CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON N°1
RENDU LUNDI 30 SEPTEMBRE

Exercice 1

Pour tout n entier naturel, $u_n=n^2+n-1$

1. $u_{n-1}=(n-1)^2+(n-1)-1=n^2-n-1$
   $u_{n+1}=(n+1)^2+(n+1)-1=n^2+3n+1$
   $u_{n+1}-u_n=n^2+3n+1-(n^2+n-1)=2n+2$
2. La suite (u_n) n'est pas arithmétique car il n'existe pas de réel r tel que pour tout n entier naturel $u_{n+1}-u_n=r$
   $u_1-u_0=2$, $u_2-u_1=4$, $u_3-u_2=6$
3. Pour tout n entier naturel, $2n+2>0$, donc $u_{n+1}-u_n>0$.
   La suite (u_n) est strictement croissante

Exercice 2

a. Pour tout n entier naturel, $u_n=n^2$ et donc $u_{n+1}=(n+1)^2=n^2+2n+1=u_n+2n+1$.
La suite (u_n) n'est pas arithmétique car il n'existe pas de réel r tel que pour tout n entier naturel $u_{n+1}-u_n=r$
Sinon, il suffit de comparer au moins deux différences de termes consécutifs pour conclure qu'elle n'est pas arithmétique :
$u_1-u_0=1$, $u_2-u_1=3$ (non indispensable : $u_3-u_2=5$)
Donc comme $u_1-u_0\neq u_2-u_1$, la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

Le premier terme u_0 étant égal à 0 , (u_n) ne peut donc pas être géométrique , sinon tous les termes devraient être égaux à 0, ce qui n'est pas le cas.

b. $u_0=2$ et pour tout entier n , $\boxed{u_{n+1}-u_n=-5}$
La suite (u_n) est arithmétique de raison $r=-5$ et de premier terme $u_0=2$
Donc pour tout n entier naturel, $\boxed{u_n=u_0+nr=2-5n}$

c. Calculons les premiers termes de la suite :
$u_0=3$, $u_1=5$, $u_2=7$, $u_3=9$, $u_4=11$, …
On peut conjecturer que la suite semble être arithmétique (contre toute attente)
Il reste à le justifier rigoureusement :
L'artillerie lourde consisterait à exprimer u_{n+1} en fonction de n , puis $u_{n+1}-u_n$.
Mais ici il y a une astuce : le trinôme du second degré au numérateur se factorise ainsi :
$2n^2+5n+3=2(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)$ (le calcul explicite des racines est nécessaire)
Donc pour tout n entier , $u_n=\dfrac{2(n+1)\left(n+\frac{3}{2}\right)}{n+1}=2\left(n+\frac{3}{2}\right)=2n+3$
On obtient ainsi une formule explicite pour u_n beaucoup plus simple .
Pour tout n entier , $u_{n+1}-u_n=2(n+1)+3-(2n+3)=2$
La suite (u_n) est arithmétique de raison $r=2$ et de premier terme $u_0=3$

d. Calculons les premiers termes de la suite :

u_0 n'existe pas contrairement à ce que semble indiquer l'énoncé

$u_1=\frac{27}{2}$, $u_2=\frac{243}{4}$, $u_3=\frac{729}{2}$, $u_4=\frac{19683}{8}$, …

$u_2-u_1=\frac{189}{4}$ et $u_3-u_2=\frac{1215}{4}$ donc il n'existe pas de réel r tel que $u_2=u_1+r$ et $u_3=u_2+r$.

Donc à fortiori, il n'existe pas de réel r tel que pour tout n entier non nul , $u_{n+1}=u_n+r$

La suite n'est pas arithmétique

$\frac{u_2}{u_1}=\frac{9}{2}$ et $\frac{u_3}{u_2}=6$ donc il n'existe pas de réel q tel que $u_2=q\times u_1$ et $u_3=q\times u_2$.

Donc à fortiori, il n'existe pas de réel q tel que pour tout n entier non nul , $u_{n+1}=q\times u_n$

La suite n'est pas géométrique

e. La définition de la suite ici n'a aucun sens, donc la suite n'est pas définie

Mais au cas où vous avez pris l'initiative de modifier la définition ainsi : $u_{n+1}=-\frac{2}{3}u_n+4$

Voici les premiers termes : $u_0=3$, $u_1=2$, $u_2=\frac{8}{3}$, $u_3=\frac{20}{9}$

On peut vérifier avec la méthode que celle détaillée au dessus, qu'une telle suite n'est ni arithmétique ni géométrique .

Exercice 3

Pour tout n entier non nul, $u_n=\frac{n+1}{n^2+1}$

1. On peut poser $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$, alors pour tout n entier non nul, $u_n=f(n)$
2. f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tel que le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur l'intervalle $[1;+\infty[$, dans lequel se trouve les entiers naturels non nuls pour lesquels le terme de la suite est défini .

   Posons $u(x)=x+1$ et $v(x)=x^2+1$

   $f=\frac{u}{v}$, donc $f'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

   Pour tout x réel , $f'(x)=\frac{1\times(x^2+1)-(x+1)\times(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$

   Pour tout x réel , $f'(x)$ est du signe de $-x^2-2x+1$.

   Ce trinôme a deux racines réelles ($x_1=\frac{2-\sqrt{8}}{-2}=-1+\sqrt{2}$ et $x_2=\ldots=-1-\sqrt{2}$)

   et il est du signe du coefficient devant x^2 à l'extérieur de ses racines .

   Donc si, maintenant, on se limite à l'intervalle $[1;+\infty[$, on a le résultat suivant :

   Pour tout x de $[1;+\infty[$, $f'(x)>0$

   En conclusion, f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.

   Donc (u_n) est strictement croissante car pour tout entier n , $f(n)<f(n+1)$, donc $u_n<u_{n+1}$
3. A l'aide de la calculatrice, en utilisant le mode « à la demande » de la table de valeurs, on obtient : $u_{10}\approx 0,10891$, $u_{100}\approx 0,0101$, $u_{10000}\approx 10^{-4}$, $u_{10^8}\approx 10^{-8}$ et $u_{10^{16}}\approx 10^{-16}$.

Lorsque n devient de plus en plus grand, u_n semble converger vers 0 .
ATTENTION : la calculatrice ne fournit qu'une valeur approchée des derniers termes calculés .
Quand vous lisez dans le tableau de valeurs: $u_{10^8}=1$, il faut avoir en tête que le calcul exact est :

$$u_{10^8}=\frac{10^8+1}{10^{16}+1}=\frac{100000001}{10000000000000001}=\frac{10^8}{10^{16}}\times\frac{1{,}00000001}{1{,}0000000000000001}\approx 10^{-8}$$

Exercice 4

1. Pour tout n entier , $u_n=\frac{n^2-1}{n^2+1}$

On peut poser $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$, alors pour tout n entier , $u_n=f(n)$

f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tel que le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur l'intervalle $[0;+\infty[$, dans lequel se trouve les entiers naturels non nuls pour lesquels le terme de la suite est défini .
Posons $u(x)=x^2-1$ et $v(x)=x^2+1$

$f=\frac{u}{v}$, donc $f'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Pour tout x réel , $f'(x)=\frac{(2x)\times(x^2+1)-(x^2-1)\times(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

Pour tout x réel , $f'(x)$ est du signe de $4x$.

Donc si, maintenant, on se limite à l'intervalle $[0;+\infty[$, on a le résultat suivant :
$f'(0)=0$ et pour tout x de $[0;+\infty[$, $f'(x)>0$
En conclusion f, est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
Donc (u_n) est strictement croissante
A l'aide de la calculatrice, en utilisant le mode « à la demande » de la table de valeurs, on obtient :

$u_{10}\approx 0{,}9802$, $u_{100}\approx 0{,}9998$, $u_{10000}=0{,}99999998$, $u_{10^8}\approx 1$ et $u_{10^{16}}\approx 1$

Lorsque n devient de plus en plus grand, u_n semble converger vers 1

ATTENTION : la calculatrice ne fournit qu'une valeur approchée des derniers termes calculés .
Quand vous lisez dans le tableau de valeurs: $u_{10^8}=1$, il faut avoir en tête que le calcul exact est :

$$u_{10^8}=\frac{10^{16}-1}{10^{16}+1}=\frac{9999999999999999}{10000000000000001}$$

Pour comprendre, il suffit de remarquer que $u_n=\frac{n^2+1-2}{n^2+1}=1-\frac{2}{n^2+1}$, donc

$$u_{10^8}=1-\frac{2}{10^{16}+1}\approx 1-2\times 10^{-16}=1-0{,}0000000000000002=0{,}9999999999999998$$

2. Pour tout n entier , $u_n=3n^2+4n-5$

On peut poser $f(x)=3x^2+4x-5$, alors pour tout n entier , $u_n=f(n)$
f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur l'intervalle $[0;+\infty[$, dans lequel se trouve les entiers naturels non nuls pour lesquels le terme de la suite est défini .

Pour tout x réel , $f'(x)=6x+4$

Donc si, maintenant, on se limite à l'intervalle $[0;+\infty[$, on a le résultat suivant :
Pour tout x de $[0;+\infty[$, $f'(x)>0$
En conclusion f, est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
Donc (u_n) est strictement croissante
A l'aide de la calculatrice, en utilisant le mode « à la demande » de la table de valeurs, on obtient :

$u_{10}=335$, $u_{100}=30395$, $u_{10000}\approx 3\times 10^8$, $u_{10^8}\approx 3\times 10^{16}$ et $u_{10^{16}}\approx 3\times 10^{32}$

Lorsque n devient de plus en plus grand, u_n prend des valeurs de plus en plus grandes

ATTENTION : la calculatrice ne fournit qu'une valeur approchée des derniers termes calculés .
Pour comprendre, il suffit de remarquer que $u_n=3n^2\times\left(1+\frac{4}{3n}-\frac{5}{3n^2}\right)$, donc

$$u_{10^8}=3\times 10^{16}\times\left(1+\frac{4}{300000000}-\frac{5}{30000000000000000}\right)\approx 3\times 10^{16}$$

3. Pour tout n entier , $u_n=-n^3+6n^2-9n+5$
On peut poser $f(x)=-x^3+6x^2-9x+5$, alors pour tout n entier , $u_n=f(n)$
f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur l'intervalle $[0;+\infty[$, dans lequel se trouve les entiers naturels non nuls pour lesquels le terme de la suite est défini .

Pour tout x réel , $f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x^2-4x+3)=-3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$ quand $x=1$ et $x=3$ et de plus $f'(x)$ est négatif en dehors de l'intervalle $[1;3]$
Donc si on se limite à l'intervalle $[0;+\infty[$, f n'y est pas strictement monotone, mais par contre f est strictement décroissante sur [3;+ ∞ [.
Donc (u_n) est strictement décroissante à partir du rang 3
A l'aide de la calculatrice, en utilisant le mode « à la demande » de la table de valeurs, on obtient :

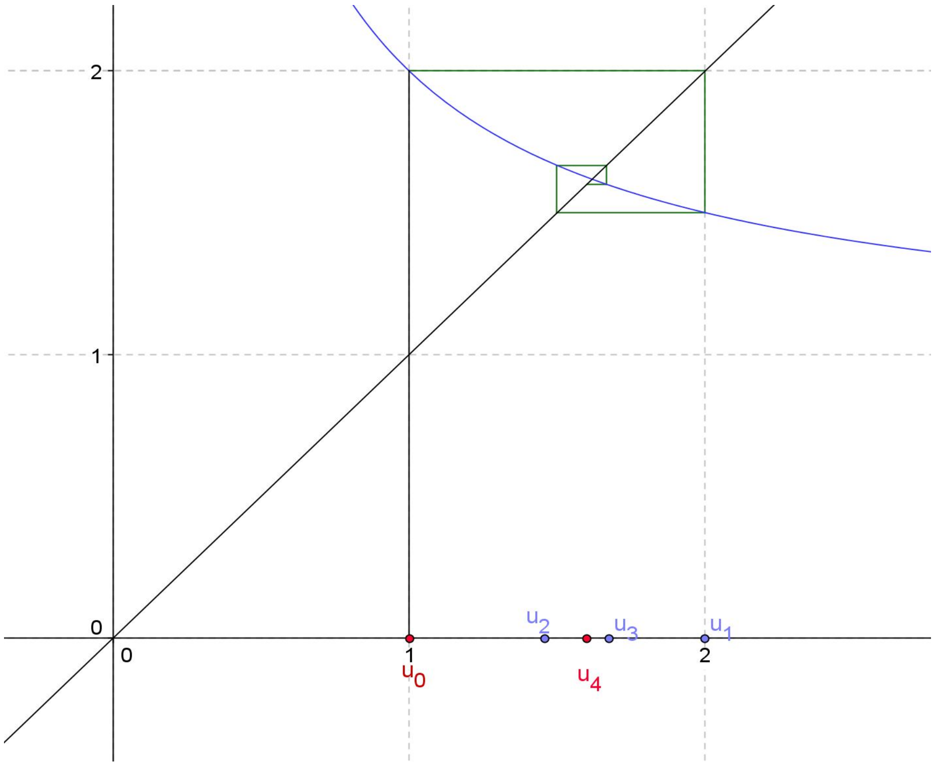
$u_{10}=-485$, $u_{100}=-940895$, $u_{10000}\approx -1\times 10^{12}$, $u_{10^8}\approx -1\times 10^{24}$ et $u_{10^{16}}\approx -1\times 10^{48}$

Lorsque n devient de plus en plus grand, u_n prend des valeurs de plus en plus proches de - ∞

ATTENTION : la calculatrice ne fournit qu'une valeur approchée des derniers termes calculés .
Pour comprendre, il suffit de remarquer que $u_n=3n^2\times\left(1+\frac{4}{3n}-\frac{5}{3n^2}\right)$, donc

$$u_{10^8}=-1\times 10^{24}\times\left(1+\frac{6}{100000000}-\frac{9}{10000000000000000}+\frac{5}{1000000000000000000000000}\right)\approx -1\times 10^{24}$$

Exercice 5



Exercice 6

$u_0=3$ et pour tout entier n , $u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{3+2u_n}$

1. $v_{n+1}=\dfrac{3}{u_{n+1}}=\dfrac{3+2u_n}{u_n}=2+\dfrac{3}{u_n}=2+v_n$, ceci sous réserve que pour tout entier n , $u_n\neq 0$

   Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r=2$ et de premier terme $v_0=\dfrac{3}{u_0}=1$

2. Pour tout entier n , $v_n=v_0+2\times n=1+2n$, d'où $u_n=\dfrac{3}{v_n}=\dfrac{3}{2n+1}$

Une petite vérification s'impose : calculer les premiers termes de la suite (u_n) à partir de la forme explicite et comparer à ceux obtenus avec la définition par récurrence donné initialement

Exercice 7

$u_0=1$ et pour tout entier n , $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n-\dfrac{1}{6}$

3. $v_{n+1}=2u_{n+1}+1=\dfrac{4}{3}u_n-\dfrac{2}{6}+1=\dfrac{4}{3u_n}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}(2u_n+1)=\dfrac{2}{3}v_n$

   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0=2u_0+1=3$

4. Pour tout entier n , $v_n=v_0\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

   Pour tout entier n , $v_n=2u_n+1 \Leftrightarrow 2u_n=v_n-1 \Leftrightarrow u_n=\dfrac{1}{2}v_n-\dfrac{1}{2}$

   Donc pour tout entier n , $u_n=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}-\dfrac{1}{2}$

Une petite vérification s'impose : calculer les premiers termes de la suite (u_n) à partir de la forme explicite et comparer à ceux obtenus avec la définition par récurrence donné initialement.