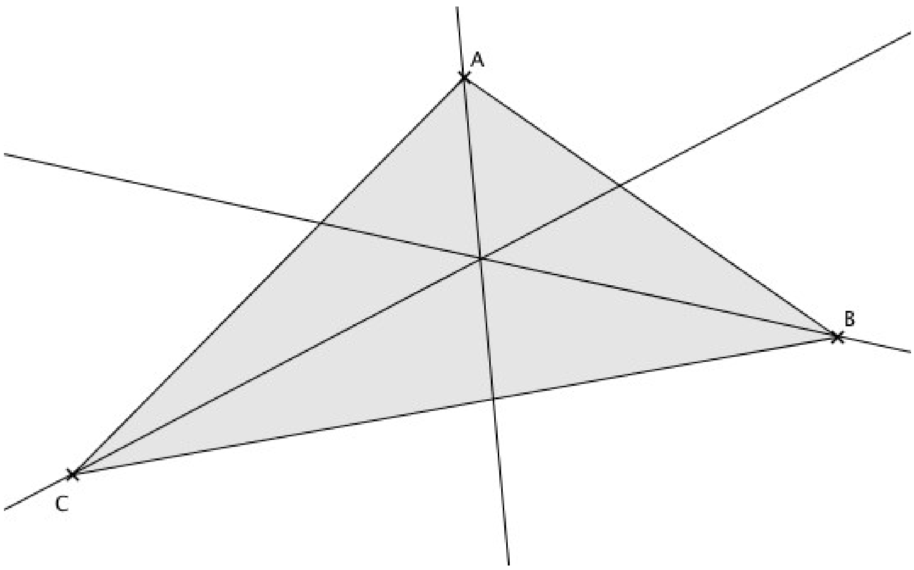
Chapitre 26 : Bissectrices d'un triangle.

1. Problème

Les bissectrices d'un triangle sont-elles concourrantes ?

2. Conjecture.



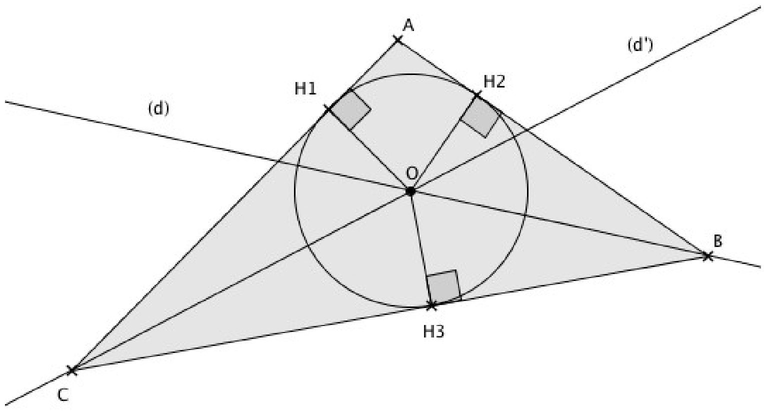
Conjecture : Il semble que dans un triangle, les trois bissectrices soient concourrantes.

3. Démonstration.

Hypothèses :

- ABC est un triangle.
- *(d)* est la bissectrice de $\widehat{ABC}$.
- *(d')* est la bissectrice de $\widehat{BCA}$.

On admet que *(d)* et *(d')* sont sécantes. On appelle O leur point d'intersection.



Idée : Pour démontrer que les trois bissectrices de ABC sont concourantes, il faut et il suffit de montrer que O appartient à la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

On appelle respectivement H_1, H_2 et H_3 les pieds des perpendiculaires aux droites (AC), (AB) et (BC) passant par O.

1. On démontre que $OH_1 = OH_2 = OH_3$

On sait que : O appartient à *(d)*, la bissectrice de $\widehat{ABC}$.

Théorème : Si un point appartient à la bissectrice d'un angle alors il est équidistant des deux côtés de l'angle.

Conclusion : $OH_2 = OH_3$.

De la même façon, on démontrerait que : $OH_3 = OH_1$.

On en déduit que : $OH_1 = OH_2 = OH_3$.

2. On démontre que O appartient à la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

On sait que : $OH_1 = OH_2$

Théorème : Si un point est équidistant des côtés d'un angle alors il appartient à la bissectrice de cet angle.

Conclusion : O appartient à la bissectrice de BAC.

3. Conclusion :

O appartient aux trois bissectrices de ABC, ces dernières sont concourantes.

4. Remarque :

De plus, on a : $OH_1 = OH_2 = OH_3$.

On en déduit que : H_1, H_2 et H_3 appartiennent tous les trois au cercle *(C)* de centre O et de rayon OH_1.

H_1 appartennant au cercle *(C)* et les droites (OH_1) et (AC) étant perpendiculaires, on en déduit que (AC) est tangente au cercle *(C)*.

Pour les mêmes raisons, les droites (BC) et (AB) sont respectivement tangentes au cercle (C) en (H_3) et (H_2).

4. Théorème et définition

On vient de démontrer les théorèmes suivants :

Théorème 1

Les bissectrices d'un triangle sont concourantes.

Théorème 2

Le point de concours des bissectrices d'un triangle est équidistant des côtés du triangle.

Théorème 3

Le point de concours des bissectrices d'un triangle est le centre d'un cercle qui est tangent aux trois côtés du triangle.

D'où la définition

Définition :

Soit ABC un triangle et O le point de concours des bissectrices.

Le cercle de centre O tangent aux trois côtés du triangle ABC est appelé cercle inscrit dans le triangle ABC.