Chapitre 23 : Droite tangente à un cercle en un point

1. Problème

L'affirmation suivante est-elle vraie?

Affirmation : Une droite et un cercle ont toujours deux points communs.

2. Expérimentons

Dans le cahier d'exercices, on a vu que trois cas de figures semblaient se présenter :

- La droite et le cercle n'ont pas de point commun.
- La droite et le cercle ont un unique point commun.
- La droite et le cercle ont deux points communs.

3. Raisonnons

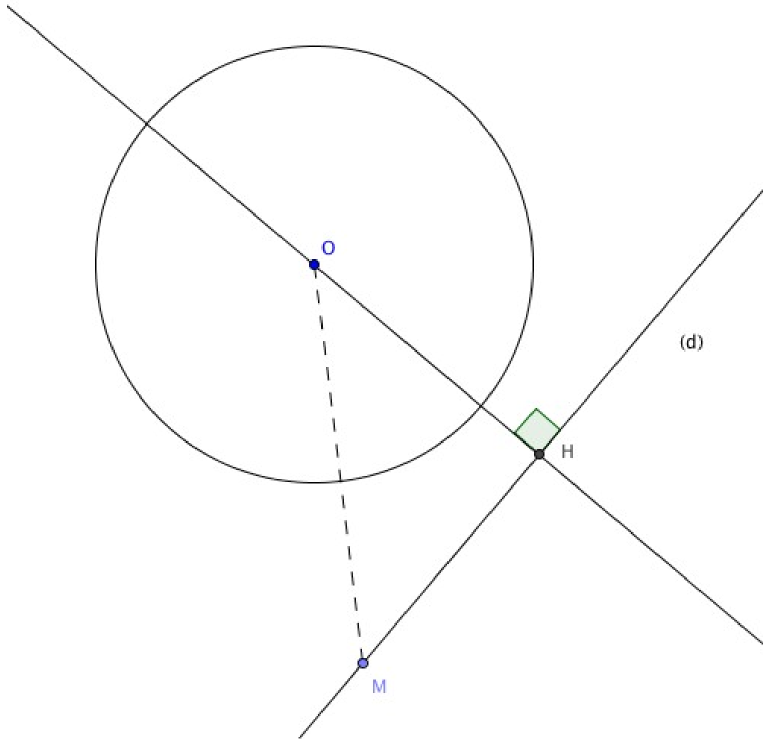
Hypothèses

- *(C) est un cercle de centre O et de rayon r (r étant un nombre strictement positif).*
- *(d) est une droite.*
- *H est le pied de la perpendiculaire menée de O à (d).*

Remarque : Par définition OH est la distance de O à la droite *(d)*.

Trois cas et seulement trois peuvent se produire :

Cas 1 : OH $>$ r



D'après une propriété, pour tout point M appartenant à la droite *(d)* et distinct de H, on a :

OM $>$ OH

Comme de plus, on a OH $>$ r, on en déduit que :

OM $>$ r.

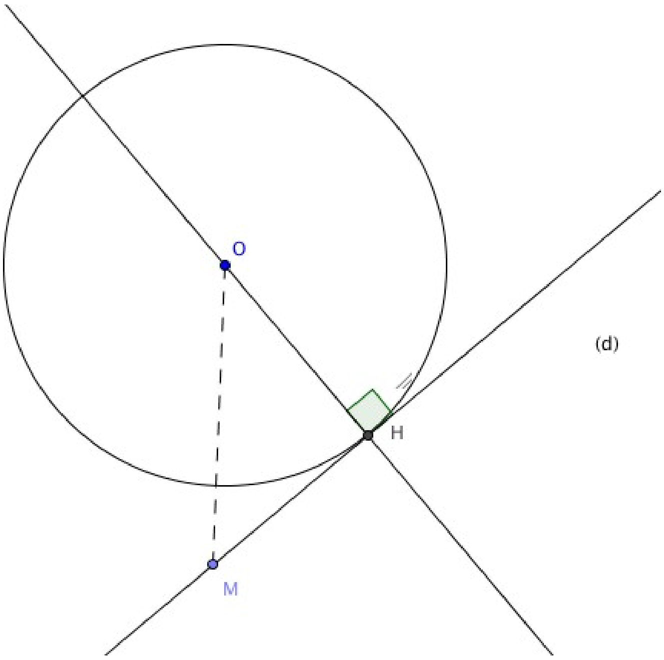
Par suite M n'appartient pas à *(C)*.

Ainsi, aucun point de *(d)* n'appartient à (C).

On en déduit que *(d)* et *(C)* n'ont aucun point d'intersection.

Cas 2 : OH = r

Dans ce cas là, H appartient à *(C).*



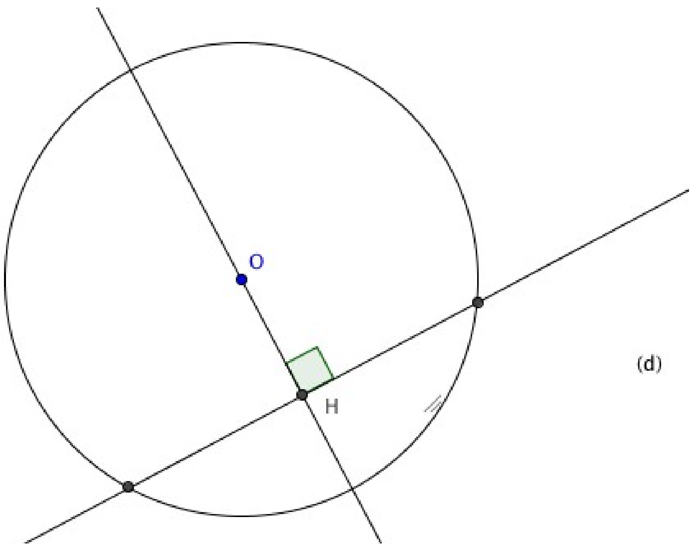
En raisonnant comme dans le cas 1, on peut montrer que pour tout point M appartenant à la droite *(d)* et distinct de H, on a :

OM > r.

Ainsi, aucun point de *(d)* distinct de H ne peut appartenir à *(C).*

On en déduit que *(d)* et *(C)* n'ont que H pour point commun.

Cas 3 : OH < r



On admet que dans ce cas là, la droite *(d)* et le cercle *(C)* ont exactement deux points communs.

3. Enoncés des propriétés

On a partiellement démontré les propriétés suivantes :

Propriétés :

- Lorsque la distance du centre d'un cercle à une droite est strictement inférieure au rayon du cercle, alors la droite et le cercle ont deux points d'intersection.
  On dit alors que la droite est sécante au cercle.
- Lorsque la distance du centre d'un cercle à la droite est strictement supérieur au rayon du cercle, la droite et le cercle n'ont aucun point commun.
  On dit que la droite est extérieure au cercle.
- Lorsque la distance du centre d'un cercle à une droite est égale au rayon du cercle, la droite et le cercle ont un seul point d'intersection.
  Si on appelle A ce point d'intersection. On dit que la droite est tangente au cercle en A.

On déduit de cette définition les propriétés suivantes :

Propriétés :

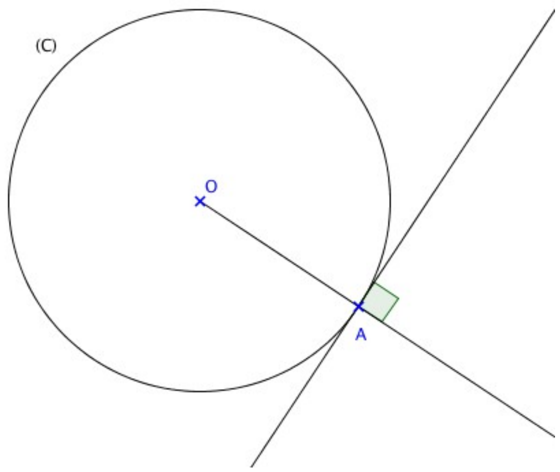
Soient *(C)* un cercle de centre O et A un point du cercle *(C)*

- Si une droite *(d)* est tangente au cercle *(C)* en A, alors les droites (OA) et *(d)* sont perpendiculaires.
- Réciproquement si une droite *(d)* est perpendiculaire en A à la droite (OA) alors cette droite est tangente au cercle *(C)* en A.

Application : construction de la tangente à un cercle en un point

Soit *(C)* un cercle de cercle de centre O et de rayon 5 *cm*. Soit A un point de *(C)*.

Construire la tangente en A au cercle *(C)*.



Programme de construction :

- On trace le rayon [OA].
- On trace la perpendiculaire à (OA) passant par A. La droite ainsi obtenue est la tangente à (C) en A.