

Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$

Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Montrer qu'il existe au moins un réel c dans l'intervalle $[a; b]$ tel que $f(c) = k$

Autrement dit :

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution.

L'hypothèse supplémentaire suivante, $\boxed{f(a) < f(b)}$, permet de reformuler l'hypothèse « k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ » en $k \in [f(a); f(b)]$

Donc voici le résultat que nous allons effectivement démontrer :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ telle que $f(a) < f(b)$

Pour tout réel $k \in [f(a); f(b)]$, il existe au moins un réel c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = k$

On va mettre en évidence l'existence d'une telle solution en utilisant la méthode de dichotomie. En partant du principe que comme $k \in [f(a); f(b)]$, alors

$$\text{ou } k \in \left[f(a); f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \text{ ou } k \in \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right); f(b) \right]$$

On introduit deux suites (a_n) et (b_n) définies par récurrence de la façon suivante :

$$a_0 = a \text{ et pour tout entier } n, a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k \\ \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < k \end{cases}$$
$$b_0 = b \text{ et pour tout entier } n, b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k \\ b_n & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < k \end{cases}$$

ATTENTION : dans le cas où $f(a) > f(b)$, cas non envisagé ici, il faut inverser les conditions dans les définitions par récurrence des suites (a_n) et (b_n)

Ces définitions peuvent en effrayer certains, mais concrètement de telles suites sont monotones et bornées et vont converger toutes les deux vers un même réel de l'intervalle $[a; b]$ qui aura le bon goût d'avoir comme image par f le réel k .

Maintenant que tout est dit, il ne reste plus qu'à le démontrer...

On peut montrer que : Pour tout entier naturel n , $a \leq a_n \leq b_n \leq b$

Autrement dit, les suites (a_n) et (b_n) sont des suites d'éléments de $[a;b]$

Initialisation : $a_0 = a \leq b = b_0$. La proposition est donc vraie au rang 0

Hérédité : Supposons que la proposition est vraie pour un certain entier n
 $a \leq a_n \leq b_n \leq b$

Procédons par disjonction des cas

Dans le cas où $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k$

$$a_{n+1} = a_n \quad , \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et donc } a \leq a_{n+1} = a_n \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b$$

Dans le cas où $f\left(\frac{a + b}{2}\right) < k$,

$$b_{n+1} = b_n \quad , \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et donc } a \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_n = b_{n+1} \leq b$$

Dans tous les cas, la proposition est vérifiée au rang $n+1$

Conclusion :

D'après le principe de récurrence, Pour tout entier naturel n , $a \leq a_n \leq b_n \leq b$

Au cours du raisonnement par récurrence précédent, le sens de variation des suites (a_n) et (b_n) a été mis en évidence.

Maintenant que l'on sait que pour tout entier n , $a_n \leq b_n$, nécessairement

$$a_n \leq \frac{(a_n + b_n)}{2} \leq b_n$$

Pour tout entier n ,

Dans le cas où $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k$, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq b_n$

Dans le cas où $f\left(\frac{a + b}{2}\right) < k$, $b_{n+1} = b_n$ et $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geq a_n$

Dans tous les cas, on a pour tout entier n , $a_{n+1} \geq a_n$ et $b_{n+1} \leq b_n$

Bilan : D'après le théorème de convergence monotone, (a_n) suite croissante bornée , donc elle converge vers un réel l_1 tandis que (b_n) est une suite décroissante bornée , donc elle converge vers un réel l_2
 Par passage à la limite de l'encadrement valable pour tout entier n ,
 $a \leq a_n \leq b_n \leq b$, on a l'encadrement suivant : $a \leq l_1 \leq l_2 \leq b$

Il reste à prouver qu'en réalité (a_n) et (b_n) converge le même réel L et que L est tel que $f(L)=k$

Pour cela, il faut justifier que la différence $b_n - a_n$ tend à se rapprocher de 0 et donc que les limites de (a_n) et (b_n) sont nécessairement égales .

$$\text{Pour tout entier } n, b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

La suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et comme le premier terme est

$$b_0 - a_0 = b - a, \text{ on a une formule explicite : } b_n - a_n = (b - a) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$.

De plus, comme (a_n) et (b_n) convergent, on a nécessairement $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

Notons, pour la suite, L la limite commune des suites (a_n) et (b_n) .

Comme f est continue sur $[a; b]$, elle est donc continue en L (càd $\lim_{x \rightarrow L} f(x) = f(L)$)

Par composition , comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ et $\lim_{x \rightarrow L} f(x) = f(L)$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(L)$$

Ce dernier point s'explique « facilement » si on reprend rigoureusement la définition de limite

Il reste une dernière chose à démontrer avant de conclure :

$$\text{Pour tout entier } n, f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$$

Initialisation :

Par définition, k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, donc la proposition est vraie au rang 0

Hérédité :

Supposons que la proposition est vraie pour un certain entier n : $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$

Dans le cas où $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k$, alors

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et donc } f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq k \leq f(b_{n+1})$$

Dans le cas où $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < k$, alors

$$b_{n+1}=b_n, \quad a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2} \text{ et donc } f(a_{n+1})<k\leq f(b_n)=f(b_{n+1})$$

Dans les deux cas de figure, la proposition est vraie au rang $n+1$

Conclusion : D'après le principe de récurrence, pour tout entier n , $f(a_n)\leq k\leq f(b_n)$

Pour conclure, comme $\lim_{n\rightarrow+\infty} f(b_n)=\lim_{n\rightarrow+\infty} f(a_n)=f(L)$ par passage à la limite de l'encadrement : $f(a_n)\leq k\leq f(b_n)$ valable pour tout entier n ,
on obtient $f(L)\leq k\leq f(L)$

Autrement dit, $f(L)=k$

On vient de déterminer l'existence d'un réel dans l'intervalle $[a;b]$ qui a pour image k .

Pour information dans le cas où $f(a)>f(b)$

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ telle que $f(a)>f(b)$

Pour tout réel $k\in[f(b);f(a)]$, il existe au moins un réel c dans $[a;b]$ tel que $f(c)=k$

On va mettre en évidence l'existence d'une telle solution en utilisant la méthode de dichotomie. En partant du principe que comme $k\in[f(b);f(a)]$, alors

$$\text{ou } k\in\left[f(b);f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \text{ ou } k\in\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right);f(a)\right]$$

On introduit deux suites (a_n) et (b_n) définies par récurrence de la façon suivante :

$$a_0=a \text{ et pour tout entier } n, \quad a_{n+1}=\begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\geq k \\ a_n & \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)<k \end{cases}$$

$$b_0=b \text{ et pour tout entier } n, \quad b_{n+1}=\begin{cases} b_n & \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\geq k \\ \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)<k \end{cases}$$

Pour ne pas faire de distinction ($f(a)>f(b)$ et $f(a)<f(b)$), il faudrait poser comme condition :

$$(f(a_n)-k)\times\left(f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)-k\right)\geq 0 \text{ et } (f(a_n)-k)\times\left(f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)-k\right)<0$$