 2) \times (5 \times 2)$$

$$5^3 \times 2^3 = (5 \times 2)^3$$

$$5^3 \times 2^3 = 10^3$$

Plus généralement, on admet la propriété suivante :

### Propriété

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres et  $n$  un nombre entier supérieur ou égal à 2, on a :

$$a b^n = a^n \times b^n$$

## 2.4 Puissance de puissance

On a :  $(4^3)^2 = 4^3 \times 4^3 = 4^6$

Plus généralement, on admet la propriété suivante

### Propriété

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres et  $n$  un nombre entier supérieur ou égal à 2, on a :

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

### 3. Définition de $a^l$

Par exemple, on souhaite définir  $10^1$ .

On veut cependant que les propriétés restent vraies (principe de permanence des propriétés).

Par exemple, on doit avoir :  $\frac{10^4}{10^3} = 10^{4-3} = 10^1$

Mais, on aussi :  $\frac{10^4}{10^3} = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10 \times 10} = 10$

On doit donc nécessairement avoir :  $10^1 = 10$

D'où la définition suivante :

#### Définition

Pour tout nombre  $a$ , on définit  $a^l$  par :  $a^l = a$

## 4. Définition de $a^0$

Par exemple, on souhaite définir  $10^0$ .

On veut cependant que les propriétés restent vraies (principe de permanence des propriétés).

Par exemple, on doit avoir :  $\frac{10^4}{10^4} = 10^{4-4} = 10^0$

Mais, on a aussi :  $\frac{10^4}{10^4} = 1$

On doit donc nécessairement avoir :  $10^0 = 1$

D'où la définition suivante :

### Définition

Pour tout nombre non nul  $a$ , on définit  $a^0$  par :  $a^0 = 1$