Démonstrations de formules de dérivation

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur une partie D de $\mathbb{R}$,
alors la fonction $f=\sqrt{u}$ est dérivable sur D et pour tout x de D, $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Soit x_0 un réel de D et h un réel non nul tel que x_0+h soit dans D .

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sqrt{u(x_0+h)}-\sqrt{u(x_0)}}{h}=\frac{1}{\left(\sqrt{u(x_0+h)}+\sqrt{u(x_0)}\right)}\times\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{\left(\sqrt{u(x_0+h)}+\sqrt{u(x_0)}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{u(x_0)}}\quad\text{et}\quad\lim_{h\to0}\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}=u'(x_0)$$

Donc $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}}$

Soit u une fonction dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$
alors pour tout entier naturel n non nul , $f=u^n$ est dérivable sur D et
pour tout x de D , $f'(x)=n\times u'(x)\times u^{n-1}(x)$

Ce résultat se démontre à l'aide d'un raisonnement par récurrence
Posons $\mathcal{P}$(n) : $f=u^n$ est dérivable sur D et $f'=n\times u'\times u^{n-1}$

<u>Initialisation</u> : $f=u^1=u$ est dérivable sur D et $f'=u'$ donc $\mathcal{P}$(1) est vraie

<u>Hérédité</u> :
Supposons que $\mathcal{P}$(n) est vraie pour un certain entier n

Soit $f=u^{n+1}=u^n\times u$. f est un produit de deux fonctions dérivables sur D, donc f est dérivable sur D et si on applique la formule du produit on obtient :

$$f'=(u^n)'\times u+u^n\times u'=n\times u'\times u^{n-1}\times u+u^n\times u'=(n+1)\times u'\times u^n$$

<u>Conclusion</u> :
D'après le principe de récurrence,
pour tout entier naturel n non nul , $f=u^n$ est dérivable sur D et $f'=n\times u'\times u^{n-1}$

Soit u une fonction dérivable et non nul sur une partie D de $\mathbb{R}$
alors pour tout entier naturel n non nul , $f=\dfrac{1}{u^n}=u^{-n}$ est dérivable sur D et
pour tout x de D , $f'(x)=-n\times\dfrac{u'(x)}{u^{n+1}(x)}$

Ce résultat se démontre à l'aide d'un raisonnement par récurrence
Posons $\mathcal{P}$(n) : $f=u^{-n}$ est dérivable sur D et $f'=-n\times\dfrac{u'}{u^{n+1}}$

<u>Initialisation</u> : $f=u^{-1}=\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur D et $f'=-\dfrac{u'}{u^2}$ donc $\mathcal{P}$(1) est vraie

<u>Hérédité</u> :
Supposons que $\mathcal{P}$(n) est vraie pour un certain entier n

Soit $f=u^{-(n+1)}=u^{-n}\times u^{-1}$. f est un produit de deux fonctions dérivables sur D, donc f est dérivable sur D et si on applique la formule du produit on obtient :

$$f'=(u^{-n})'\times u^{-1}\ +\ u^{-n}\times\left(-\frac{u'}{u^2}\right)=-n\times\frac{u'}{u^{n+1}}\times\frac{1}{u}\ -\frac{u'}{u^{n+2}}=-(n+1)\times\frac{u'}{u^{n+2}}$$

<u>Conclusion</u> :
D'après le principe de récurrence,
pour tout entier naturel n non nul , $f=u^{-n}$ est dérivable sur D et $f'=-n\times\dfrac{u'}{u^{n+1}}$