∾ Baccalauréat S Métropole 20 juin 2013 ∾

EXERCICE 2 PAGE 19 DES ANNALES **1 heure**

1. **a.** On lit $f(1) = y_B = 2$ et pour $f'(1)$, on lit le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1, c'est à dire le coefficient directeur de la droite (CB), qui est horizontale, donc $f'(1) = 0$.

b. La fonction f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$, en tant que quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle (le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle). On a :

$$f'(x) = \dfrac{\left(0 + b \times \dfrac{1}{x}\right) \times x - (a + b\ln x) \times 1}{x^2} = \dfrac{b - (a + b\ln x)}{x^2}$$

Soit effectivement : $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

c. On en déduit : $f(1) = \dfrac{a + b\ln(1)}{1} = a + 0 = a$, or d'après le **1. a.**, $f(1) = 2$, donc $a = 2$.

Du coup, on a $f'(1) = \dfrac{(b-2) - b\ln(1)}{1^2} = b - 2$, or d'après le **1. a.**, $f'(1) = 0$, donc $b = 2$.

2. **a.** On reprend la forme de f' obtenue précédemment, en remplaçant a et b par 2, et on a : $f'(x) = \dfrac{-2\ln x}{x^2} = \dfrac{2}{x^2} \times (-\ln x)$.

Puisque pour tout x élément de $]0~;~+\infty[$, $\dfrac{2}{x^2}$ est un nombre strictement positif, on en déduit que la dérivée de f a bien le même signe que $-\ln x$ pour tout x élément de $]0~;~+\infty[$.

b. Quand x tend vers 0 : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc, par limite d'un produit et d'une somme : $\displaystyle\lim_{x\to 0} 2 + 2\ln x = -\infty$. Comme par ailleurs $\displaystyle\lim_{x\to 0} x = 0^+$, alors, par limite d'un quotient, on a $\displaystyle\lim_{0} f = -\infty$.

Quand x tend vers $+\infty$, on va utiliser la forme de f présentée dans la question : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, d'après la propriété des croissances comparées, et donc par limite d'une somme, puis par produit par 2 : $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$.

c. On peut donc dresser le tableau des variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0

3. **a.** La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0~;~1]$ et 1 est une valeur strictement comprise entre $\displaystyle\lim_{0} f$ et $f(1)$, donc l'application du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'une unique solution à l'équation

$f(x) = 1$ sur l'intervalle $]0~;~1]$, qui sera notée α.

b. Par balayage à la calculatrice, on obtient $f(5) > 1$ et $f(6) < 1$, donc comme la fonction f est continue sur $[5~;~6]$, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'au moins une solution à l'équation $f(x) = 1$

sur l'intervalle [5 ; 6], et puisque l'on avait admis qu'il n'y avait qu'une seule solution β à cette équation sur $]1\ ;\ +\infty[$, cette solution est donc entre 5 et 6. Enfin, puisque ni 5 ni 6 n'ont une image exactement égale à 1, on peut dire que β est strictement entre 5 et 6. Le nombre entier n cherché est donc 5.

4. **a.** On obtient :

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	0,5	0,25	0,375	0,4375	
$f(m)$	$\approx 1,23$	$\approx -3,09$	$\approx 0,10$	$\approx 0,79$	$\approx 1,03$

Le tableau a été complété par la ligne « $f(m) \approx$ » pour montrer les affectations à a ou à b.

Le tableau précédent sera probablement considéré comme correct, mais si on interprète la question très rigoureusement, d'un point de vue algorithmique, on doit supposer que l'étape 1 est l'initialisation, et les étapes de 2 à 5 correspondant aux itérations de 1 à 4. Dans ce cas, pour l'étape 1 n'a pas de valeur m, et la valeur $b-a$ va servir à savoir si l'itération suivante va être utile ou non. Dans ce cas, on va écrire dans la colonne les valeurs en mémoire à la fin de l'itération de la boucle « Tant que », ce qui donne le tableau suivant :

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m		0,5	0,25	0,375	0,4375

b. Cet algorithme renvoie les deux bornes obtenues pour encadrer le nombre α par dichotomie, avec une amplitude au plus égale à 0,1.

c. Pour que l'algorithme donne un encadrement de β avec la même précision, il faut modifier l'initialisation, en mettant :

Affecter à a la valeur 5.

Affecter à b la valeur 6.

Puis, dans le traitement, modifier le test « Si » pour qu'il soit : "Si $f(m) > 1$", afin de prendre en compte la décroissance de f sur l'intervalle [5 ; 6].

(Une autre possibilité serait d'affecter 6 à a et 5 à b, et de modifier le « tant que » pour avoir « tant que $a-b > 0,1$ » et alors a serait la borne haute de l'encadrement, et b la borne basse).

Baccalauréat SAmérique du nord juin 2013

Exercice 4 page 29 des annales **30 minutes**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. **a.** Étudions la limite de f en 0.

On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} 1+\ln(x) = -\infty$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, alors par produit des limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

b. On sait que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$,

D'autre part $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, alors par produit des limites $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$,

On a aussi $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$,et en ajoutant ces deux dernières limites, on obtient :

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

c. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ prouve que l'axe des ordonnées est asymptote verticale .

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ que l'axe des abscisses est asymptote horizontale.à $\mathcal{C}$

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - (1+\ln x)}{x^4} = \frac{-x-2x\ln x}{x^4} = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

b. $-1-2\ln x > 0 \iff \ln x < -\dfrac{1}{2} \iff x < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

Pour tout $x \in]0~;~+\infty[$, $x^2 > 0$ et $f'(x)$ est du signe de $-1-2\ln(x)$.

c. On peut dresser le tableau des variations de la fonction f sachant que :

$f\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{-1}} = \dfrac{\mathrm{e}}{2}$

3. **a.** On a : $f(x) = 0 \iff 1+\ln x = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = \mathrm{e}^{-1}$

Ce qui prouve que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, le point de coordonnées $(\mathrm{e}^{-1};0)$

b. D'après le tableau des variations de f et sachant que $f(\mathrm{e}^{-1}) = 0$.

On en déduit que $f(x) > 0$ sur l'intervalle $]\mathrm{e}^{-1}~;~+\infty[$ et $f(x) < 0$ sur l'intervalle $]0;~\mathrm{e}^{-1}[$.

Baccalauréat SAmérique du nord juin 2012

Exercice 5 page 131 des annales **60 minutes**

PARTIE A. RESTITUTION ORGANISÉE DES CONNAISSANCES

On pose $x = \mathrm{e}^t$.
On a donc $x > 0$,et $\ln(x) = t$.
On a $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^t = +\infty = \lim_{t\to\infty} x$. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t} = 0$
puisque $\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$.

PARTIE B.

1. La fonction g est dérivable d'après les théorèmes généraux.
   $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$.
   Pour $x \geqslant 1$, $2x > 0$ et $\frac{1}{x} > 0$, donc $g'(x) > 0$
   donc la fonction g est strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
2. **a.** La fonction $f(x) = u(x) - \frac{v(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$.
   u et v sont dérivables avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.
   D'après les théorèmes généraux f est dérivable et on a :
   $f'(x) = u'(x) - \frac{v'(x)u(x) - v(x)u'(x)}{u(x)^2} = 1 - \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$
   b. Pour tout $x \in [1\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$ et $x^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$.
   On en déduit que f est strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
   c. $f(x) - x = -\frac{\ln(x)}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
   donc la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   d. Pour tout $x \in [1\,;\,+\infty[$, $\ln(x) \geqslant 0$ et $x > 0$, donc $\frac{\ln(x)}{x} \geqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}$ est située en dessous de la droite $\mathscr{D}$.
3. **a.** Un graphique pour comprendre ?
   La distance $M_kN_k = |f(x) - x| = \frac{\ln(k)}{k} > 0$.

4.

Variables	k est un entier
	d est une variable réelle
Initialisation	$k := 2$; $d := \frac{\ln(k)}{k}$
Traitement	Tant que $d > 10^{-2}$
	Début du tant que
	$k := k+1$;
	$d := \frac{\ln(k)}{k}$;
	Fin du tant que
Sortie	Afficher k

Baccalauréat SAmérique du nord juin 2008

Exercice 7 page 133 des annales **70 minutes**

1. Pour $x \in]1~;~+\infty[$, on a $\ln x > 0$ et on sait que la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$, on en déduit que f est une fonction dérivable sur $]1;+\infty[$, avec :
$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{(\ln x)^2+1}{x(\ln x)^2}$.
Pour $x \in]1~;~+\infty[$, on a $(\ln x)^2 + 1 > 1 > 0$ et $x(\ln x)^2 > 0$, et donc $f'(x) > 0$.
On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.
$\lim_{x\to1} \ln x = 0$, avec $\ln x > 0$ pour $x > 1$, par conséquent $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{1}{\ln x} = +\infty$
et donc $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty$.
$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a. Pour $x \in]1;+\infty[$, on a $f(x) - \ln x = -\frac{1}{\ln x}$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \ln x = 0$.
On en déduit que $(\mathscr{C})$ et Γ sont asymptotes au voisinage de $+\infty$.

b. Pour $x \in]1~;~+\infty[$, on a $\ln x > 0$ et donc $-\frac{1}{\ln x} < 0$,
par conséquent $(\mathscr{C})$ est en dessous de Γ sur $]1~;~+\infty[$.

3. a. La tangente $\mathscr{T}_a$ a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Le point O appartient à $\mathscr{T}_a \iff 0 == f'(a)(0-a) + f(a) \iff f(a) - af'(a) = 0$.

b. Sur $]1;+\infty[$, on a $(\ln x)^2 \neq 0$, donc :
$g(x) = 0 \iff f(x) - xf'(x) = 0 \iff \ln x - \frac{1}{\ln x} - \frac{(\ln x)^2+1}{(\ln x)^2} = 0$
$\iff \frac{(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1}{(\ln x)^2} = 0 \iff (\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0$.

c. La fonction u est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$,
avec $u'(t) = 3t^2 - 2t - 1$.
On a $\Delta = 16$, donc u' admet deux racines distinctes :
$t_1 = \frac{2-4}{6} = -\frac{1}{3}$ et $t_2 = \frac{2+4}{6} = 1$.
De plus, $u'(t) > 0$ pour $t \in]-\infty;-\frac{1}{3}[\cup]1;+\infty[$ et $u'(t) < 0$ pour $t \in]-\frac{1}{3};1[$.

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u(t)$		$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

La fonction u est croissante sur $\left]-\infty~;~-\frac{1}{3}\right[$ et décroissante sur $\left]-\frac{1}{3}~;~1\right[$.
Par conséquent, sur $]-\infty~;~1[$, la fonction u admet un maximum en $-\frac{1}{3}$.
Ce maximum vaut $-\frac{22}{27}$, ainsi l'équation $u(t) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty~;~1[$.
La fonction u est continue et strictement croissante sur $[1~;~+\infty[$, avec $u(1) = -2$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$.
Or $0 \in [-2;+\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $u(t) = 0$ admet une unique solution sur $[1~;~+\infty[$,
par conséquent, l'équation $u(t) = 0$ admet une unique solution, α, sur $\mathbb{R}$.

d. L'équation $(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0$ est équivalente au système $\begin{cases} t^3 - t^2 - t - 1 = 0 \\ t = \ln x \end{cases}$

D'après ce qui précède, $\alpha \geqslant 1 > 0$, donc le réel x, tel que $\ln x = \alpha$, appartient à $]1~;~+\infty[$, ainsi l'équation $(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0$ admet une unique solution sur $]1~;~+\infty[$, il en est alors de même pour l'équation $g(x) = 0$ (d'après **3. b.**), et donc il existe une unique tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ passant par l'origine du repère (d'après **3. a.**).

4. Soit p le coefficient directeur de la tangente T que l'on vient de tracer.
Sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$:
Pour $m \leqslant 0$, l'équation $f(x) = mx$ admet une solution.
Pour $0 < m < p$, l'équation $f(x) = mx$ admet deux solutions.
Pour $m = p$, l'équation $f(x) = mx$ admet une unique solution.
Pour $m > p$, l'équation $f(x) = mx$ n'admet pas de solution.
En traçant la droite Δ, passant par l'origine et par le point de coordonnées $(10~;~f(10))$, de coefficient directeur noté q, on obtient le résultat suivant :
Sur l'intervalle $]1~;~10[$:
Pour $m \leqslant 0$, l'équation $f(x) = mx$ admet une solution.
Pour $0 < m < q$, l'équation $f(x) = mx$ admet une solution unique.
Pour $q \leqslant m < p$, l'équation $f(x) = mx$ admet deux solutions.
Pour $m = p$, l'équation $f(x) = mx$ admet une unique solution.
Pour $m > p$, l'équation $f(x) = mx$ n'admet pas de solution.