

Chapitre 26 : Equations « produit nul ».

1. Problème

On donne les deux programmes de calculs suivants :

Programme A	Programme B
Choisir un nombre.	Choisir un nombre.
Calculer la différence de ce nombre et de 10.	Lui soustraire 7.
Calculer le produit du résultat obtenu par le nombre de départ diminué de 4.	Elever au carré le résultat obtenu.
	Lui soustraire 9

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

Affirmation 1 :

Les deux programmes donnent toujours le même résultat.

Affirmation 2 :

Il existe exactement deux nombres pour lesquels le résultat obtenu avec le programme B est 0.

3. Démonstration

Pour tout nombre x , on note $A(x)$ le résultat obtenu avec le programme A et $B(x)$ celui obtenu avec le programme B.

Pour tout nombre x , on a :

$$A(x) = (x - 10)(x - 4) \quad \text{et} \quad B(x) = (x - 7)^2 - 9$$

- **Méthode 1 : On développe les deux expressions :**

Pour tout nombre x , on a :

$A(x) = (x - 10)(x - 4)$	$B(x) = (x - 7)^2 - 9$
$A(x) = x^2 - 10x - 4x + 40$	$B(x) = x^2 - 14x + 49 - 9$
$A(x) = x^2 - 14x + 40$	$B(x) = x^2 - 14x + 40$

Ainsi, Pour tout nombre x , on a : $A(x) = B(x)$.

Conclusion : l'affirmation 1 est vraie.

- **Méthode 2: On factorise $B(x)$:**

Pour tout nombre x , on a :

$$B(x) = (x - 7)^2 - 9$$

$$B(x) = (x - 7)^2 - 3^2$$

$$B(x) = (x - 7 - 3)(x - 7 + 3)$$

$$B(x) = (x - 10)(x - 4)$$

$$B(x) = A(x).$$

Affirmation 2 :

On cherche les solutions de l'équation :

$$(x - 7)^2 - 9 = 0$$

C'est à dire de l'équation :

$$(x - 4)(x - 10) = 0 \quad (\text{d'après la factorisation précédente}).$$

2. Equations « produit nul »

2.1 Théorème

Soient a et b deux nombres tels que $ab = 0$.

Raisonnons par disjonction des cas :

- **Cas 1** : a est non nul.

Par définition du quotient, on a : $b = \frac{0}{a} = 0$.

- **Cas 2** : a est nul.

On vient de démontrer le théorème suivant :

Théorème

Si un produit de deux facteurs est nul, alors au moins un des facteurs est nul.

Autrement dit :

Quels que soient les nombres a et b : si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.

La réciproque de ce théorème est clairement vraie :

Propriété :

Si dans un produit de deux facteurs, l'un des deux facteurs au moins est nul alors le produit est nul.

Plus généralement, on admet les propriétés suivantes relative au produit d'un nombre quelconque de facteurs :

Théorème :

Si un produit de facteurs est nul, alors au moins un des facteurs est nul.

Et réciproquement :

Propriété :

Si dans un produit de facteurs, l'un des facteurs au moins est nul alors le produit est nul.

2.2 Application à la résolution d'équations produit nul

On reprend l'équation du paragraphe 1.

$$\text{On a : } (x - 4)(x - 10) = 0$$

Théorème : Si un produit de facteurs est nul alors l'un au moins des facteurs est nul.

$$\text{Donc : } \quad x - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 10 = 0$$

$$\text{Donc : } \quad x = 4 \quad \text{ou} \quad x = 10$$

Remarque :

Pour l'instant, on a seulement établi que si l'équation avait des solutions, celles-ci ne pouvaient être que 4 et 10.

Il faut maintenant vérifier que ces deux nombres sont bien solutions de l'équation.

Vérification :

$$A = (4 - 4)(4 - 10)$$

$$A = 0$$

$$B = (10 - 4)(10 - 10)$$

$$B = 0$$

Conclusions :

- Les solutions de l'équation sont 0 et 10.
- L'affirmation 2 est vraie.