Chapitre 10 : Fonction linéaire

1. Problèmes.

Après une augmentation de 12%, un article coûte 89,6 euros. Quel était son prix initial?

2. Résolutions

2.1 On tâtonne

Prix initial	60	70	80
Augmentation	7,2	8,4	9,6
Prix final	67,2	78,4	89,6

2.2 Modélisation algébrique

On appelle x le prix initial.

x est solution de l'équation suivante :

$$x + \frac{12}{100}x = 89{,}6$$

$$x\left(1 + \frac{12}{100}\right) = 89{,}6$$

$$1{,}12x = 89{,}6$$

$$x = \frac{89{,}6}{1{,}12} = 80$$

Vérification : $80 + \frac{12}{100} \times 80 = 89{,}6$

Conclusion : Le prix initial était de 80 euros.

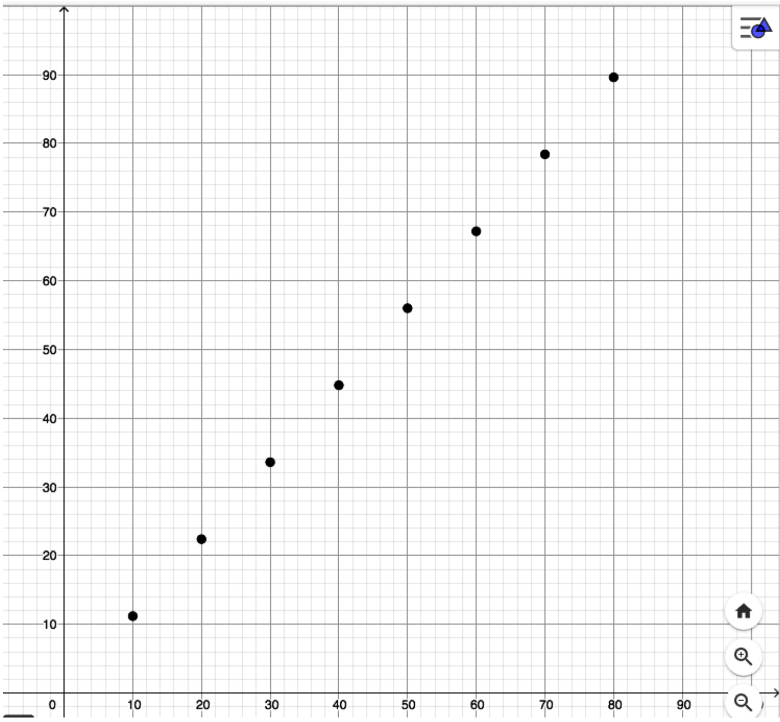
2.2 Modélisation à l'aide de fonctions

On appelle f la fonction qui à un nombre positif x associe le nombre x augmenté de 12%..

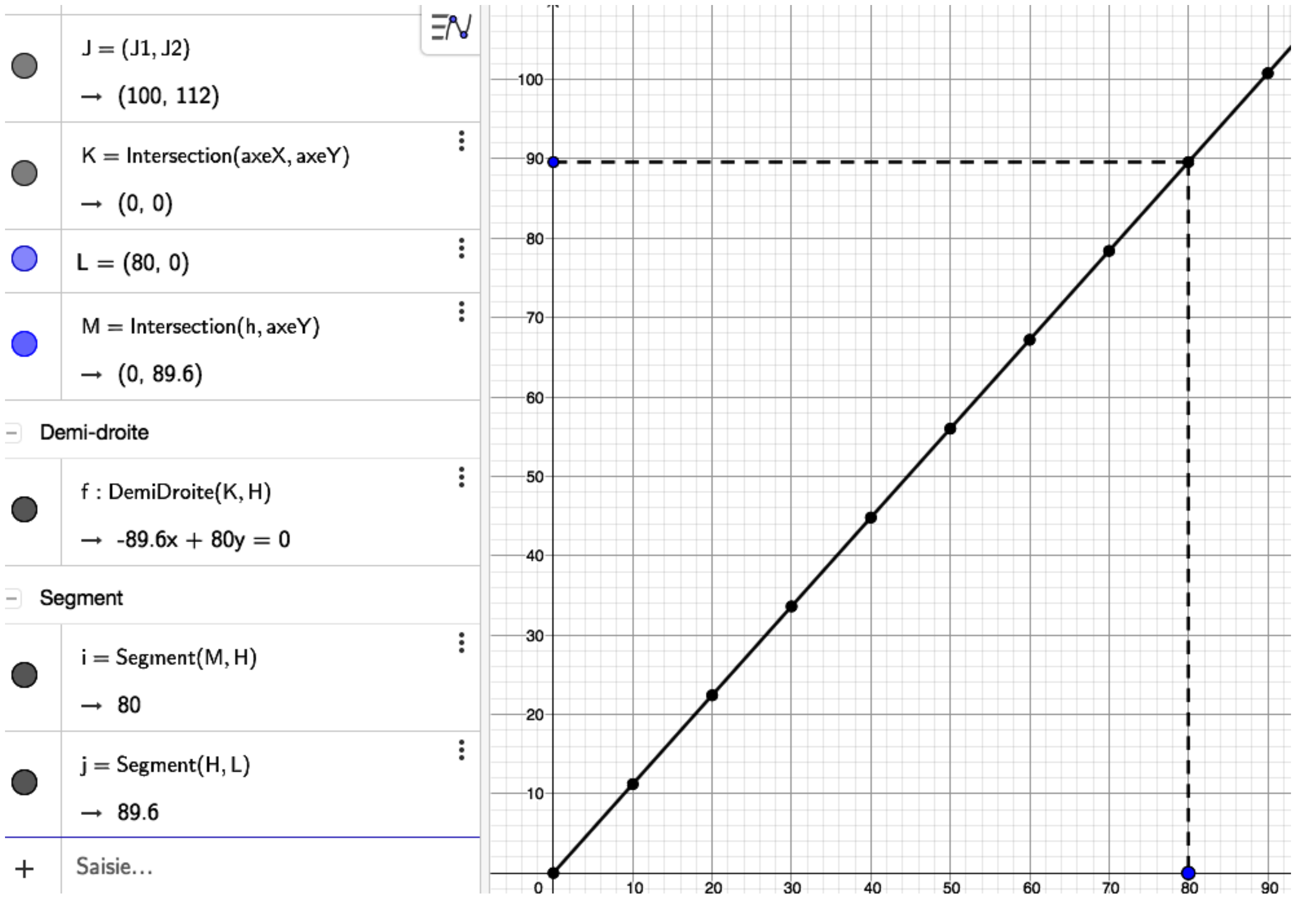
Pour tout nombre x positif, on a :

$$f(x) = x + \frac{12}{100}x = x\left(1 + \frac{12}{100}\right) = 1{,}12x$$

On représente graphiquement cette fonction.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
2	11.2	22.4	33.6	44.8	56	67.2	78.4	89.6	100.8	112



On peut formuler la conjecture suivante :

Conjecture :

Il semble que la représentation graphique de la fonction *f* soit une droite passant par l'origine du repère.

Remarque :

La représentation graphique de la fonction *f* est une droite passant par l'origine du repère. Cela se justifie par le fait que représenter *f* revient à représenter une situation de proportionnalité.

3. Définitions

Définitions

Une fonction f est une **fonction linéaire** signifie qu'il existe un nombre a tel que :

Pour tout nombre x , $f(x) = ax$

Exemples : La fonction f est une fonction linéaire ($a = 1{,}12$)

4. Lien avec la proportionnalité

Soit a un nombre.

- Soit f une fonction linéaire de coefficient a.

  Par définition, pour tout nombre x, on a $f(x) = ax$.

  Autrement dit les nombres sont proportionnels à leurs images. Un coefficient de proportionnalité étant a.

- Réciproquement, si f est une fonction telle que les nombres soient proportionnels à leurs images.

  Alors, il existe un nombre a tel que pour tout nombre x, $f(x) = ax$.

  f est donc une fonction linéaire de coefficient a par définition.

On vient de démontrer les propriétés suivantes :

Propriétés

- Si f est une fonction linéaire alors les nombres sont proportionnels à leurs images par f.
- Réciproquement, si une fonction f est telle que les nombres soient proportionnels à leurs images par f alors f est une fonction linéaire.

5. Représentation graphique des fonctions linéaires

5.1 Propriétés

On admet le théorème suivant :

Propriétés

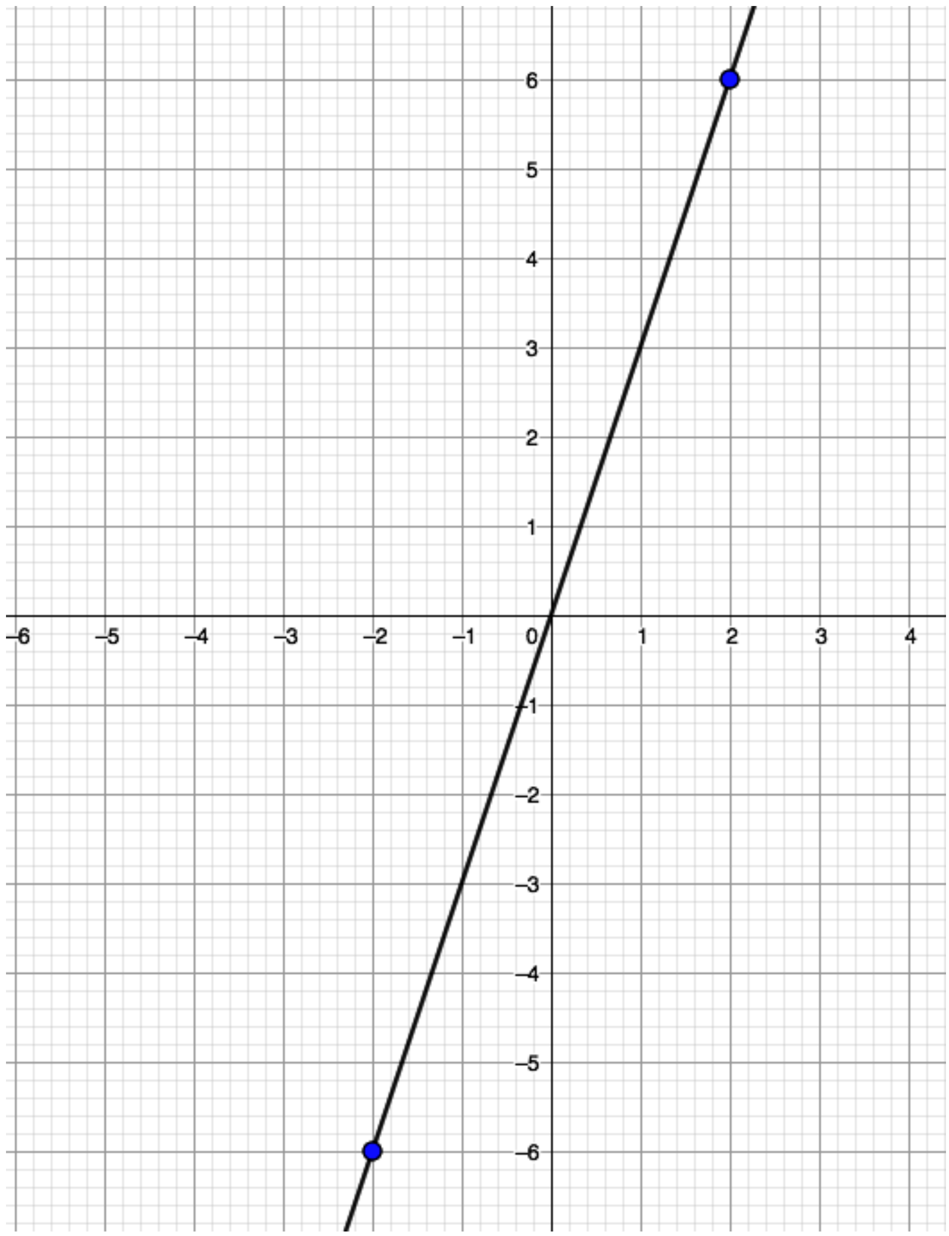
- La représentation graphique d'une fonction linéaire dans un repère est une droite qu passe par l'origine du repère..
- Réciproquement si, dans un repère, une fonction est représentée par une droite qui passe par l'origine du repère alors c'est une fonction linéaire.

Exemple : Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto 3x$

- f est une fonction linéaire donc sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère

x	-2	2
$f(x)$	-6	6

- Cette droite passe par les points de coordonnées (0 ; 0) ; (-2 ; -6) et (2 ; 6).



5.2 Interprétation géométrique du coefficient a d'une fonction linéaire.

On reprend la fonction $f : x \mapsto 3x$

Pour tout nombre x, on a :

$f(x + 1) = 3(x + 1) = 3x + 3 = f(x) + 3$

$f(x + 2) = 3(x + 2) = 3x + 2 = f(x) + 2\times3$

Plus généralement, on admet le théorème suivant :

Propriétés

Soit a un nombre et $f : x \mapsto 3x$ la fonction linéaire de coefficient a.

Pour tout nombre x et pour tout nombre entier relatif n, on a :

$$f(x + 1) = f(x) + a \text{ et } f(x + n) = f(x) + nf(a)$$

Interprétation géométrique : voir le graphique du paragraphe 5.1