Cours de Mathématiques de Première S

Pierre-Alexandre Fournié

2013

Matériel et logiciel

Le matériel

Afin de faire des mathématiques dans de bonnes conditions, les élèves doivent se munir à chaque séance :

- du manuel
- d'un protège document (120 vues)
- du cahier d'exercices (ou d'un classeur)
- d'au moins un stylo, un crayon de papier ou un criterium, et d'une gomme
- d'une calculatrice de modèle `TI 82 Stat`[1]
- d'une règle
- d'un compas
- d'un surligneur

Utilisation de l'informatique

Il est recommandé aux élèves de télécharger et d'installer les 4 logiciels suivants sur un ordinateur à la maison.

1. `Geogebra`, un logiciel de géométrie :
   http ://www.geogebra.org/cms/
2. `Algobox`, un langage simple de programmation algorithmique :
   http ://www.xm1math.net/algobox/
3. `XCas`, un logiciel de calcul formel :
   http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/install_fr
4. `Anki`[2], un outil d'aide à la mémorisation basé sur le système des flash cards :
   http ://ankisrs.net/

Par ailleurs, les élèves qui auraient des questions peuvent m'envoyer un mail à l'adresse :

`pierrealexandre.fournie.prof@gmail.com`

1. c'est le choix du lycée en la matière
2. Ce logiciel peut également s'installer sur un smartphone `Apple` ou `Android`

Liste des principaux symboles utilisés

Indices et lettres prime

Il arrive que l'on écrive un symbole formé de deux caractères, l'un étant de taille inférieure placé en bas à droite. On parle alors d'indice.
Par exemple, lorsqu'on écrit x_a, il faut lire “x indice a”.
On peut également placer une apostrophe à côté d'un caractère. Ainsi, lorsqu'on écrit x', il faut lire “x prime”.

Lettres grecques

On utilisera parfois en cours les lettres grecques suivantes :

Minuscule	Majuscule	Nom de la lettre
α	A	alpha
β	B	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ϵ	E	epsilon
λ	Λ	lambda
μ	M	mu
π	Π	pi
σ	Σ	sigma
θ	Θ	theta
ω	Ω	omega

Première partie

Fonctions

Chapitre 1

Les fonctions trinômiales

« Une civilisation sans la Science, ce serait aussi absurde qu'un poisson sans bicyclette. »

Pierre DESPROGES

Ce cours expose des méthodes de calcul autour des fonctions polynomiales du second degré. Afin d'étudier les propriétés géométriques des courbes représentatives, de calculer les racines (antécédents de 0), de trouver les extrêmums de telles fonctions, on déterminera les écritures les plus adaptées de la fonction et on apprendra à calculer ces formes.

1.1 Rappels

1.1.1 Identités remarquables

Pour tous nombres a et b, on a les identités remarquables suivantes, à connaître par cœur :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.1}$$

$$(a-b)^2 = a^2 + -2ab + b^2 \tag{1.2}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \tag{1.3}$$

1.1.2 Forme développée, forme factorisée

Définition 1.0: forme factorisée, factorisation
On dit qu'une expression est factorisée si elle s'écrit sous la forme d'un produit de termes simples. Factoriser une expression revient à mettre une expression sous forme factorisée.

Définition 1.1: Forme développée, développement
On dit qu'une expression est développée si elle s'écrit sous la forme d'une somme de termes simples. Développer une expression revient à mettre une expression sous forme développée.

<u>*Exercice 0*</u>

Soit la fonction

$$f : x \mapsto 2x^2 + 2x - 4$$

1. *Montrer que, pour tout x, $f(x) = 2(x-1)(x+2)$.*
2. *Complétez la phrase suivante :*
   Pour tout x, la forme factorisée de $f(x)$ est .... et la forme développée de $f(x)$ est ....
3. *Résoudre l'équation $f(x) = 0$ en utilisant la forme appropriée.*

1.2 Fonction trinômiale, étude générale

Nous allons ici donner quelques méthodes permettant de travailler sur la forme des fonctions trinômiales. Selon les besoins :
- — recherche d'extrêmums
- — recherche d'antécédents
- — recherche des solutions de $f(x) = 0$
- — étude du signe de la fonction

on utilisera une forme ou l'autre.

1.2.1 Définition

Définition 1.2: Fonction trinômiale

Dire qu'une fonction f est une fonction trinômiale ou polynômiale du second degré signifie qu'il existe 3 nombres a, b et c avec $a \neq 0$ tels que
pour tout x

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

La condition $a \neq 0$ est capitale. En effet, si $a = 0$, la fonction est affine.

1.2.2 Forme canonique

Cette forme est particulièrement utile pour :
- — l'étude des variations
- — l'étude des propriétés géométriques de la courbe représentative de la fonction
- — la recherche des antécédents

Théorème 1.0: Forme canonique d'une fonction trinômiale

Soient a, b et c 3 nombres fixés, avec $a \neq 0$.
Soit la fonction trinômiale $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$
On pose

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \alpha & = & \frac{-b}{2a} \\ \beta & = & \frac{-b^2+4ac}{4a} \end{array}}$$

Alors, pour tout x :

$$\boxed{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$$

On dit que l'écriture $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est la forme canonique *de f(x).*

Exercice 1

Cet exercice a pour objectif de réaliser la démonstration du théorème sur un cas concret.
Considérons la fonction $g : x \mapsto x^2 - 6x + 4$.

1. *Recopier et compléter la suite d'égalités :*
   Pour tout x *:*

$$\begin{aligned} x^2 - 6x &= x^2 - 2 \times (3x) + 3^2 - \cdots \\ &= (x - \cdots)^2 - \cdots \end{aligned}$$

2. *En déduire la suite d'égalités :*
   Pour tout x *:*

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - 6x + 4 \\ &= (x - \cdots)^2 - \cdots + 4 \\ &= (x - \cdots)^2 - \cdots \end{aligned}$$

Démonstration. Établissons maintenant à la preuve formelle qui revient à reproduire les étapes réalisées sur l'exercice précédent.
Pour tout γ et x, on connaît l'identité remarquable $(x+\gamma)^2 = x^2 + 2\gamma x + \gamma^2$ que l'on peut réécrire de manière équivalente :

$$x^2 + 2\gamma x = (x+\gamma)^2 - \gamma^2 \tag{1.4}$$

Remarquons maintenant que, pour tout x :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x\right) \\ &= a\left(x^2 + 2\tfrac{b}{2a}x\right) \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'équation 1.4 et en identifiant γ avec $\frac{b}{2a}$, on obtient :

$$ax^2 + bx = a\left((x + \tfrac{b}{2a})^2 - (\tfrac{b}{2a})^2\right)$$

Finalement, pour tout x, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left((x + \tfrac{b}{2a})^2 - (\tfrac{b}{2a})^2\right) + c \\ &= a\left(x - \tfrac{(-b)}{2a}\right)^2 - a\tfrac{b^2}{4a^2} + c \\ &= a\left(x - \tfrac{(-b)}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x - \tfrac{(-b)}{2a}\right)^2 + \tfrac{(-b^2+4ac)}{4a} \\ &= a\,(x-\alpha)^2 + \beta \end{aligned}$$

□

Entraînez-vous à chercher des formes canoniques en résolvant l'exercice suivant.

Exercice 2

Trouver les formes canoniques des fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 4 \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - x + \frac{3}{4} \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^2 - 12x + 5 \end{array}$$

Proposition 1.0: Extrêmum et tableau de variation d'une fonction trinômiale

Soient a un nombre non-nul fixé, α et β deux autres nombres fixés.
On considère la fonction

$$g : x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$$

.
On note $\mathcal{P}$ sa courbe représentative. On a alors les propriétés suivantes :

La fonction g prend la valeur β en $x = \alpha$ et cette valeur est un $\begin{cases} \textit{maximum} & \textit{si } a \textit{ est négatif,} \\ \textit{minimum} & \textit{si } a \textit{ est positif.} \end{cases}$

La courbe $\mathcal{P}$ admet un sommet au point S de coordonnées (α, β).

La parabole est $\begin{cases} \textit{tournée vers le haut} & \textit{si } a \textit{ est positif,} \\ \textit{tournée vers le bas} & \textit{si } a \textit{ est négatif.} \end{cases}$ *et elle admet pour axe de symétrie la droite verticale d'équation $x = \alpha$.*

Enfin, le tableau de variation de g s'écrit :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
si $a > 0$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$
si $a < 0$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

Exemples :
Les fonctions

$$h_1 : x \mapsto 2(x - 3)^2 + 4$$
$$h_2 : x \mapsto -3(x + 3)^2 + 1$$

ont des courbes qui vérifient les propriétés suivantes :

fonction	sommet	orientation	axe de symétrie
h_1	(3,4)	vers le haut	$x = 3$
h_1	(-3,1)	vers le bas	$x = -3$

Pour vous entraîner, résolvez les deux exercices suivants :

Exercice 3

On définit les 3 fonctions g_1, g_2, g_3 suivantes :

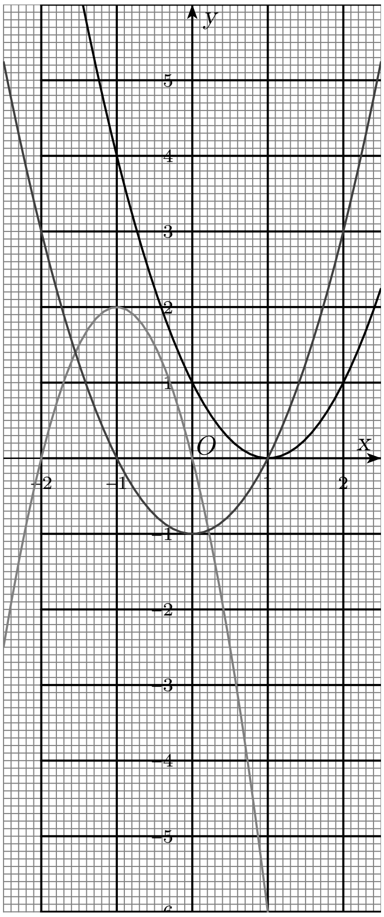
$$\begin{array}{rccl} g_1 : & \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (x-1)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g_2 : & \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -2(x+1)^2+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g_3 : & \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2-1 \end{array}$$

On a représenté plus bas les courbes représentatives de ces fonctions.

1. *Associer chacune des courbes à sa fonction.*
2. *Donner pour chacune des fonctions le type d'extrêmum, sa valeur ainsi que le nombre en lequel cet extrêmum est atteint.*



Exercice 4

On reprend les fonctions g_1, g_2, g_3 de l'exercice précédent.

1. *Dresser les tableaux de variation de ces 3 fonctions*
2. *Recopier et compléter pour chacune des 3 fonctions la phrase suivante :*
   «La courbe de la fonction .... est tournée vers le .... et elle admet un sommet au point de coordonnées ....»

1.2.3 Forme factorisée

Cette forme est particulièrement utile pour :
- la recherche des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
- l'étude du signe de f.

Théorème 1.1: Forme factorisée d'une fonction trinômiale
Soient a, b et c 3 nombres fixés, avec $a \neq 0$, et soit la fonction trinômiale $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$
On pose :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}.$$

Dans le cas où $\Delta \geq 0$ les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont :

$$\boxed{\begin{cases} r_1 & = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})}{2a} \\ r_2 & = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})}{2a} \end{cases}}$$

Toujours dans le cas où $\Delta \geq 0$, on a pour tout x :

$$\boxed{f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)}$$

On dit que $a(x - r_1)(x - r_2)$ est la forme factorisée *de $f(x)$.*
On dit que Δ est le discriminant *de f.*
On dit que r_1 et r_2 sont les racines *de f.*

Dans le cas où $\Delta < 0$, $f(x)$ n'admet pas de forme factorisée et l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solutions.
Dans le cas où $\Delta = 0$, en posant $\boxed{r = -\frac{b}{2a}}$, on a $f(x) = a(x - r)^2$ et l'équation $f(x) = 0$ admet r comme unique solution.

Démonstration. Pour a, b et c fixés avec $a \neq 0$, considérons la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$. D'après le théorème 1.2.2, pour tout x, $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec $\alpha = \frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{-b^2+4ac}{4a}$.
En posant $\Delta = b^2 - 4ac$, on a donc $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$. Partant de là, on peut réécrire :

$$f(x) = a\left((x - \alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

Rappelons d'identité remarquable $\gamma^2 - \epsilon^2 = (\gamma - \epsilon)(\gamma + \epsilon)$ et remarquons que si $\Delta \geq 0$, on a :

$$\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$$

Toujours dans l'hypothèse où $\Delta \geq 0$, en identifiant γ avec $(x - \alpha)$ et ϵ avec $\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, on obtient :

$$(x - \alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = (x - \alpha)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \left((x - \alpha) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left((x - \alpha) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

donc :

$$f(x) = a\left((x - \alpha) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left((x - \alpha) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

En remplaçant α par sa valeur, cela donne finalement bien :

$$\boxed{f(x) = a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}$$

En posant :

$$\boxed{\begin{cases} r_1 & = & \frac{(-b+\sqrt{\Delta})}{2a} \\ r_2 & = & \frac{(-b-\sqrt{\Delta})}{2a} \end{cases}}$$

On obtient bien que r_1 et r_2 sont solutions de $f(x) = 0$.
De plus, on a également $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.
Reste maintenant à examiner le cas où $\Delta < 0$. Nous allons dans ce cas montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions.
En effet, pour tout x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = a(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left((x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$.
L'équation $f(x) = 0$ est donc équivalente à $(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$. Dans le cas où $\Delta < 0$, on a $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$. Ainsi : $(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et donc l'équation $(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ n'a pas de solutions. Ainsi, $f(x) = 0$ n'a pas de solutions. $\square$

1.2.4 Étude du signe

Pour étudier le signe de f en fonction de x, on dispose de la proposition suivante.

Proposition 1.1: Étude du signe d'une fonction trinômiale
Soient a, b et c 3 nombres fixés, avec $a \neq 0$, et soit la fonction trinômiale $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.
On calcule le discriminant de f, $\Delta = b^2 - 4ac$. En fonction du signe de Δ, on a les résultats suivants.

1. *Si $\Delta < 0$, pour tout x, $f(x)$ est du signe de a.*
2. *Si $\Delta \geq 0$, on pose $r_1 = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})}{2a}$ et $r_2 = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})}{2a}$, et dans ce cas :*
   — *f est du signe opposé à celui de a sur l'intervalle $[r_1, r_2]$ ou $[r_2, r_1]$*
   — *f est du signe de a ailleurs.*

Entraînez-vous à résoudre les exercices suivants :

Exercice 5

On cherche à trouver tous les nombres x qui vérifient $x^2 \geq 2x$.

1. *Montrer que cette inéquation est équivalente à $x(x-2) \geq 0$.*
2. *Dresser le tableau de signe de la fonction $x \mapsto x(x-2)$.*
3. *En déduire les solutions de l'inéquation.*

Exercice 6

En utilisant la méthode décrite ci-dessous, résoudre les inéquations suivantes :

(a) $x^2 - 2x \geq 3$

(b) $x^2 - 3x < 1$

(c) $3x^2 - x + 1 > -2x$

Pour résoudre $f(x) \geq g(x)$ où f et g sont 2 fonctions trinômiales, on résout de manière équivalente $f(x) - g(x) \geq 0$ puis on factorise $f(x) - g(x)$.

1.2.5 Résumé et formulaire

Soient 3 nombres a, b et c avec $a \neq 0$ et la fonction trinômiale $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.
Dans un premier temps, on calcule le discriminant de f, $\Delta = b^2 - 4ac$.
Le tableau suivant donne les formes canonique et factorisée de f ainsi que leurs principales utilisations :

Nom de la forme	Condition sur Δ	Écriture	Usage
canonique	non	$a(x - \frac{(-b)}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$	variations, propriétés géométriques
factorisée	$\Delta \geq 0$	$a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$	signe, racines (antécédents de 0)

Chapitre 2

Généralités sur l'étude des fonctions

« C'était bien plus agréable à la maison, pensa la pauvre Alice ; on ne grandissait pas et on ne rapetissait pas à tout bout de champ, et il n'y avait pas de souris, ni de lapin, pour vous donner sans cesse des ordres. Je regrette presque d'être entrée dans ce terrier... Et pourtant... et pourtant... le genre de vie que je mène ici, est vraiment très curieux !»

Lewis CARROLL, Alice au Pays des Merveilles

Ce cours rappelle les notions de sens de variation et d'extrêmums. On essaiera ensuite d'étendre ces propriétés à la fabrication de fonctions composites.

2.1 Rappels

2.1.1 Sens de variation

On dira qu'une fonction f est *croissante* lorsqu'elle *conserve l'ordre*, c'est à dire lorsque les images de deux nombres sont toujours rangées dans le même ordre que ces deux nombres. De même, une fonction *décroissante* sera une fonction qui *inverse l'ordre*.
Nous donnons plus bas les définitions mathématiques officielles.

Définition 2.0: Fonction croissante, décroissante
Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Soit J un sous-intervalle de D.
On dit que f est croissante sur J lorsque pour tout u et v de J :

$$u \geq v \Longrightarrow f(u) \geq f(v)$$

On dit que f est décroissante sur J lorsque pour tout u et v de J :

$$u \geq v \Longrightarrow f(u) \leq f(v)$$

À partir de maintenant, nous noterons «pour tout» avec le symbole $\forall$ et «il existe» avec le symbole $\exists$.

Le contraire de «f est croissante» n'est pas «f est décroissante», c'est «f n'est pas croissante».

Exercice 0

Soit la fonction $f_1 : x \mapsto -2x+3$.
Soient u *et* v *deux réels tels que* $u \leq v$

1. *En partant de* $u \leq v$ *et par implications successives, prouver que* $f(u) \geq f(v)$.
2. *Conclure quand au sens de variation de* f_1 *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Soient a *et* b *2 nombres fixés. Soit la fonction* $f_2 : x \mapsto ax+b$.
Soient u *et* v *deux réels.*

1. *Calculer* $f_2(v) - f_2(u)$.
2. *On suppose ici que* $a > 0$ *et que* $v \geq u$. *Que dire du signe de* $f(v) - f(u)$ *? Conclure quand au sens de variation de* f_2 *sur* $\mathbb{R}$.
3. *On suppose ici que* $a < 0$ *et que* $v \geq u$. *Que dire du signe de* $f(v) - f(u)$ *? Conclure quand au sens de variation de* f_2 *sur* $\mathbb{R}$.
4. *Énoncer la proposition donnant le sens de variation d'une fonction affine, que nous venons de démontrer.*

2.1.2 Extrêmums

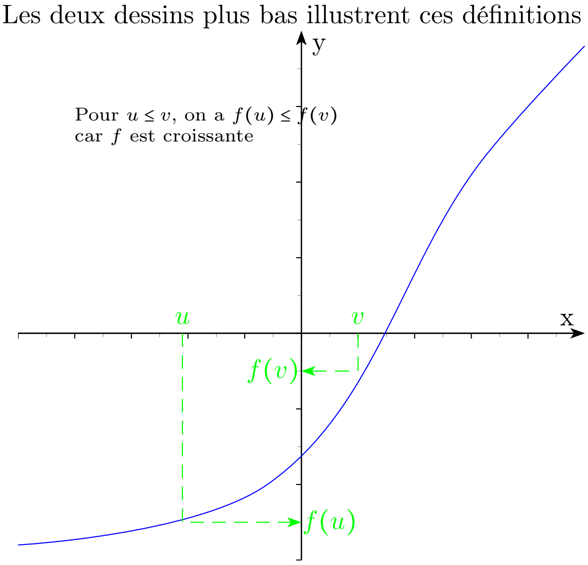
Définition 2.1: Maximum, minimum

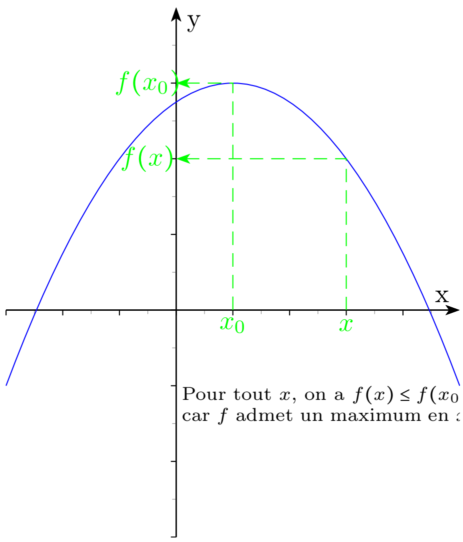
Soit $\mathcal{P}$ *une partie de* $\mathbb{R}$, f *une fonction définie par :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Soit x_0 *un nombre de* $\mathcal{P}$.
On dit que f *atteint son maximum en* x_0 *lorsque pour tout* x *de* $\mathcal{P}$, $f(x) \leq f(x_0)$.
On dit que f *atteint son minimum en* x_0 *lorsque pour tout* x *de* $\mathcal{P}$, $f(x) \geq f(x_0)$.

Les deux dessins plus bas illustrent ces définitions :





Exercice 2

Soit la fonction $f_3 : x \mapsto (x-1)^2 + 3$.
Nous allons redémontrer tous les éléments concernant l'extrêmum de f_3.

1. *Calculer $f_3(1)$.*
2. *Prouver que, pour tout x, $f_3(x) \geq f_3(1)$.*
   Indication: Que dire du signe de $f_3(x) - f_3(1)$?
3. *Conclure.*

Exercice 3

a, α et β désignent 3 nombres réels fixés avec $a \neq 0$.
Soit la fonction $f_4 : x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$.

1. *Calculer $f_4(\alpha)$.*
2. *Lorsque $a > 0$, pour tout x, quel est le signe de $f_4(x) - f_4(\alpha)$?*
3. *Lorsque $a < 0$, pour tout x, quel est le signe de $f_4(x) - f_4(\alpha)$?*
4. *Énoncer la proposition donnant l'extrêmum d'une fonction trinômiale sous forme canonique, que nous venons de démontrer.*

2.2 Fonctions de référence

2.2.1 Une proposition très utile

Proposition 2.0: Croissance de la fonction carrée
Soient u et v 2 nombres. Dans le cas où u et v sont positifs :

$$\boxed{u > v \iff u^2 > v^2}$$

Dans le cas où u et v sont négatifs :

$$\boxed{u > v \iff u^2 < v^2}$$

Démonstration. On fera une preuve partielle uniquement sur le cas u et v négatifs.
Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} u^2 < v^2 &\iff u^2 - v^2 < 0 \\ &\iff (u-v)(u+v) < 0 \text{ Or } u+v \leq 0 \text{ car } u \text{ et } v \text{ sont négatifs.} \end{aligned}$$

Ainsi, $u^2 < v^2 \implies u - v > 0$.
Réciproquement, si $u-v > 0$ alors u et v sont distincts donc $u+v < 0$ et ainsi, $(u-v)(u+v) < 0$. Finalement on a bien :

$$\begin{aligned} u^2 < v^2 &\iff u - v > 0 \\ &\iff u > v \end{aligned}$$

□

2.2.2 La fonction racine

On définit la fonction racine par :

$$r : \begin{array}{ccl} [0;+\infty[& \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \text{l'unique nombre } y \text{ positif tel que } y^2 = x \end{array}$$

Cette fonction a pour tableau de variation :

x	0	$+\infty$
r	0	$\nearrow$

Sa courbe représentative est une demi-parabole.

Démonstration. Montrons que la fonction r est croissante. Pour tout x et y nombres réels positifs, $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont positifs.
Or, d'après la proposition 2.2.1 pour tous nombres u et v positifs, $u \geq v \iff u^2 \geq v^2$.
Ainsi, pour $u = \sqrt{x}$ et $v = \sqrt{y}$, $u^2 \geq v^2 \iff u \geq v$, soit :
$x \geq y \iff \sqrt{x} \geq \sqrt{y}$ donc r est bien croissante. □

Proposition 2.1: Propriétés de la fonction racine
Soient x et y deux nombres positifs. On a :

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$$

$$\textit{Dans le cas où } x \neq 0 \ \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Démonstration. Se démontre en utilisant le fait que $(uv)^2 = u^2v^2$. □

La plupart du temps, $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
Considérez par exemple : $\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq \sqrt{1} + \sqrt{1}$

2.2.3 La fonction valeur absolue

Définition 2.2: Valeur absolue d'un nombre
Soit x un nombre.
La valeur absolue de x est le nombre noté $|x|$ qui vaut

$$\boxed{\begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

Dit autrement, c'est le plus grand des deux nombres x et $-x$.

Exemples :
$|-3| = 3$
$|\pi| = \pi$

Proposition 2.2: Quelques propriétés de la valeur absolue
Pour tout x et y :

$$\sqrt{x^2} = |x|$$
$$|xy| = |x||y|$$
$$\textit{Dans le cas où } x \neq 0,\ \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$$

Démonstration. Nous allons prouver uniquement la première égalité car toutes les autres s'en déduisent aisément.

(Cas n° 1) Si $x \geq 0$. On a $x^2 = x^2$ donc x est bien l'unique nombre positif tel que $x^2 = x^2$. Ainsi, par définition de la racine, $\sqrt{x^2} = x$. Or $|x| = x$ car $x \geq 0$.
Finalement, $\sqrt{x^2} = x = |x|$.

(Cas n° 2) Si $x < 0$. On a $(-x)^2 = x^2$. Or $-x > 0$ donc $-x$ est l'unique nombre positif tel que $(-x)^2 = x^2$. Ainsi, par définition de la racine, $\sqrt{x^2} = -x$. Or $|x| = -x$ car $x < 0$.
Finalement, $\sqrt{x^2} = -x = |x|$.

□

2.2.4 Rappel : la fonction inverse

Proposition 2.3: Sens de variation de la fonction inverse
Soit la fonction

$$v : \begin{array}{ccc}]-\infty;0[\cup]0;+\infty[& \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

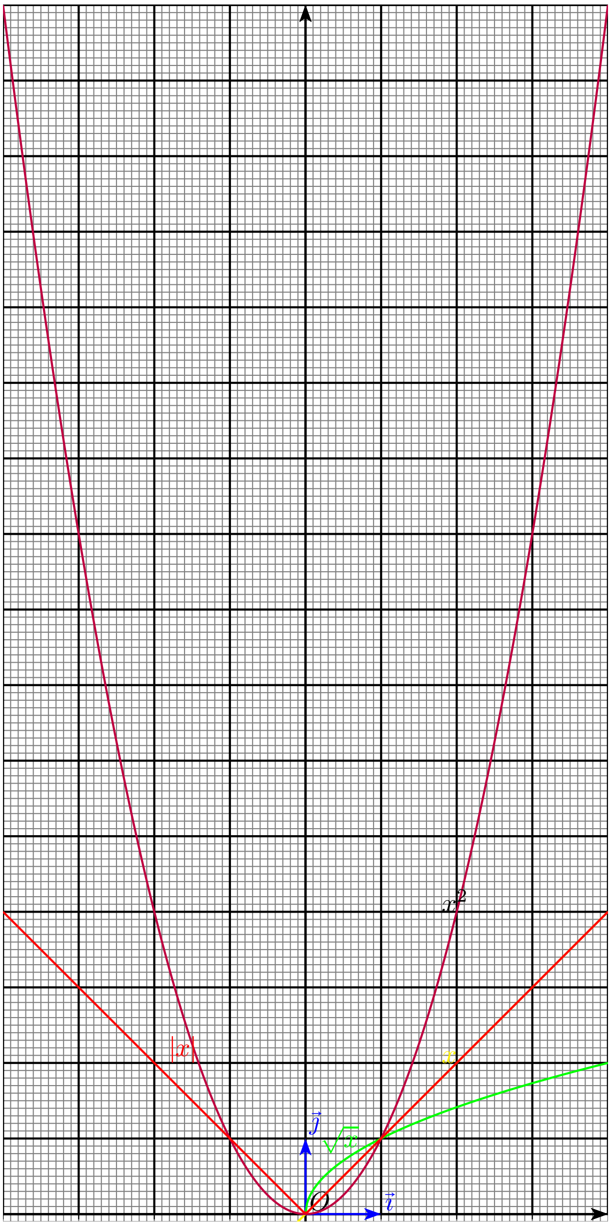
Alors la fonction v est décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

⚠ Attention, dire que v est décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ n'entraîne pas que v soit décroissante sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

Exercice 4

En utilisant un contre-exemple prouver la remarque précédente.

2.2.5 Courbes représentatives des fonctions usuelles sur $]0;+\infty[$



2.2.6 Inégalités à connaître

Proposition 2.4: Inégalités
Pour tout x dans l'intervalle $]0;1]$, on a

$$x^2 \leq x \leq \sqrt{x} \leq \frac{1}{x}$$

Pour tout $x \geq 1$, on a

$$x^2 \geq x \geq \sqrt{x} \geq \frac{1}{x}$$

Démonstration. Avant de commencer la démonstration, faisons 2 petites remarques :

(Remarque 0) Si a et b sont deux nombres strictement positifs alors

$$a \geq b \text{ est équivalent à } \frac{a}{b} \geq 1$$

(Remarque 1) Si $x > 0$ alors

$$\frac{1}{x} > 0$$
$$\sqrt{x} > 0$$
$$x^2 > 0$$
$$x^3 > 0$$

Partant de ces 2 remarques, montrer que

$$x^3 \geq x^2 \geq x \geq \sqrt{x} \geq \frac{1}{x}$$

est équivalent à montrer que :

$$\frac{x^3}{x^2} \geq 1 \text{ et } \frac{x^2}{x} \geq 1 \text{ et } \frac{x}{\sqrt{x}} \geq 1 \text{ et } \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{x}} \geq 1$$

Or :

$$\frac{x^3}{x^2} = x$$
$$\frac{x^2}{x} = x$$
$$\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$
$$\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{x}} = x\sqrt{x}$$

Ainsi, toutes ces inéquations sont vraies si et seulement si $x \geq 1$. □

2.3 Opérations sur les fonctions

Définition 2.3: Monotonie de fonction
On dit qu'une fonction f est monotone sur un intervalle I lorsqu'elle a un sens de variation constant sur l'intervalle I.

Proposition 2.5: Addition et multiplication de fonctions

Soit I un intervalle, f et g deux fonctions définies sur I.
Soit λ un nombre réel.
On définit la fonction $f+g$ sur I par

$$\begin{array}{rccl} f+g: & I & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

On définit la fonction λf sur I par

$$\begin{array}{rccl} \lambda f: & I & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

On a les propriétés suivantes :
Si f et g sont croissantes alors $f+g$ est croissante.
Si f et g sont décroissantes alors $f+g$ est décroissante.
Si f est croissante et $\lambda \geq 0$ alors λf est croissante.
Si f est décroissante et $\lambda \geq 0$ alors λf est décroissante.
Si f est croissante et $\lambda \leq 0$ alors λf est décroissante.
Si f est décroissante et $\lambda \leq 0$ alors λf est croissante.

Démonstration. Montrons cette proposition partiellement, les autres cas étant du même principe. Supposons que f et g sont croissantes et que $\lambda \leq 0$. Soient u et v 2 nombres de I tels que $u \leq v$. Comme f et g sont croissantes, on a :

$f(u) \leq f(v)$
$g(u) \leq g(v)$. En additionnant ces 2 inégalités :
$f(u)+g(u) \leq f(v)+g(v)$. Ce qui montre que $f+g$ est croissante. Mais on a aussi, puisque $\lambda \leq 0$:
$\lambda f(u) \geq \lambda f(v)$. Ce qui montre que λf est décroissante.

□

Proposition 2.6: Inversion de fonction

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I qui est de signe constant et qui ne s'annule pas sur I.
On définit la fonction $\frac{1}{f}$ par

$$\begin{array}{rccl} \frac{1}{f}: & I & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{f(x)} \end{array}$$

Si f est croissante alors $\frac{1}{f}$ est décroissante.
Si f est décroissante alors $\frac{1}{f}$ est croissante.

<u>*Exercice 5*</u>

En utilisant votre connaissance de la fonction inverse, démontrer cette proposition.

Proposition 2.7: Racine de fonction
Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I qui est positive sur I.
On définit la fonction $\sqrt{f}$ par

$$\begin{array}{rccc} \sqrt{f}: & I & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{f(x)} \end{array}$$

Si f est croissante alors $\sqrt{f}$ est croissante.
Si f est décroissante alors $\sqrt{f}$ est décroissante.

Exercice 6

En utilisant vos connaissances de la fonction racine, démontrez cette proposition.

Exercice 7

On définit la fonction :

$$\begin{array}{rccc} g_1: &]\frac{2}{3};+\infty[& \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{3x-2}} - x \end{array}$$

1. *Recopier l'algorithme et le compléter :*
   $x \mapsto 3x-2 \mapsto \cdots \mapsto \cdots \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x-2}}$
2. *Quel est le sens de variation de g_1 sur son ensemble de définition ?*

Utiliser ce qui vient d'être fait pour résoudre l'exercice suivant :

Exercice 8

On donne les 3 nombres :

$$A = \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{3}-2}} - \sqrt{3}$$
$$B = \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{4}-2}} - \sqrt{4}$$
$$C = \frac{1}{\sqrt{3\sqrt{2}-2}} - \sqrt{2}$$

Ranger ces 3 nombres par ordre croissant.

Chapitre 3

Suites

« Caminante no hay camino,
se hace camino al andar»

Antonio Machado

3.1 Première approche

3.1.1 A propos de la numérotation

Lorsque l'on attribue des numéros à un ensemble (par exemple aux 5 doigts d'une main ou bien aux élèves d'une classe), on réalise un lien entre les éléments de l'ensemble et les nombres entiers.
Cette activité de comptage [1] se pratique depuis la préhistoire comme en témoignent des os et des morceaux de bois qui comportent des encoches et que l'on a retrouvés lors de fouilles. Les paléontologues [2] ont d'ailleurs émis l'hypothèse que ces objets avaient pour utilité de répertorier le nombre de bêtes d'un troupeau ou bien le nombre de bêtes tués lors de campagnes de chasse.
Dans toute la suite, on utilisera sans le savoir des propriétés des nombres entiers. On supposera notamment que l'on peut attribuer aux éléments de certains ensembles infinis des numéros qui se suivent, exactement de la même manière que l'on peut numéroter les bêtes d'un troupeau de moutons.
Dans toute la suite, on notera $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers.

3.1.2 Suite : définition et premiers exemples

Définition 3.0: Suite, rang, terme, terme initial
Un ensemble infini d'éléments munis de numéros entiers qui se suivent s'appelle une suite. On peut faire des suites de nombres mais pas seulement.
Le numéro correspondant à un élément d'une suite s'appelle son rang.
Parler de la suite u, c'est parler de cette ensemble d'éléments numérotés.
Pour n entier, on notera u_n l'élément de rang n. On parlera de terme de rang n. *Le premier terme d'une suite s'appelle son* terme initial. *En règle générale, il est de rang* 0.

Définition 3.1: Suite numérique
Une suite numérique est une suite de nombres.

1. les mathématiciens parlent plutôt de dénombrement
2. scientifiques qui étudient la préhistoire

3.1.3 Plusieurs manières de définir une suite

On peut définir une suite de nombres en fixant le premier terme puis en fixant une relation entre un terme et le terme suivant. Dans ce cas, on parlera d'une définition par récurrence.
On peut également définir une suite explicitement pour chaque terme.

Définition 3.2: Définition par une récurrence d'ordre 1

Une suite u est définie par une récurrence d'ordre 1 lorsqu'on définit :
- *son premier terme*
- *la relation reliant, pour tout n, le terme de rang n et le terme de rang $n+1$*

Prenons un exemple concret de définition de suite par récurrence. Ainsi, on définit la suite u par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{1+u_n}, \text{ pour tout } n \text{ entier} \end{cases}$$

Ainsi, c'est la suite des termes $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{1+\frac{1}{2}}; \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}; \cdots$

Dans le cas d'une définition par récurrence, pour calculer le terme de rang 100, il faut avoir calculé tous les termes précédents.

Pour calculer les termes d'une suite définie par récurrence, on peut utiliser un algorithme contenant une boucle `pour`. Considérons la syntaxe suivante pour expliquer l'usage du `pour`

```
Pour i allant de 1 à 100:
    Afficher le message "Bonjour"
Fin pour
```

Cet algorithme va afficher 100 fois de suite le message «Bonjour». À chaque passage dans la boucle, la variable i augmente de 1. Cette variable n'a pas de rôle particulier dans le petit algorithme écrit plus haut mais il existe certains algorithme dans laquelle est a une utilité. Ainsi, l'algorithme suivant va afficher les valeurs des carrés des 10 premiers entiers naturels :

```
Pour i allant de 1 à 10:
    Calculer et afficher la valeur de i^2
Fin pour
```

Muni de la syntaxe d'une boucle `pour`, nous allons nous entraîner à définir un algorithme de calcul d'une suite définie par récurrence.

<u>Exercice 0</u>

Soit la suite r définie par

$$\begin{cases} r_0 &= 1 \\ r_{n+1} &= \frac{r_n^2+2}{2r_n}, \text{ pour tout } n \text{ entier} \end{cases}$$

Écrire un algorithme qui permet de calculer r_{100}.

Définition 3.3: Définition explicite

Une suite u est définie explicitement lorsqu'il existe une fonction f telle que :

$$\text{pour tout } n \text{ entier, } u_n = f(n)$$

Là encore, prenons un exemple concret de définition explicite d'une suite et considérons la suite v définie par :

$$\text{pour tout } n \text{ entier, } v_n = \frac{1}{n+1}$$

C'est la suite des termes $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \cdots$
Dans ce cas, pour calculer le terme de rang 12842, il n'est pas nécessaire d'avoir à calculer tous les termes précédents. On obtient $v_{12842} = \frac{1}{12843}$

> Il est donc, a priori, plus facile de calculer le terme de rang 1000 d'une suite définie explicitement plutôt que d'une suite définie par récurrence.

Entraînons-nous dès à présent à manipuler les définitions de suites :

Exercice 1

Pour les suites suivantes, dire si elles sont définies par récurrence ou explicitement et calculer les 4 premiers termes :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & 3u_n - 2, \textit{ pour tout } n \textit{ entier} \end{cases}$$

$$\textit{pour tout } n \textit{ entier, } v_n = \sqrt{n}$$

$$\begin{cases} w_0 & = & 1 \\ w_{n+1} & = & w_n + 2, \textit{ pour tout } n \textit{ entier} \end{cases}$$

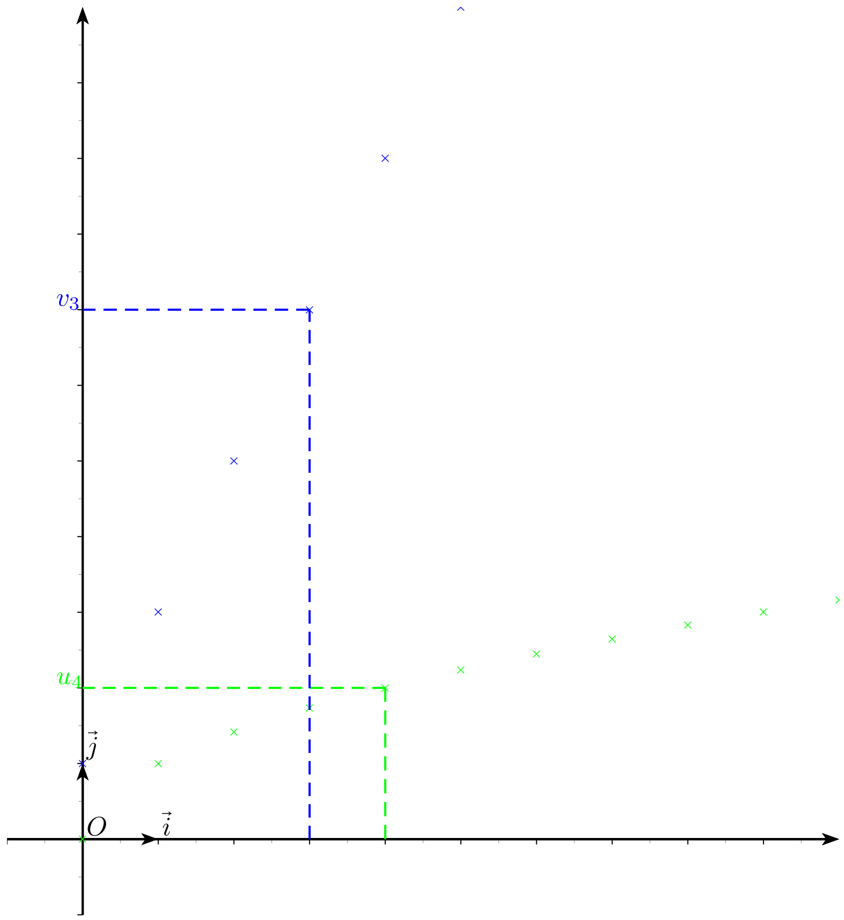
3.2 Représentation graphique de suites et sens de variation

3.2.1 Représentation graphique

On peut représenter graphiquement une suite numérique u de la même manière qu'une fonction. Pour chaque élément u_n, on place un point dans le plan :
- d'abscisse le rang de u_n, c'est à dire n
- d'ordonnée la valeur de u_n

Prenons deux exemples de représentation graphique :

1. En vert, on a représenté la suite u des nombres tels que pour tout n, $u_n = \sqrt{n}$.
2. En bleu, on a représenté la suite v des nombres impairs.



3.2.2 Sens de variation

Définition 3.4: Suite croissante
Une suite u est croissante lorsque, pour tout n :
$u_{n+1} \geq u_n$.

Définition 3.5: Suite décroissante
Une suite u est décroissante lorsque, pour tout n :
$u_{n+1} \leq u_n$.

3.3 Suites arithmétiques

3.3.1 Définition

Définition 3.6: Suite arithmétique de raison a
Soit u une suite de nombres. On dit que cette suite est arithmétique *lorsque, il existe un nombre a, tel que pour tout n, $u_{n+1} = u_n + a$.*
On dit que a est la raison *de la suite u.*

Exercice 2

On définit la suite u par

$$\begin{cases} u_0 & = & 5 \\ u_{n+1} & = & u_n - 2, \text{ pour tout } n \text{ entier} \end{cases}$$

Cette suite est donc arithmétique de raison -2 puisque, pour tout n,
$u_{n+1} = u_n$**-2**

1. *Calculer les 5 premiers termes de cette suite et placer ces termes dans un repère.*

   Indication: Chaque terme u_n sera représenté par un point d'abscisse n et d'ordonnée u_n
2. *Déterminer l'équation de la droite sur laquelle ces points sont alignés.*
3. *Conjecturer une formule donnant explicitement, pour tout n, la valeur de u_n.*

3.3.2 Quelques propriétés des suites arithmétiques

Dans certains cas, lorsque l'on connaît la définition par récurrence d'une suite, il est possible d'en déduire une formule explicite, plus commode à utiliser.

Proposition 3.0: Formule explicite d'une suite arithmétique
u est une suite arithmétique de raison a si et seulement si, il existe un nombre b, tel que, pour tout n entier, $u_n = b + an$.
De plus, dans ce cas, b est le terme de rang 0 de la suite u.

Démonstration. Si il existe b tel que, pour tout n entier, $u_n = b + an$ alors

$$\begin{aligned} u_n + a &= b + an + a \\ &= b + a(n+1) \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc la suite est bien une suite arithmétique de raison a.
La réciproque est plus difficile à prouver et fait appel à la notion de raisonnement par récurrence.

□

Exercice 3

Soit la suite d définie par

$$\begin{cases} d_0 & = & \frac{4}{3} \\ d_{n+1} & = & d_n - 5, \text{ pour tout } n \text{ entier} \end{cases}$$

1. *Écrire la formule explicite donnant d_n pour tout entier n.*
2. *En déduire que la représentation graphique des termes de d forme un ensemble de points alignés sur une droite dont on précisera l'équation.*

Proposition 3.1: Sens de variation des suites arithmétiques
Soit u une suite arithmétique de raison a.
u est croissante si et seulement si $a \geq 0$.
u est décroissante si et seulement si $a \leq 0$.

Exercice 4

Prouver la proposition précédente.

Proposition 3.2: Nombres triangulaires
Soit $n \geq 1$ un nombre entier.
On pose $T_n = 1 + \cdots + n$ la somme des n premiers entiers naturels.
Alors $T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration. Nous allons faire une preuve géométrique de cette proposition. □

Proposition 3.3: Somme des termes d'une suite arithmétique
Soit u une suite arithmétique de raison a. Soient n et p deux entiers avec $p \geq 1$.
Alors, on a

$$u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} = (p+1) \cdot u_n + T_p \cdot a$$

où T_p désigne la somme des p premiers entiers naturels.

3.4 Suites géométriques

3.4.1 Définition

Définition 3.7: Suite géométrique de raison q

Soit u une suite de nombres. On dit que cette suite est géométrique lorsqu'il existe un nombre q, tel que pour tout n, $u_{n+1} = qu_n$.
On dit que q est la raison *de la suite u.*

Exercice 5

On place une population de 10^3 bactéries sur un substrat et on laisse cette population se développer librement. On estime que la population augmente de 20% par jour.
On note P_n la population après le n^e jour de culture.
On posera donc $P_0 = 10^3$.

1. *Déterminer P_1, P_2, P_3.*
2. *Établir une relation de récurrence entre P_n et P_{n+1}. En déduire la nature de la suite et sa raison.*
3. *Conjecturer une formule donnant, pour tout n, P_n en fonction de n.*

3.4.2 Quelques propriétés des suites géométriques

Ici aussi, on dispose d'une formule explicite connaissant la relation de récurrence et la raison.

Proposition 3.4: Formule explicite d'une suite géométrique

u est une suite géométrique de raison q si et seulement si, il existe un nombre b, tel que, pour tout n entier, $u_n = bq^n$.
De plus, pour $q \neq 0$, b est le terme de rang 0 de la suite u.

Proposition 3.5: Sens de variation des suites géométriques à raison positive

Soit u une suite géométrique de raison $q \geq 0$.
On dispose des résultats suivants concernant le sens de variation de la suite u :

(Cas n° 1) Si $u_0 \geq 0$
- *(Sous-cas n° 1) Si $q \in [0;1]$, la suite u est décroissante.*
- *(Sous-cas n° 2) Si $q > 1$, la suite u est croissante.*

(Cas n° 2) Si $u_0 < 0$
- *(Sous-cas n° 1) Si $q \in [0;1]$, la suite u est croissante.*
- *(Sous-cas n° 2) Si $q > 1$, la suite u est décroissante.*

Démonstration. Nous allons démontrer les résultats dans le cas n° 2.
Le cas $q = 0$ est trivial. En effet, dans ce cas la suite est effectivement croissante puisqu'elle vaut $u_0 < 0$ au premier terme puis 0 pour tous les termes suivants. Nous nous plaçons donc dans le cas où $q > 0$.
Nous savons que, pour tout n, $u_n = u_0q^n$.
Or q^n est positif puisque q est positif. Ainsi, pour tout n, $u_n \leq 0$. De plus :
$u_{n+1} - u_n = qu_n - u_n = (q-1)u_n$. Ainsi $u_{n+1} - u_n$ est du signe de u_n lorsque $q > 1$ et du signe de $-u_n$ lorsque $q \in]0;1]$. On retrouve bien les résultats attendus puisqu'ici, $u_n \leq 0$ pour tout n. □

Proposition 3.6: Somme des termes d'une suite géométrique

Soit une suite géométrique u de raison q. Soient n et p deux entiers avec $p \geq 1$.
On dispose de la formule suivante :

$$\boxed{u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} = \begin{cases} u_n \left(\frac{q^{p+1}-1}{q-1} \right) & \text{pour } q \neq 1 \\ (p+1)u_n & \text{pour } q = 1 \end{cases}}$$

Démonstration. Nous allons prouver cette formule de manière très simple dans le cas où $q \neq 1$: Notons $S_{n,p} = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}$. Nous avons :

$$\begin{array}{ccccccccc} S_{n,p} & = & u_n & +qu_n & +q^2 u_n & +q^3 u_n & +\cdots & +q^p u_n & \\ qS_{n,p} & = & & +qu_n & +q^2 u_n & +q^3 u_n & +\cdots & +q^p u_n & +q^{p+1} u_n \\ qS_{n,p} - S_{n,p} & = & -u_n & +qu_n - qu_n & +q^2 u_n - q^2 u_n & +q^3 u_n - q^3 u_n & +\cdots & +q^p u_n - q^p u_n & +q^{p+1} u_n \end{array}$$

Ainsi :
On obtient par différence :

Finalement : $(q-1)S_{n,p} = (q^{p+1} - 1)u_n$. D'où :

$S_{n,p} = \frac{(q^{p+1}-1)}{q-1} u_n$. □

Exercice 6

Dans les cas suivants déterminer les valeurs de u_5, u_{10}, préciser, lorsque c'est possible, le sens de variation de u ainsi que la valeur de $u_5 + u_6 + \cdots + u_10$.

a) *u est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison -3.*

b) *u est une suite arithmétique de raison -21 et telle que $u_{11} = 9$*

c) *u est une suite arithmétique telle que $u_6 = 12$ et $u_9 = 16$*

d) *u est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.*

e) *u est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et telle que $u_6 = 123$*

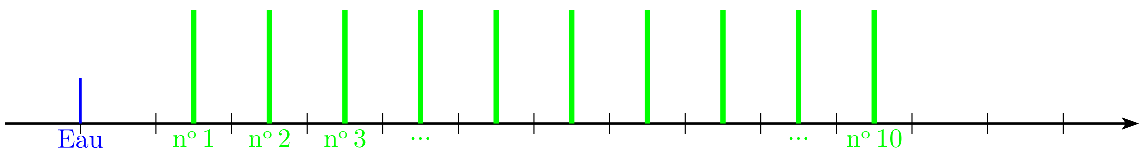
f) *u est une suite géométrique telle que $u_6 = 12$ et $u_9 = 16$*

Indication: On admettra que pour tout réel y, il existe un unique antécédent de y par la fonction $x \mapsto x^3$. Cet antécédent s'obtient à la calculatrice avec la formule `y^(1/3)`

Exercice 7

Un jardinier doit arroser une haie de 10 arbustes parfaitement alignés.
Chaque arbuste est distant de 1m de son voisin et le premier arbuste de la haie est distant de 1,50 du point d'eau.
Enfin, on estime qu'il faut exactement le contenu d'un arrosoir pour chaque arbuste, de sorte que le jardinier doit faire un aller-retour par arbuste.
On note D_n la distance correspondant à l'aller-retour entre le n^e arbuste et le point d'eau.

1. *Déterminer la valeur de D_1 ainsi que la relation liant D_n et D_{n+1}.*
2. *En déduire la formule donnant D_n explicitement.*
3. *Quelle distance doit-il parcourir pour arroser l'ensemble de la haie ?*



Chapitre 4

Dérivation et applications

« WAR IS PEACE
FREEDOM IS SLAVERY
IGNORANCE IS STRENGTH»

Slogan du Parti, 1984, George ORWELL

« Emancipate yourselves from mental slavery ;
None but ourselves can free our minds.»

Bob MARLEY

4.1 Rappel sur les équations de droite

Définissons ici quelques outils et méthodes permettant de tracer simplement une droite à partir de son équation ou bien à partir d'un point et de son coefficient directeur. Dans toute la suite on se place dans un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

Définition 4.0: Équation réduite de droite

Soit D une droite d'un plan muni d'un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

1. *Si D est parallèle à $(O, \overrightarrow{\jmath})$, il existe un nombre α tel qu'une équation cartésienne de D est :*

$$x = \alpha$$

2. *Si D n'est pas parallèle à $(O, \overrightarrow{\jmath})$, il existe deux nombres a et y_0 tels qu'une équation cartésienne de D est :*

$$y = ax + y_0$$

*Dans ce cas, le nombre y_0 s'appelle l'*ordonnée à l'origine *car il correspond à l'ordonnée de l'intersection de D avec l'axe des ordonnées. Le nombre a s'appelle le* coefficient directeur*.*

Dans les deux cas, on désignera par équation réduite *de D ces équations.*

Démonstration. L'existence de l'équation réduite peut se prouver grâce à nos connaissances sur les vecteurs. □

On rappelle qu'une équation de droite est une condition nécessaire et suffisante d'appartenance d'un point à la droite. Plus précisément :
un point M de coordonnées (x, y) appartient à la droite si et seulement si x et y vérifient une équation de la droite D.

Méthode 4.0: Calculer le coefficient directeur d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Soit D une droite non parallèle à l'axe $(O;\vec{j})$.
Soient M et N deux points distincts de coordonnées (x_N, y_N), (x_M, y_M) appartenant à la droite D.
Le coefficient directeur de D est le nombre $\boxed{a = \dfrac{y_M - y_N}{x_M - x_N}}$

On rappelle que le coefficient directeur est positif si la droite «monte», négatif si la droite «descend» et nul si la droite est «horizontale».
Géométriquement, il correspond à la variation de l'ordonnée lorsque l'on «avance» de 1 dans le sens des x sur la droite D. Parfois, on l'appelle aussi la *pente* de la droite.

Méthode 4.1: Trouver l'équation d'une droite, connaissant 2 de ses points

On suppose que l'on connaît deux points distincts $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ d'une droite D.

(étape 1) On distingue deux cas :

- *(Cas n° 1) Si les deux points ont même abscisse, l'équation est donnée par* $\boxed{x = x_A}$
- *(Cas n° 2) Si les deux points n'ont pas même abscisse, on calcule le coefficient directeur de la droite, donné par la méthode 4.1 et on passe à l'étape suivante.*

(étape 2) On écrit l'équation de droite en remplaçant x et y par x_A et y_A et le coefficient directeur par sa valeur. On obtient ainsi $b = y_A - ax_A$

(étape 3) L'équation de la droite est finalement donnée par $y = ax + y_A - ax_A = a(x - x_A) + y_A$ ou encore :

$$\boxed{y = \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)(x - x_A) + y_A}$$

Méthode 4.2: Trouver l'équation d'une droite, connaissant 1 point et son coefficient directeur

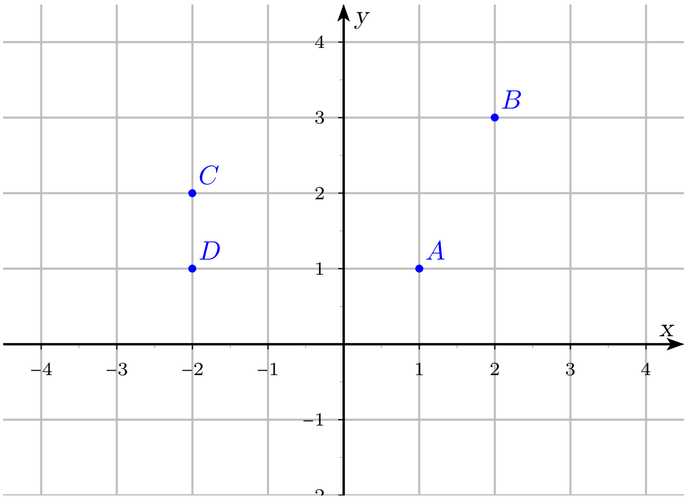
On suppose que l'on connaît un point $A(x_A, y_A)$ et le coefficient directeur a.

(étape 1) On écrit l'équation de droite en remplaçant x et y par x_A et y_A. On obtient ainsi $b = y_A - ax_A$

(étape 2) L'équation de la droite est finalement donnée par $y = ax + y_A - ax_A$, soit :

$$\boxed{y = a(x - x_A) + y_A}$$

Exercice 0

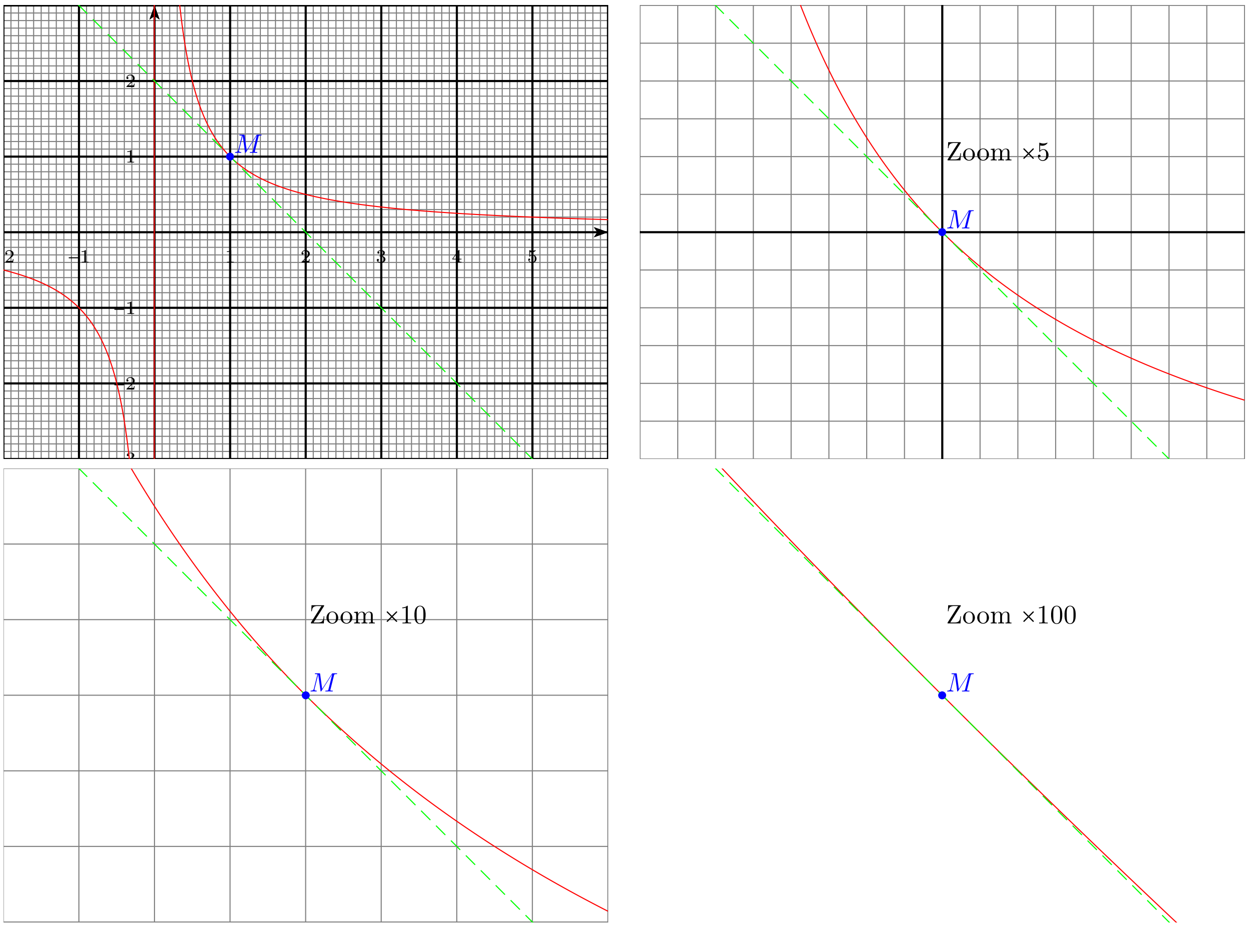


1. *Déterminer les équations des droites* (AB), (CD), (AE), (CE).
2. *Donner l'équation de la droite passant par* A *de coefficient directeur* $\frac{1}{3}$.

4.2 Tangente et nombre dérivé

4.2.1 La tangente

On considère une courbe $\mathcal{C}$ et M un point de la courbe $\mathcal{C}$.
Sous certaines conditions, lorsque l'on agrandit l'échelle autour du point M, on s'aperçoit que la courbe $\mathcal{C}$ est très bien approchée par une droite.
On appelle *tangente* en M à la courbe $\mathcal{C}$ cette droite. Si l'on agrandit suffisamment l'échelle, on peut même confondre la courbe avec la tangente, comme le montre les zooms consécutifs de l'hyperbole[1] suivante faits autour du point M de coordonnées $(1;1)$. On a tracé en pointillés cette tangente.



Définition 4.1: Tangente à une courbe en un point
Soit $\mathcal{C}$ une courbe et M un point de $\mathcal{C}$.
On suppose que l'on peut approximer la courbe $\mathcal{C}$ par une droite lorsqu'on se «rapproche» du point M.
On appelle tangente à $\mathcal{C}$ en M *cette droite d'approximation.*

4.2.2 Taux d'accroissement

Le taux d'accroissement d'une fonction entre deux nombres distincts x_1 et x_2 correspond à l'augmentation moyenne de la fonction entre ces deux nombres.

1. courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

Définition 4.2: Corde et taux d'accroissement

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et ayant pour courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
Soient $M_1(x_1; f(x_1))$ et $M_2(x_2; f(x_2))$ deux points distincts de $\mathcal{C}_f$.
On dit que la droite (M_1M_2) est une corde *de $\mathcal{C}_f$.*
On appelle taux d'accroissement *de f entre x_1 et x_2 le coefficient directeur de cette droite.*

Proposition 4.0: Calcul du taux d'accroissement

Soit I un intervalle et :

$$\begin{array}{rccc} f: & I & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Soient x_1 et x_2 deux nombres distincts de I. Le taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2 est le nombre :

$$\boxed{\tau_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

<u>*Exercice 1*</u>

Soient 2 nombres fixés a et b, soit la fonction $f_1 : x \mapsto ax + b$ et soient x_1 et x_2 deux nombres réels distincts.

1. *Calculer la valeur du taux d'accroissement de la fonction f_1 entre 0 et 1.*
2. *Calculer la valeur du taux d'accroissement de la fonction f_1 entre 50 et 100. Que constate-t-on ?*
3. *Plus généralement, calculer et simplifier la valeur du taux d'accroissement de f_1 entre x_1 et x_2 et conclure.*

<u>*Exercice 2*</u>

Soit la fonction $f_2 : x \mapsto x^2$ et soient x_1 et x_2 deux nombres réels distincts.

1. *Calculer la valeur du taux d'accroissement de f_2 entre 0 et 2.*
2. *Plus généralement, calculer et simplifier la valeur du taux d'accroissement de f_2 entre x_1 et x_2.*

<u>*Exercice 3*</u>

Soit la fonction $f_3 : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0; +\infty[$ et soient x_1 et x_2 deux nombres réels positifs.

1. *Calculer la valeur du taux d'accroissement de f_3 entre 0 et 2.*
2. *Plus généralement, prouver que la valeur du taux d'accroissement de h entre x_1 et x_2 est*
   $\tau_{f_3}(x_1; x_2) = \frac{1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$

Exercice 4

Soit la fonction $f_4 : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ et soient x_1 et x_2 deux nombres réels distincts et tous les deux non nuls.

1. *Calculer la valeur du taux d'accroissement de f_4 entre 1 et 2.*
2. *Plus généralement, calculer, réduire au même dénominateur et simplifier la valeur du taux d'accroissement de f_4 entre x_1 et x_2.*

Proposition 4.1: Taux d'accroissement et sens de variation

Soit I un intervalle et :

$$\begin{array}{rccc} f : & I & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

La fonction f est croissante sur I si et seulement si pour tous nombres distincts x_1 et x_2 de I le taux d'accroissement entre x_1 et x_2 est positif.
La fonction f est décroissante sur I si et seulement si pour tous nombres distincts x_1 et x_2 de I le taux d'accroissement entre x_1 et x_2 est négatif.

4.2.3 Nombre dérivé

Définition 4.3: Nombre dérivé, définition non formelle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soit x un nombre fixé de I. Lorsqu'il existe, le nombre dérivé de f en x est la valeur «limite» du taux d'accroissement entre x et t lorsque t se «rapproche» indéfiniment de x.
On le note $f'(x)$.

Proposition 4.2: Lien entre nombre dérivé et tangente à une courbe en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et ayant pour courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
Soient $M_1(x_1; f(x_1))$ et $M_2(x_2; f(x_2))$ deux points distincts de $\mathcal{C}_f$.
Sous certaines conditions, lorsque x_2 se rapproche de x_1, la corde (M_1M_2) se rapproche d'une droite limite qui correspond à la tangente à $\mathcal{C}_f$ en M_1 telle que nous l'avons définie dans le paragraphe 4.2.1.
De plus, dans ce cas, le coefficient directeur directeur de la tangente vaut $f'(x)$, le nombre dérivé de f en x.

4.2.4 Équation de la tangente

Proposition 4.3: Équation de la tangente

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
Soit a un nombre de I et M le point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(a, f(a))$. On suppose que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en M.
Alors l'équation de la tangente en M est

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

Démonstration. On connaît le coefficient directeur de la tangente : c'est $f'(a)$, reste à trouver l'ordonnée à l'origine. Notons β cette ordonnée à l'origine.
Comme le point M vérifie l'équation de la tangente, β vérifie :
$y_M = f'(a)x_M + \beta$ mais $\begin{cases} x_M &= a \\ y_M &= f(a) \end{cases}$. On obtient donc l'équation :
$f(a) = f'(a)a + \beta$ soit $\beta = f(a) - f'(a)a$.
Finalement, l'équation de la tangente s'écrit $y = f'(a)x + \beta$ soit $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$, ce que l'on peut réécrire en :
$y = f'(a)x - f'(a)a + f(a)$ ou encore $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. □

4.3 Fonction dérivée

4.3.1 Définition et proposition importante

Définition 4.4: Fonction dérivable, fonction dérivée
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I si et seulement si pour tout x de I, le nombre dérivé existe.
Dans ce cas, on appelle fonction dérivée, la fonction :

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

4.3.2 Dérivée de quelques fonctions usuelles

Le tableau suivant donne les dérivés de quelques fonctions usuelles :
Soit n un nombre entier naturel, a et b sont deux nombres réels fixés.

Nom de la fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	$f(x)$	$f'(x)$
Affine	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$ax + b$	a
Puissance	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}
Racine	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Inverse	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

Démonstration. Il s'agit d'une preuve partielle, pour quelques cas particuliers et sans la notion de limite définie proprement auparavant. Nous reprenons ici des conclusions établies lors des 4 exercices précédents.

Premier cas :
On considère $f_1 : x \mapsto ax + b$.
Le taux d'accroissement entre x_1 et x_2 vaut, d'après les exercices précédents $\tau_{f_1}(x_1, x_2) = a$.
Ainsi le taux d'accroissement d'une droite est constant et égal au coefficient directeur de la droite.
En particulier, le nombre dérivé existe en tout point et vaut a.
Second cas :
On considère $f_2 : x \mapsto x^2$.
Le taux d'accroissement entre x_1 et x_2 vaut $\tau_{f_2}(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.
Pour x_2 s'approchant de x_1, $x_2 + x_1$ s'approche de $2x_1$.
Ainsi le nombre dérivé existe pour tout x_1 et vaut $f_2'(x_1) = 2x_1$.
Troisième cas :
On considère $f_3 : x \mapsto \sqrt{x}$ pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$.
Le taux d'accroissement entre x_1 et x_2 (positifs) vaut $\tau_{f_3}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$.
Pour x_2 s'approchant de x_1 , $\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}$ s'approche de $2\sqrt{x_1}$.
Ainsi le nombre dérivé existe pour tout $x_1 > 0$ et vaut $f_3'(x_1) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}$.

Quatrième cas :
On considère $f_4 : x \mapsto \frac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$.
Le taux d'accroissement entre x_1 et x_2 (positifs) vaut $\tau_{f_4}(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_1 x_2}$
Pour x_2 s'approchant de x_1 , $x_1 x_2$ s'approche de x_1^2.
Ainsi le nombre dérivé existe pour tout $x_1 \neq 0$ et vaut $f_4'(x_1) = -\frac{1}{x_1^2}$.

□

4.3.3 Dérivation et opération

Avec le théorème qui suit et avec les dérivées des fonctions usuelles, vous devriez pouvoir calculer un grand nombre de fonctions dérivées.

Théorème 4.0:
Soit I un intervalle, soit α un nombre quelconque fixé et soit x_0 un nombre de I.
Soient u, v, w sont 3 fonctions définies sur I et dérivables en x_0.
On supposera de plus que $w(x_0) \neq 0$.
Alors, on a les formules suivantes :

$$(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0) \tag{4.1}$$
$$(\alpha u)'(x_0) = \alpha u'(x_0) \tag{4.2}$$
$$(uv)'(x_0) = u'v(x_0) + uv'(x_0) \tag{4.3}$$
$$(1/w)'(x_0) = -\frac{w'(x_0)}{w(x_0)^2} \tag{4.4}$$
$$(\frac{u}{w})'(x_0) = \frac{u'(x_0)w(x_0) - u(x_0)w'(x_0)}{w(x_0)^2} \tag{4.5}$$

Exercice 5

Soit la fonction $\phi : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ définie et dérivable pour tout $x \neq -1$

1. *Pour tout $x \neq -1$, déterminer l'expression de $\phi'(x)$*
2. *En déduire la valeur de $\phi'(2)$ puis l'équation de la tangente à la courbe de ϕ au point d'abscisse 2.*

Exercice 6

Soit la fonction $\psi : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 2x - \frac{1}{x}$ définie et dérivable pour tout $x \neq 0$

1. *Pour tout $x \neq 0$, déterminer l'expression de $\psi'(x)$*
2. *En déduire la valeur de $\psi'(1)$ puis l'équation de la tangente à la courbe de ψ au point d'abscisse 1.*

Exercice 7

Soit la fonction $\theta : x \mapsto \frac{2}{(x+1)(x+2)}$ définie et dérivable pour tout $x \notin \{-1; -2\}$

1. *Pour tout x du domaine de dérivabilité, déterminer l'expression de $\theta'(x)$*
2. *En déduire la valeur de $\theta'(0)$ puis l'équation de la tangente à la courbe de θ au point d'abscisse 0.*

4.4 Application de la dérivée

4.4.1 Sens de variation

Nous avons vu, d'après la proposition 4.2.2 qu'il existe une équivalence entre le signe du taux d'accroissement et le sens de variation d'une fonction. Cette équivalence est-elle conservée par passage à la limite, pour la dérivée ? La réponse est oui et est donnée par le théorème plus bas.

Théorème 4.1: Dérivée et sens de variation
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
f est croissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$.
f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$.

Démonstration. Preuve partielle :
Si f est croissante alors pour tout x_1 et x_2 distincts de I le taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2 est positif.
Pour x_2 se rapprochant indéfiniment de x_1, on admet que le taux d'accroissement reste positif. Ainsi la dérivée de f en x_1 est positive. □

Le tableau de signe de la dérivée donne donc le tableau de variation de la fonction.

4.4.2 Extrêmums

De la même manière, établissons un lien entre extrêmums et dérivation. Ici, le lien n'est pas une équivalence mais il existe tout de même.

Théorème 4.2: Dérivée et extrêmums
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Soit x_0 un nombre qui n'est pas une des extrêmités de I. Si f admet un extremûm en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors x_0 est un extrêmum local.

4.4.3 Deux exemples simples sous forme d'exercice

4.4.3.1 Fonction trinômiale

Exercice 8

Soient a, b et c 3 nombres avec a non nul et soit $g : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

1. *Déterminer, pour tout x l'expression de $g'(x)$. Pour quelle valeur de x, $g'(x) = 0$?*
2. *Dresser le tableau de signe de g' puis en déduire le tableau de variation de g.*

4.4.3.2 Une fonction du troisième degré

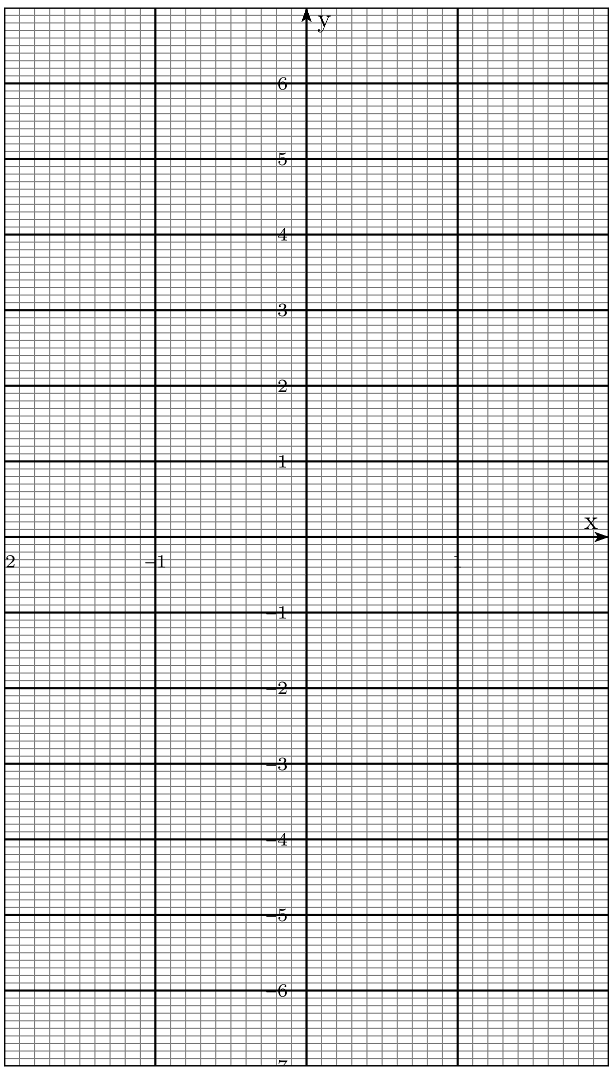
Exercice 9

Soit $h : x \mapsto x(x^2 - 1)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. *Déterminer, pour tout x l'expression de $h'(x)$. Pour quelle valeur de x, $h'(x) = 0$?*
2. *Dresser le tableau de signe de h' puis en déduire le tableau de variation de h.*
3. *Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs à $0,01$:*

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$h(x)$									
$h'(x)$									

4. *Sur le papier millimétré plus bas*
   a) *placer les points par lesquels passe la courbe de h*
   b) *placer les points correspondants aux extrêmums*
   c) *tracer des esquisses des tangentes aux points d'abscisses entières*
   d) *enfin tracer la courbe de h.*



Deuxième partie

Géométrie

Chapitre 5

Vecteurs et colinéarité

« Regarde de tous tes yeux, regarde !»

Jules VERNE, Michel Strogoff

Nous introduisons ici de manière purement géométrique la notion de vecteur. En réalité, on peut étendre cette notion à bien d'autres domaines que la géométrie et, dans ce cas, les applications des vecteurs sont immenses : résolutions de systèmes d'équations, analyse de sons et d'images, résolutions de problèmes dynamiques [1]...
Nous aborderons dans ce chapitre la résolution de systèmes d'équations.

5.1 Définition purement géométrique

5.1.1 Rappels à propos des parallélogrammes

Définition 5.0: Parallélogramme
Soient A, B, C et D quatre points du plan.
On dit que $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.

Avec cette manière de voir les choses, on peut définir des parallélogrammes aplatis.

Exercice 0

On munit le plan d'un repère $(O;I;J)$.
Soient x et y 2 nombres et les points $A(1;1)$, $B(2;4)$, $C(3,-1)$, $D(x;y)$.
On souhaite que $ABCD$ soit un parallélogramme.

1. *À quel système d'équations portant sur x et y est équivalente cette condition ?*
2. *Résoudre ce système.*

5.1.2 Translation et Vecteurs

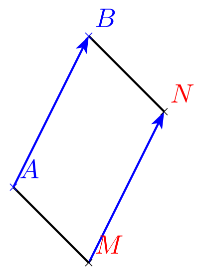
Une translation est une opération de déplacement dans l'espace dont on fixe les caractéristiques suivantes :
- une distance
- une direction et un sens

On peut donc le définir avec des parallélogrammes.

1. qui évoluent dans le temps

Définition 5.1: Translation, vecteur

Soient A et B deux points du plan.
La translation qui transforme A en B est l'application géométrique définie par :
Pour tout point M du plan, l'image de M est l'unique point N tel que $ABNM$ soit un parallélogramme.
On dit également que la translation qui transforme A en B est la translation de vecteurs $\overrightarrow{AB}$



Définition 5.2: Égalité de vecteurs

Soient A, B, C et D 4 points du plan.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est identique à la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

En fait, une translation est un déplacement dans le plan et un vecteur est une manière de spécifier ce déplacement et il suffit de connaître l'image d'un point pour définir complètement une translation. Nous pouvons donc en déduire la remarque importante suivante.

> ⚠ Reprenons l'exemple de la figure précédente.
> En fait, N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si B est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.
> En particulier, dans ce cas, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$.

Proposition 5.0: Égalité de vecteurs, autre caractérisation

Soient A, B, C et D 4 points du plan.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

Démonstration. Si $ABDC$ est un parallélogramme, la translation qui transforme A en B transforme également C en D, par définition des translations.
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors la translation qui transforme A en B est identique à la translation qui transforme C et en D, par définition de l'égalité de vecteurs.
Donc, l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est en fait l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$, c'est à dire D. Ainsi, $ABDC$ est un parallélogramme, par définition des translations. □

Définition 5.3: Représentants

Des vecteurs égaux sont appelés les représentants d'un unique vecteur.
Dans ce cas, on peut noter ce vecteur unique par une lettre, par exemple $\vec{u}$

Exercice 1

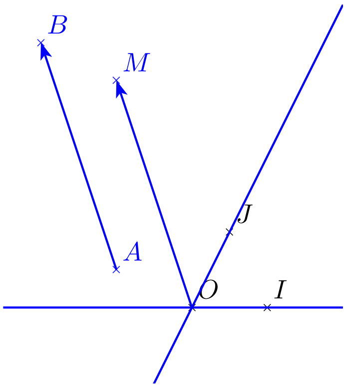
Soient $ABDC$ et $CDFE$ 2 parallélogrammes.
Prouver que $ABFE$ est un parallélogramme.
Indication: Utiliser des égalités de vecteurs.

5.2 À l'aide d'un repère

5.2.1 Coordonnées d'un vecteur dans un repère

Définition 5.4: Coordonnées d'un vecteur

Soient A et B deux points d'un plan muni d'un repère $(O;I;J)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont les coordonnées du point M image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Par définition, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont les coordonnées du point M tel que $ABMO$ est un parallélogramme.

Proposition 5.1: Unicité des coordonnées

Soit $(O;I;J)$ un repère.
Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées dans $(O;I;J)$.

Démonstration. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Si $\vec{u}=\vec{v}$, ces deux vecteurs définissent la même translation. Or, l'image de O par cette translation est unique. Donc les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les mêmes.
Si les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les mêmes, alors l'image de O par la translation de vecteur $\vec{u}$ est identique à l'image de O par la translation de vecteur $\vec{v}$. Or 2 points définissent une unique translation. Ainsi les translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont identiques. □

Proposition 5.2: Formule des coordonnées d'un vecteur

Soit $(O;I;J)$ un repère du plan.
Soient $A(x_a, y_a)$ et $B(x_b, y_b)$ deux points du plan.
Alors les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\boxed{(x_b - x_a, y_b - y_a)}$.

Exercice 2

Preuve de la formule :
En appelant $M(x;y)$ l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, prouver que x et y doivent vérifier un système d'équations traduisant le fait que $ABMO$ est un parallélogramme. Résoudre ce système.

5.2.2 Nouvelle manière de représenter un repère

À partir de maintenant, un repère du plan sera donné par son origine, le vecteur $\overrightarrow{OI}$ et le vecteur $\overrightarrow{OJ}$. On posera :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OI} & = & \vec{\imath} \\ \overrightarrow{OJ} & = & \vec{\jmath} \end{cases}$$

Et on désignera le repère par $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

5.3 Opérations sur les vecteurs

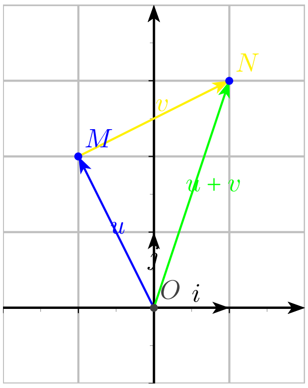
5.3.1 Addition

On définit l'addition de deux vecteurs à partir d'un enchaînement de translations de la manière suivante :

Définition 5.5: Composée de translations, addition de vecteurs

Soient deux translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Alors, l'enchaînement des 2 translations est encore une translation, de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Démonstration. Soient A, B et C 3 points tels que $\overrightarrow{AB}$ soit un représentant du vecteur $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ soit un représentant du vecteur $\vec{v}$.
Soit M un point quelconque. Nous notons N l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et P l'image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.
Nous savons qu'alors $ABNM$ et $CDPN$ sont des parallélogrammes et en particulier :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CP}$.
Ainsi, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CP}$ et nous en déduisons que $ACPM$ est un parallélogramme. Ainsi, l'enchaînement de 2 translations est bien une translation. □



Proposition 5.3: Addition de vecteurs et coordonnées

Soit $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ un repère. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x_u, y_u) et (x_v, y_v) dans ce repère.
Alors le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\boxed{(x_u + x_v, y_u + y_v)}$

Démonstration. Soit M de coordonnées (x_m, y_m) l'image de O par la translation de vecteur $\vec{u}$.
Les coordonnées de M sont celles de $\vec{u}$, soit :

$$\begin{cases} x_m & = & x_u \\ y_m & = & y_u \end{cases}$$

On note N l'image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$.
Notons (x_n, y_n) les coordonnées de N, ce sont aussi, par définition, les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$.
En utilisant la formule des coordonnées d'un vecteur, $\overrightarrow{MN}\,(x_n - x_m, y_n - y_m)$, d'après l'équation précédente, on a donc :

$$\begin{cases} x_n - x_u &= x_v \\ y_n - y_u &= y_v \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} x_n &= x_v + x_u \\ y_n &= y_v + y_u \end{cases}$$

□

Maintenant que nous avons défini l'addition de 2 vecteurs, il nous faut définir la notion de vecteur opposé et de vecteur nul.

Définition 5.6: Vecteur nul, vecteur opposé
Une translation de vecteur nul est une translation qui laisse inchangé tous les points du plan. On note $\vec{0}$ le vecteur nul.
Soit $\vec{u}$ un vecteur. On appelle opposé de $\vec{u}$ l'unique vecteur noté $-\vec{u}$ tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

En particulier, pour tout point M, $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$

Proposition 5.4: Coordonnées du vecteur nul, du vecteur opposé
Soit $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ un repère du plan. Les coordonnées de $\vec{0}$ sont $(0;0)$.
Si $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées $(x;y)$ alors les coordonnées de $-\vec{u}$ sont $(-x;-y)$.

Exercice 3

Soient $A\,(x_a;y_a)$ et $B\,(x_b;y_b)$ 2 points. Soit $M\,(x;y)$ un troisième point.
On souhaite que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

1. *Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en fonction des coordonnées de A, B et M.*
2. *À quel système d'équations portant sur x et y est équivalente l'équation $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$?*
3. *Résoudre ce système. Commentaires ?*

Exercice 4

Soient $ABCD$ un parallélogramme non aplati.
On se place dans le repère $(A;B;D)$ pour tout ce qui suit. Soit un point M de coordonnées $(x;y)$.
On souhaite que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

1. *Rappeler les coordonnées de A, B, C et D dans le repère $(A;B;D)$.*
2. *En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$ en fonction de x et y.*
3. *Quel système d'équations doivent vérifier x et y ? Résoudre ce système.*
4. *En déduire les coordonnées du point M recherché. À quoi correspond ce point ?*

5.3.2 Relation de Chasles

La relation de Chasles traduit juste en termes vectoriels l'évidence suivante :
« Si je pars de A, que je me rends en B puis, repartant de B, que je me rends en C alors mon trajet complet part de A pour aller en C »

Proposition 5.5: Relation de Chasles
Soient A, B et C trois points. On a :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

Démonstration. L'enchaînement de la translation qui transforme A en B avec la translation qui transforme B en C est une translation qui transforme A en C. □

5.3.3 Multiplication par un nombre réel

On définit la multiplication d'un vecteur par un réel à partir de ses coordonnées de la manière suivante.

Définition 5.7: Multiplication d'un vecteur par un réel
Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $(x; y)$ dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Soit λ un nombre.
Le vecteur $\lambda \cdot \vec{u}$ est l'unique vecteur de coordonnées $(\lambda x; \lambda y)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

On admettra que cette définition ne dépend pas du repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ choisi.
À l'aide de cette définition, on vérifie qu'on a bien $n \cdot \vec{u} = \underbrace{\vec{u} + \cdots + \vec{u}}_{n \text{ fois}}$.

On montre aussi, à l'aide des coordonnées, que l'on vérifie le même genre de propriétés que pour la multiplication des réels entre eux concernant :
- la multiplication par 0 et −1
- la distributivité de · sur +
- l'associativité de ·

Ces propriétés sont résumées dans la proposition suivante :

Proposition 5.6: Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un réel
Soient λ et μ deux réels. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On a :

$$\begin{array}{lcll}
(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} & = & \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u} & (\textit{Distributivité de} \cdot \textit{sur} +) \\
\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) & = & \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v} & (\textit{Distributivité de} \cdot \textit{sur} +) \\
0 \cdot \vec{u} & = & \vec{0} & (\textit{Multiplication par } 0) \\
(-1) \cdot \vec{u} & = & -\vec{u} & (\textit{Multiplication par } -1) \\
\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) & = & (\lambda \mu) \cdot \vec{u} & (\textit{Associativité de} \cdot)
\end{array}$$

Exercice 5

À l'aide de la relation de Chasles, prouver que $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Nous allons maintenant explorer quelques propriétés du milieu d'un segment.

Exercice 6

Soient A et B deux points.

1. *Prouver que I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $AIBI$ est un parallélogramme.*

   Indication: Quelles sont les diagonales de ce quadrilatère aplati ?

2. *En déduire que I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.*

Exercice 7

Soient A et B deux points, soit I le milieu de $[AB]$ et soit M un quatrième point.
Prouver que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2 \cdot \overrightarrow{MI}$.
Indication: Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ à l'aide de la relation de Chasles.

Exercice 8

Soit $ABCD$ un parallélogramme et soit M un point quelconque du plan.
On appelle G le centre du parallélogramme.
Prouver que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4 \cdot \overrightarrow{MG}$.

Pour finir sur ce point, revenons sur la notion de repère et faisons le lien entre les coordonnées d'un point M et les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
Avant d'aller plus loin, remarquons qu'un point M a comme coordonnées $(x;y)$ dans un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ si et seulement si $\overrightarrow{OM}\,(x;y)$.

Proposition 5.7: Coordonnées d'un point dans un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$
On munit le plan d'un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
Un point M a comme coordonnées $(x;y)$ si et seulement si $x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} = \overrightarrow{OM}$

Démonstration. Rappelons que les coordonnées de $\vec{\imath}$ sont $(1;0)$ et que celles de $\vec{\jmath}$ sont $(0;1)$.
Ainsi $x \cdot \vec{\imath}$ a pour coordonnées $(x;0)$ et $y \cdot \vec{\jmath}$ a pour coordonnées $(0;y)$.
Finalement $x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath}$ a pour coordonnées $(x+0;0+y) = (x;y)$. Or, d'après la remarque, M a pour coordonnées $(x;y)$ si et seulement si $\overrightarrow{OM}$ a comme coordonnées $(x;y)$, ce qui permet de conclure. □

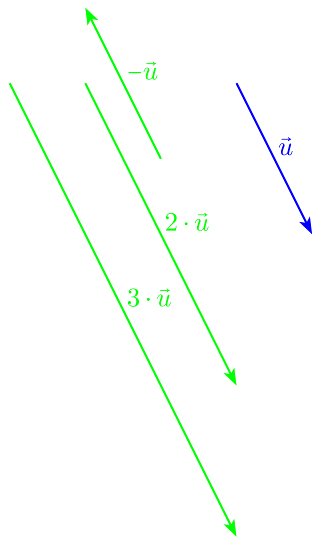
Proposition 5.8: Milieu d'un segment
Soient A, B et I 3 points. On a les équivalences suivantes :

$$I \text{ est le milieu de } [AB] \iff \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AI}$$

Démonstration. Une partie de la preuve se trouve dans l'exercice 6. □

5.4 Colinéarité et applications

On dit que 2 vecteurs sont colinéaires lorsqu'ils sont "proportionnels".
Dans ce cas, les vecteurs partagent la même direction.
Plus bas, on a tracé un vecteur $\vec{u}$ ainsi que certains vecteurs qui lui sont colinéaires : $2 \cdot \vec{u}$, $-\vec{u}$, $3 \cdot \vec{u}$.



5.4.1 Définition et théorème

La définition de la colinéarité précise l'idée de proportionnalité.

Définition 5.8: Colinéarité de 2 vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'il existe un nombre λ tel que $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{u}$

$\forall \vec{u}$, $\vec{0}$ est colinéaire à $\vec{u}$.
Lorsqu'on a munit le plan d'un repère, on peut identifier que 2 vecteurs sont colinéaires lorsque leurs coordonnées sont proportionnelles.

Cette dernière remarque nous permet d'énoncer la proposition suivante.

Proposition 5.9: Critère de colinéarité

On munit le plan d'un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soient $\vec{u}\,(x;y)$ et $\vec{v}\,(x';y')$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' = yx'$.

Entraînons-nous à manipuler ce critère en répondant à l'exercice suivant.

Exercice 9

Dire, dans les cas suivants, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\,(1;2)$, $\vec{v}\,(\pi;2\pi)$

b) $\vec{u}\,(0;3)$, $\vec{v}\,(0;\frac{\sqrt{13}}{15\pi})$

c) $\vec{u}\,(\frac{1}{2};\frac{1}{6})$, $\vec{v}\,(4;\frac{4}{3})$

d) $\vec{u}\,(\sqrt{3};\sqrt{2})$, $\vec{v}\,(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\sqrt{\frac{2}{9}})$

Théorème 5.0: Colinéarité et parallélisme
Soient A, B, C et D 4 points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Nous allons nous entraîner à manipuler ces notions à travers les 2 exercices suivants :

Exercice 10

On munit le plan d'un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ et soit x un nombre. On place les 4 points suivants :

A	$(0;3)$
B	$(2;1)$
C	$(-1;2)$
D	$(x;0)$

1. *Calculer, éventuellement en fonction de x, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.*
2. *À quelle condition portant sur x ces 2 vecteurs sont colinéaires ?*
3. *Déterminer la valeur de x telle que (AB) et (CD) soient parallèles.*

Exercice 11

Soit ABC un triangle non aplati et soient I, J et K les points tels que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} &= \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BJ} &= \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CK} &= \tfrac{2}{3}\overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

Dans toute la suite, on se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; vecteur AC)$.
L'objectif est de prouver que I, J et K sont alignés.

1. *Nous allons utiliser deux méthodes pour déterminer les coordonnées de J :*
   a) *En travaillant sur l'égalité vectorielle $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, se ramener par équivalences successives à une équation du type :*
   $\overrightarrow{AJ} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$ *pour laquelle on précisera les valeurs de α et β. En déduire les coordonnées de J.*
   b) *En posant $(x_J; y_J)$ les coordonnées de J, déterminer en fonction de x_J et y_J les coordonnées de $\overrightarrow{BJ}$ puis en déduire à quel système portant sur x_J et y_J est équivalent l'égalité $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Enfin, résoudre ce système et en déduire les coordonnées de J.*
2. *De la même manière, déterminer les coordonnées de I et K.*
3. *En utilisant un critère de colinéarité, prouver que I, J et K sont alignés.*

Cet exercice nous prépare à la notion de droite.

Exercice 12

On munit le plan d'un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ *.* x *et* y *désignent deux nombres. On place les 3 points suivants :*

A	$(1;2)$
B	$(0;2)$
M	$(x;y)$

1. *Calculer, éventuellement en fonction de* x *et* y*, les coordonnées de* $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{BM}$.
2. *À quelle condition portant sur* x *et* y *ces 2 vecteurs sont colinéaires ? En déduire une équation de la droite parallèle à* (OA) *passant par* B *sous la forme* $y = mx + p$ *pour laquelle on précisera les valeurs de* m *et* p.

5.4.2 Équations de droites

Définition 5.9: Droite définie par un point et un vecteur directeur
Soit un point A *et un vecteur* $\vec{u} \neq \vec{0}$.
L'ensemble des points M *tels que* $\overrightarrow{AM}$ *et* $\vec{u}$ *soient colinéaires forment une droite* D.
On dit alors que $\vec{u}$ *est un* vecteur directeur *de* D.

Nous allons plus loin faire le lien avec les équations cartésiennes de droites dont nous donnons plus bas une définition plus générale que celle vue en seconde.

Définition 5.10: Équation cartésienne d'une droite
Soient a*,* b *et* c *trois nombres tels que* a *et* b *ne soient pas tous les deux nuls.*
L'ensemble des points $M(x;y)$ *tels que* $ax + by = c$ *forment une droite et on dit que* $ax + by = c$ *est une* équation cartésienne *de cette droite.*
Réciproquement, pour toute droite D*, il existe trois nombres* a*,* b *et* c *tels que pour tout point* $M(x;y)$ *du plan :*

$$M(x;y) \in D \Longleftrightarrow ax + by = c$$

Nous allons maintenant établir le lien entre les coefficients a, b et c d'une équation cartésienne et la notion de vecteur directeur. Pour cela, faites les 3 exercices suivants :

Exercice 13

On munit le plan d'un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ *.*
Soit le vecteur $\vec{u}(3;-4)$*, soit le point* $A(1;1)$ *et soient* x *et* y *deux nombres. Enfin, on notera* M *le point de coordonnées* $(x;y)$.

1. *Déterminer les coordonnées de* $\overrightarrow{AM}$.
2. *À quelle condition sur* x *et* y *les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\overrightarrow{AM}$ *sont colinéaires ?*
3. *En déduire une équation cartésienne de la droite passant par* A *de vecteur directeur* $\vec{u}$

Exercice 14

Soit D *la droite d'équation* $2x + 3y = 4$.

1. *Préciser les coordonnées d'un point par lequel passe* D.
2. *Déterminer un vecteur directeur de* D.

Exercice 15

On munit le plan d'un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
Soient α et β deux nombres qui ne sont pas tous les deux nuls et soit le vecteur $\vec{u}\,(\alpha;\beta)$.
Soit également γ et ϵ deux autres nombres et soit le point $A\,(\gamma;\epsilon)$.

1. *Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$.*
2. *Dans le cas où $\alpha \neq 0$, préciser le coefficient directeur de cette droite.*
3. *Dans le cas où $\alpha = 0$, à quel axe cette droite est-elle parallèle ?*

Cet exercice constitue une preuve partielle de la proposition suivante :

Proposition 5.10: Lien entre vecteur directeur et coefficients d'une équation cartésienne
Soient a, b et c trois nombres avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
Soit la droite D d'équation $ax + by = c$. Alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

5.4.3 Lien entre les systèmes d'équations et les coordonnées d'un point dans un repère

En seconde, on vous a certainement appris que l'une des grands avantages de la géométrie cartésienne était de transformer des problèmes géométriques en problèmes numériques. Nous allons ici faire le chemin inverse, c'est à dire transformer un système d'équation en problème géométrique. En seconde, nous avons vu que résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues revenait à trouver l'intersection de deux droites.
Cette année, nous allons montrer que résoudre un tel système peut aussi être équivalent à chercher les coordonnées d'un point dans un certain repère.
Pour aborder sereinement la méthode, le plus simple est certainement de prendre un exemple concret. Dans un second temps, nous établirons des éléments plus théoriques.
Regardons le système d'équations suivant :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{lcl} 2x + 3y & = & 4 \\ x - y & = & 1 \end{array}\right.$$

À partir de maintenant, nous noterons les coordonnées d'un vecteur ou d'un point verticalement.
Ainsi, plutôt que de noter $M\,(x;y)$, on écrira $M\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

Si nous munissons le plan d'un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ et que nous posons $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$, nous remarquons que le vecteur $x\cdot\vec{u} + y\cdot\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2x\\ x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3y\\ -y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+3y\\ x-y\end{pmatrix}$.
Soit maintenant le point $A\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$ de sorte que $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}4-0\\ 1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$.
Résoudre le système revient donc à trouver les nombres x et y tels que $x\cdot\vec{u} + y\cdot\vec{v} = \overrightarrow{OA}$.
Nous allons ici admettre que $(O;\vec{u};\vec{v})$ forme un repère.
Finalement, résoudre ce système d'équation revient à trouver les coordonnées de A dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.
La petite proposition suivante va nous permettre de déterminer si 2 vecteurs et un point forment ou non un repère.

Proposition 5.11: Colinéarité et repère
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A un point.
$(A;\vec{u};\vec{v})$ est un repère si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

Démonstration. Soient U et V les points tels que $\overrightarrow{AU} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AV} = \vec{v}$.
Nous savons que $(A;U;V)$ est un repère si et seulement si les points A, U, V sont non alignés, ce qui est équivalent à dire que $\overrightarrow{AU}$ et $\overrightarrow{AV}$ sont non colinéaires. □

Pour vous entraîner et examiner toutes les situations possibles pour la résolution de systèmes d'équations, cherchez les 2 exercices suivants :

Exercice 16

Soit le système :

$$(S_2)\begin{cases} 2x+3y = 4 \\ 6x+9y = 1 \end{cases}$$

On suppose que l'on a munit le plan d'un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

1. *Prouver que résoudre le système S_1 revient à trouver x et y tels que $x \cdot \vec{u'} + y \cdot \vec{v'} = \overrightarrow{OA'}$.*
   On précisera les coordonnées de $\vec{u'}$, $\vec{v'}$ et A'.
2. *Prouver que les vecteurs $\vec{u'}$, $\vec{v'}$ sont colinéaires.*
3. *Le vecteur $\overrightarrow{OA'}$ est-il colinéaire à $\vec{u'}$? En déduire le nombre de solutions du système.*

Exercice 17

Soit le système :

$$(S_3)\begin{cases} x-2y = 4 \\ -x+2y = -4 \end{cases}$$

On suppose que l'on a munit le plan d'un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

1. *Prouver que résoudre le système S_1 revient à trouver x et y tels que $x \cdot \vec{u''} + y \cdot \vec{v''} = \overrightarrow{OA''}$.*
   On précisera les coordonnées de $\vec{u''}$, $\vec{v''}$ et A''.
2. *Prouver que les vecteurs $\vec{u''}$, $\vec{v''}$ sont colinéaires.*
3. *Le vecteur $\overrightarrow{OA''}$ est-il colinéaire à $\vec{u''}$? En déduire le nombre de solutions du système et préciser la forme de ces solutions.*

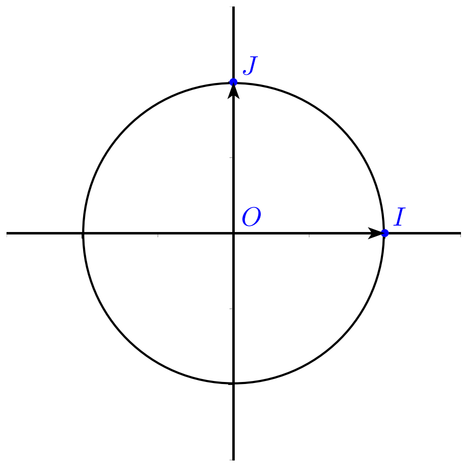
Chapitre 6

Trigonométrie

« What goes up must come down
spinning wheel got to go round»
Spinning Wheel, une chanson de BLOOD, SWEAT & TEARS

6.1 Le cercle trigonométrique

6.1.1 Mesure d'angle



Définition 6.0: Cercle trigonométrique
Soit $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ *un repère orthonormé. On définit* Γ *le cercle de centre* O *et de rayon* 1. *On dit que* Γ *est le cercle trigonométrique du repère* $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
On définit le sens positif de déplacement sur le cercle comme étant de I *vers* J *par le plus court chemin.*

Définition 6.1: Mesure d'angle sur le cercle trigonométrique
Soient M *et* N *deux points d'un cercle trigonométrique* Γ.
On définit une mesure de l'angle $\widehat{MON}$ *comme étant le déplacement de* M *vers* N, *c'est à dire la distance d'un chemin reliant* M *à* N *sur le cercle muni d'un signe* $+$ *si le chemin est parcouru dans le sens positif ou bien d'un signe* $-$ *dans le cas contraire.*
On appelle radian cette nouvelle mesure des angles.

(Exemple 0) $\widehat{IOI} = 0$ mais aussi $\widehat{IOI} = 2\pi$
(Exemple 1) $\widehat{IOJ} = \frac{\pi}{2}$ mais aussi $\widehat{IOJ} = -3\frac{\pi}{2}$
(Remarque 0) Si $\widehat{MON} = r$ alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\widehat{MON} = r + 2k\pi$.
(Remarque 1) Si $\widehat{MON} = r$ alors $\widehat{NOM} = -r$.

Proposition 6.0: lien avec les angles en degré
Si une mesure de l'angle $\widehat{MON}$ *vaut* r *en radian, alors elle vaut* $\frac{180}{\pi}r$ *en degré.*

Définition 6.2: Mesure principale d'angle
Soient M *et* N *deux points d'un cercle trigonométrique* Γ.
On appelle mesure principale de l'angle $\widehat{MON}$ *l'unique mesure de cet angle appartenant à l'intervalle* $]-\pi;\pi]$

Exercice 0

Compléter le tableau suivant :

mesure d'angle	*mesure principale correspondante*
2π	
$3\frac{\pi}{2}$	
$7\frac{\pi}{6}$	
$5\frac{\pi}{4}$	
123π	

6.1.2 Sinus et cosinus

Définition 6.3: Sinus et cosinus d'un réel
Soit un réel x.
Il existe un unique point M sur le cercle trigonométrique tel que $\widehat{MOI}$ a pour mesure x en radian.
Nous définissons les réels $\cos(x)$ et $\sin(x)$ comme étant les coordonnées de ce point M.
Plus général, les sinus et cosinus d'un angle seront les sinus et cosinus d'une mesure de cet angle.

Exercice 1

Commencer par faire un dessin de cercle trigonométrique.
On rappelle la loi de Pascal : la somme des angles d'un triangle fait 180 ° ou bien π radians.

1. *Compléter les 3 premières colonnes vides du tableau par simple lecture des coordonnées des points correspondants.*
2. *Placer le point A sur le cercle tel que $\widehat{IOA} = \frac{\pi}{3}$.*
   a) *Quelle est la nature du triangle IOA ?*
   b) *Placer le point H tel que (AH) soit une hauteur de IOA. Déterminer la longueur OH puis HA.*
   c) *Compléter la dernière colonne du tableau.*
3. *Placer le point B sur le cercle tel que $\widehat{IOB} = \frac{\pi}{4}$ puis placer le point G du segment $[OI]$ tel que BGO soit rectangle en G.*
   a) *Prouver que $OG = BG$.*
   b) *En déduire la valeur de OG.*
   c) *Compléter l'avant-dernière colonne du tableau.*
4. *Déterminer une stratégie pour compléter la colonne manquante du tableau.*

Proposition 6.1: Mesures remarquables de sinus et cosinus
On a les sinus et cosinus des angles remarquables suivants :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin(x)$							
$\cos(x)$							

Proposition 6.2: Propriétés des sinus et cosinus

Soit x un nombre réel. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(-x) &= \cos(x)\\
\sin(-x) &= -\sin(x)\\
\cos(x+\pi) &= -\cos(x)\\
\sin(x+\pi) &= -\sin(x)\\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \sin(x)\\
\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) &= \cos(x)\\
\cos(x)^2+\sin(x)^2 &= 1
\end{aligned}$$

6.2 Angle entre 2 vecteurs tous non nuls

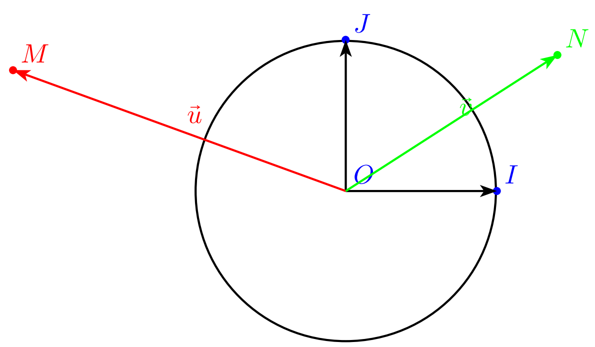
6.2.1 Définition

Définition 6.4: angle entre 2 vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq 0$.
Il existe 2 uniques points M et N tels que

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} & = & \vec{u} \\ \overrightarrow{ON} & = & \vec{v} \end{cases}$$

Notons M' et N' les intersections respectives des demi-droites $[OM)$ et $[ON)$ avec le cercle trigonométrique.
Nous appelons angle de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'angle $\widehat{M'ON'}$. Nous notons cet angle $(\vec{u};\vec{v})$.



(Remarque 2) Si l'un des vecteurs est nul, on ne peut pas définir l'angle $(\vec{u},\vec{v})$

(Remarque 3) Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul :

1. l'angle $(\vec{u},-\vec{u})$ a pour mesure π
2. l'angle $(\vec{u},\vec{u})$ a pour mesure 0

6.2.2 Propriétés

Proposition 6.3: Relation de Chasles
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ 3 vecteurs tous non nuls.
On a :

$$\boxed{(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w})}$$

Proposition 6.4: Angles et colinéarités
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ 2 vecteurs tous non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u},\vec{v})$ a pour mesure 0 ou bien π.

Proposition 6.5: Autres propriétés
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ 2 vecteurs tous non nuls.
On a les égalités suivantes :

$$(\vec{u},\vec{u}) = 0$$
$$(\vec{u},-\vec{u}) = \pi$$
$$(\vec{u},\vec{v}) = -(\vec{v},\vec{u})$$
$$(\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi$$

Chapitre 7

Produit scalaire et applications

« *Personne ne peut vous apprendre quoi que ce soit qui ne repose déjà au fond d'un demi-sommeil dans l'aube de votre connaissance.* »
KHALIL KHALIL GIBRAN

7.1 Définitions et premières propriétés

Le produit scalaire est un produit de 2 vecteurs dont le résultat est un nombre réel.
Il permet de traiter plus facilement les notions d'orthogonalité et nous offre la possibilité de généraliser le théorème de Pythagore à des triangles non rectangles.

7.1.1 Norme d'un vecteur

Définition 7.0: Norme d'un vecteur
Soit $\vec{u}$ un vecteur. Soient A et B deux points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
La norme de $\vec{u}$ est la distance AB. Ce nombre est indépendant du représentant de $\vec{u}$ choisi.
Par ailleurs, on le note $||\vec{u}||$.

Proposition 7.0: Formule de la norme
Soit $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ *un repère* orthonormé *et* $\vec{u}\,(x;y)$ *un vecteur.*

$$On\ a\ \boxed{||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}}$$

<u>*Exercice 0*</u>

Prouver cette formule en utilisant les formules de la distance entre 2 points et des coordonnées d'un vecteur.

<u>*Exercice 1*</u>

Soit $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ *un vecteur orthonormé et soit* $\vec{u}\,(-2;3)$ *un vecteur.*
Calculer $||\vec{u}||$, $||\vec{-u}||$, $||\vec{3u}||$, $||-\vec{3}u||$.

Proposition 7.1: Propriétés de la norme d'un vecteur

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs et λ un nombre :

$$\begin{array}{rcl} ||\vec{u}+\vec{v}|| & \leq & ||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| \\ ||\lambda\vec{u}|| & = & |\lambda|||\vec{u}|| \\ ||\vec{u}|| = 0 & \Longleftrightarrow & \vec{u} = 0 \end{array}$$

7.1.2 Produit scalaire

Le mot *scalaire* signifie, à notre niveau, "nombre".

Définition 7.1: Produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ 2 vecteurs. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est le nombre noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ qui vaut :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)}$$

Proposition 7.2: Formule du produit scalaire

Soit $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ un repère orthonormé.
$\vec{u}\,(x;y)$ et $\vec{v}\,(x';y')$ sont deux vecteurs.

$$\text{On a } \boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'}$$

Démonstration. On garde les hypothèses de la propriété. Par définition :

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}\|^2 &= \dots\dots\dots \\
&= \dots\dots\dots \\
\|\vec{v}\|^2 &= \dots\dots\dots \\
&= \dots\dots\dots \\
\|\vec{v}+\vec{u}\|^2 &= \dots\dots\dots \\
&= \dots\dots\dots \\
&= \dots\dots\dots \\
&= \dots\dots\dots \\
&= \dots\dots\dots \\
\text{On en déduit :} & \\
\|\vec{v}+\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 &= \dots\dots\dots \\
&= \dots\dots\dots \\
&= \dots\dots\dots \\
&= \dots\dots\dots \\
\text{Et donc, finalement :} & \\
\vec{u}\cdot\vec{v} &= \tfrac{1}{2}\left(\|\vec{v}+\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \\
&= \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

□

Exercice 2

Soit $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ un vecteur orthonormé et soit $\vec{u}\,(-2;3)$ et $\vec{v}\,(1;4)$ deux vecteurs.
Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{3v}$, $\vec{v}\cdot\vec{u}$, $\vec{3u}\cdot\vec{v}$

Proposition 7.3: Propriétés du produit scalaire

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs et λ un nombre :

$$\begin{array}{rcll} \vec{u}\cdot\vec{v} & = & \vec{v}\cdot\vec{u} & (\textit{commutativité}) \\ (\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} & = & \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) & (\textit{associativité}) \\ (\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} & = & \vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w} & (\textit{distributivité sur l'addition}) \\ \vec{u}\cdot\vec{u} & = & \|\vec{u}\|^2 & (\textit{lien avec la norme}) \end{array}$$

Démonstration. Toutes ces propriétés se démontrent à l'aide de la formule du produit scalaire dans un repère orthonormé. □

7.1.3 Lien avec les angles

Le produit scalaire est intimement lié à la notion d'angle et permet de généraliser le théorème de Pythagore à des triangle non rectangles comme nous le verrons dans la section suivante.
Voici le résultat fondamental qui permet d'établir ce lien.

Proposition 7.4: Lien entre produit scalaire et cosinus
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On a :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})}$$

Démonstration. Cette démonstration, très importante, doit être apprise.
On considère ici 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tous non nuls.
On fixe un point O du plan et on fixe les points A et B tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$$
$$\overrightarrow{OB} = \vec{v}$$

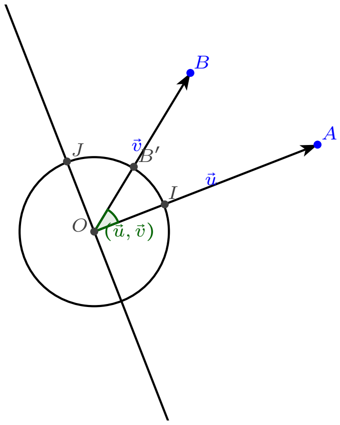
On construit ensuite un repère orthonormé $(O; I; J)$ et le point B' de la manière suivante :

(Étape 1) I est LE point tel que $\overrightarrow{OA} = OA \times \overrightarrow{OI}$.
Dit autrement, I est le point de la demi-droite $[OA)$ tel que $OI = 1$.

(Étape 2) J est LE point du cercle de centre O et de rayon 1 tel que $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right) = \frac{\pi}{2}$.

(Étape 3) B' est LE point tel que $\overrightarrow{OB} = OB \times \overrightarrow{OB'}$.
Là encore, B' est un point du cercle trigonométrique associé à notre repère.

Par construction, l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ correspond à $\widehat{IOB'}$.
Par définition du sinus et du cosinus d'un angle, les coordonnées de B' dans notre repère sont :
$\left(\cos\left(\widehat{IOB'}\right); \sin\left(\widehat{IOB'}\right)\right) = (\cos(\vec{u},\vec{v}); \sin(\vec{u},\vec{v}))$
La figure plus bas résume la situation :



Calculons maintenant le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en utilisant les points I et B' du cercle trigonométrique :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= \left(OA \times \overrightarrow{OI}\right) \cdot \left(OB \times \overrightarrow{OB'}\right) \\ &= OA \times OB \times \left(\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OB'}\right)\end{aligned}$$

Remarquons que $\left\{\begin{array}{lcl} OA & = & \|\vec{u}\| \\ OB & = & \|\vec{v}\| \end{array}\right.$

Il nous reste donc à préciser la valeur de $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OB'}$ et à prouver que $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OB'} = \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Mais cela est simple puisque notre repère est construit pour cela $\left\{\begin{array}{ll} \overrightarrow{OI} & (1;0) \\ \overrightarrow{OB'} & (\cos(\vec{u}, \vec{v}); \sin(\vec{u}, \vec{v})) \end{array}\right.$

Ainsi, en utilisant la formule du produit scalaire, on obtient :

$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OB'} = 1 \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) + 0 \times \sin(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Finalement, on a bien $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})}$

□

7.1.4 Notion d'orthogonalité

Nous avons vu que le théorème de Pythagore est maintenant un cas particulier du théorème d'Al Kashi. Cela nous permet d'énoncer une propriété caractéristique de l'orthogonalité.

Définition 7.2: Orthogonalité

Nous dirons que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

(Remarque 0) Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.

(Remarque 1) Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, dire qu'ils sont orthogonaux revient à dire que : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, c'est à dire que $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{2}$

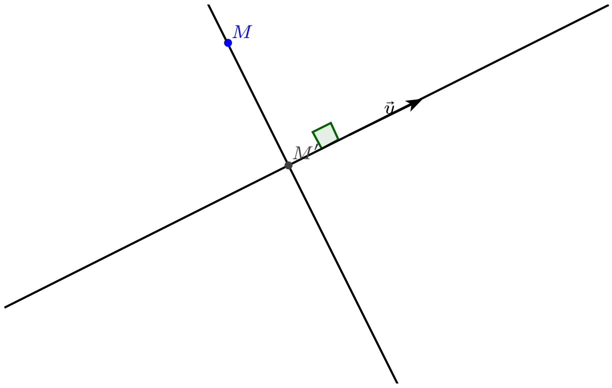
7.2 Projection orthogonale

Définition 7.3: Projeté orthogonal

Soient une droite D et $\vec{u}$ un vecteur directeur de D. Soit M un point du plan.
On appelle projeté orthogonal *de M sur D l'unique point M' de D tel que :*

$$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0$$

La condition se dit aussi « $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u}$ sont orthonaux»



La propriété suivante est très importante et nous fournit une troisième formule pour déterminer un produit scalaire.

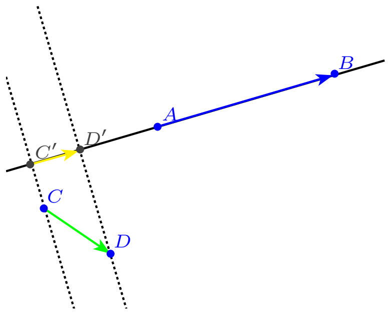
Proposition 7.5: Produit scalaire et projection

Soient A, B, C et D 4 points tels que $A \neq B$.
Soient C' et D' les projetés orthogonaux de C et D sur (AB).
Alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

En particulier :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \begin{cases} AB \cdot CD & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont dans le même sens} \\ -AB \cdot CD & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont de sens opposés} \end{cases}}$$



Vous allez démontrer cette proposition en complétant les pointillés plus bas :

Démonstration. On se place sous les hypothèses de la proposition :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\ldots\ldots\ldots + \overrightarrow{C'D'} + \ldots\ldots\ldots \right)$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or .... et .... sont orthogonaux, ainsi que .... et .... Donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} \cdot \ldots\ldots\ldots + \vec{0}$$

D'autre part, nous savons que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} = AB \cdot C'D' \cdot \ldots\ldots\ldots$.
Mais comme les points .... sont alignés, on en déduit que
cos(.........) = ... dans le cas où les vecteurs sont dans le même sens et
cos(.........) = ... dans le cas où les vecteurs sont de sens opposés.
on obtient ainsi la seconde partie de la proposition. □

Comme petite application, résolvez l'exercice suivant :

Exercice 3

Soit $ABCD$ un carré de côté 1. Soit I le milieu de $[AB]$.
Déterminer la valeur de $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$ selon les deux méthodes proposées.

a) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, déterminer les coordonnées de I, puis celles de $\overrightarrow{IA}$ et celles de $\overrightarrow{IC}$. En déduire la valeur de $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$.

b) Utiliser une projection orthogonale bien choisie pour déterminer $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$ d'une autre manière.

7.3 Applications

7.3.1 Théorèmes d'Al Kashi et de la médiane

Al Kashi, Mathématicien et Astronome perse du XV siècle, reprit, améliora et compléta de nombreux résultats de la géométrie euclidienne. Pour mémoire, nous avons cette année exploré une méthode d'approximation de π que nous lui devons.

Théorème 7.0: Al Kashi
Soient A, B et C 3 points. On a :

$$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2 \times \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ ce qui s'écrit également :} \tag{7.1}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \tag{7.2}$$

Voici un autre théorème à connaître qui est une autre conséquence de la notion de produit scalaire.

Théorème 7.1: Médiane
Soient A, B et O 3 points. On désigne par I le milieu de $[AB]$. On a :

$$OA^2 + OB^2 = 2 \times \left(OI^2 + IA^2\right) \text{ ce qui s'écrit également :} \tag{7.3}$$

$$OA^2 + OB^2 = 2 \times OI^2 + \frac{1}{2} \times AB^2 \tag{7.4}$$

Preuve du théorème d'Al Kashi. On sait que $BC^2 = ||\overrightarrow{BC}||^2$.
De plus, d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.
Ainsi, $BC^2 = ||\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}||^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$. En utilisant la distributivité, on obtient :
$BC^2 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$. En utilisant la commutativité et en regroupant les termes, on obtient : $BC^2 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 2 \times \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$. Reste à remarque que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = ||\overrightarrow{BA}||^2 = BA^2$ et que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AC}||^2 = AC^2$.
On obtient donc bien :
$BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2 \times \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$.
Pour obtenir la seconde relation, il faut noter que, d'après une proposition du cours :
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = BA \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right)$.
Or $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = \pi + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Ainsi :

$\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = \cos\left(\pi + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right) = -\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. Nous avons donc bien :

$$\begin{aligned} BC^2 &= BA^2 + AC^2 + 2 \times \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= BA^2 + AC^2 - 2 \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \end{aligned}$$

□

Preuve du théorème de la médiane. Utilisons le théorème d'Al Kashi aux triangles AIO et BIO. On a :

$$OA^2 = OI^2 + IA^2 + 2 \times \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA}$$

$OB^2 = OI^2 + IB^2 + 2 \times \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB}$. En sommant ces 2 relations on obtient :

$$OA^2 + OB^2 = OI^2 + OI^2 + IA^2 + IB^2 + 2 \times \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + 2 \times \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB}$$

Remarquons ici que $IA = IB$. En regroupant les termes et en factorisant la somme des 2 produits scalaires, on obtient :

$OA^2 + OB^2 = 2 \times OI^2 + 2 \times IA^2 + 2 \times \overrightarrow{OI} \cdot \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right)$. Or $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, ce qui donne :

$$OA^2 + OB^2 = 2 \times \left(OI^2 + IA^2 + \overrightarrow{OI} \cdot \vec{O}\right)$$

$= 2 \times \left(OI^2 + IA^2\right)$. En remarquant que $IA = \frac{1}{2}AB$, on a aussi :

$$= 2 \times \left(OI^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2\right)$$

$$= 2 \times OI^2 + 2 \times \frac{1}{4} \times AB^2$$

$$= 2 \times OI^2 + \frac{1}{2} \times AB^2$$

□

7.3.2 Application aux équations cartésiennes de droite

On a vu précédemment comment définir une droite à l'aide d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$: c'est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$.
Nous allons, de la même manière similaire définir la notion de vecteur normal d'une droite.

Définition 7.4: Droite définie par un point et un vecteur normal
Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$ forme une droite.
$\vec{n}$ s'appelle un vecteur normal de la droite.
Réciproquement, toutes les droites possèdent un vecteur normal.

Nous allons directement établir le lien entre les coefficients d'une équation cartésienne et les coordonnées d'un vecteur normal à l'aide d'un exercice.

Exercice 4

Soit un point $A \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ et un vecteur non nul $\vec{n} \begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A de vecteur normal $\vec{n}$

Cet exercice nous permet d'établir une partie de la proposition suivante :

Proposition 7.6: Équation cartésienne et vecteur normal
Soient a, b et c 3 nombres avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
Soit la droite D d'équation $ax + by = c$.
Alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de D.

Troisième partie

Probabilités et statistiques

Chapitre 8

Variables aléatoires

« Qui ne tente rien n'a rien.»

Dicton populaire

8.1 Probabilités discrètes

8.1.1 Rappels : vocabulaire

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont on peut prévoir quels seront tous les résultats possibles, appelés *éventualités ou issues*, mais dont on ignore quel est le résultat précis avant que l'expérience ne soit réalisée.
L'ensemble de toutes les issues ou éventualités d'une expérience aléatoire est appelé *l'univers* associé à cette expérience. On le notera souvent Ω.
Un *événement* est une partie de l'univers ; un événement élémentaire est formé d'une seule éventualité.
Une expérience aléatoire est *discrète* lorsque les issues sont en en nombre fini.
On appelle le *contraire* d'un évènement F, l'évènement composé de toutes les issues qui n'appartiennent pas à F. On note cet évènement $\overline{F}$.
On appelle l'*intersection* de deux évènements E et F, l'évènement composé de toutes les issues qui sont à la fois dans E et dans F. On note cet évènement $E \cap F$.
On appelle l'*union* de deux évènements E et F, l'évènement formé de toutes les issues qui sont à la dans E ou dans F. On note cet évènement $E \cup F$.

(Exemple 0) On lance un dé à 6 faces, l'ensemble des issues correspond à l'ensemble des numéros qu'il est possible d'obtenir.
Ainsi l'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
Un évènement pourrait être « la face obtenue est paire »

(Exemple 1) Le sexe d'un enfant qui n'est pas encore conçu est également une expérience aléatoire.
Ici, on a $\Omega = \{\text{fille}; \text{garçon}\}$

(Exemple 2) Le temps qu'il fera dans 30 jours à Colombes est également une expérience aléatoire.
On connaît toutes les issues possibles mais il est impossible de prévoir exactement quelle sera le résultat de l'expérience. Le nombre d'issues est trop important pour que l'on puisse les décrire une par une.

(Exemple 3) Le résultat des prochaines élections municipales à Colombes est également une expérience aléatoire.

(Exemple 4) Pratiquement tout ce qui se produit dans le futur est une expérience aléatoire.

<u>*Exercice 0*</u>

Boris monte dans un train et se dirige vers son compartiment. On s'intéresse à l'expérience aléatoire décrivant l'ensemble des voyageurs déjà installés dans le compartiment.
On appelle
E l'évènement «tous les voyageurs du compartiment portent une moustache»
F l'évènement «l'un des voyageurs est une femme»
Écrire à quoi correspond :

1. $\overline{E}$
2. $E \cap F$
3. $E \cup \overline{F}$

....
....
....
....

8.1.2 Loi de probabilité

Définition 8.0: Loi de probabilité

Soit n un nombre entier et soit $\Omega = \{E_1; E_2; E_3; \cdots; E_n\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire. Définir une loi de probabilité dans une expérience aléatoire, c'est associer à chaque issue E_i un nombre p_i compris entre 0 et 1. Les p_i doivent vérifier $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$

Si on répète un très grand nombre de fois, disons P fois, une expérience aléatoire, pour tout issue E_i, le nombre N_i de fois où l'issue E_i se produit vérifie :

$$\boxed{p_i \simeq \frac{N_i}{P}}$$

Définition 8.1: Loi équirépartie (ou issues équiprobables)

Soit n un nombre entier et soit $\Omega = \{E_1; E_2; E_3; \cdots; E_n\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire avec une loi de probabilité :

Issue	E_1	$\cdots$	E_n
Probabilité	p_1	$\cdots$	p_n

On dit que la loi est équirépartie lorsque tous les p_i sont égaux.

Retour sur le premier exemple :
Si le dé est équilibré, les probabilités de toutes les issues sont égales à $\frac{1}{6}$.

Proposition 8.0: Valeur de la probabilité d'une issue dans une loi équirépartie

Soit n un nombre entier et soit $\Omega = \{E_1; E_2; E_3; \cdots; E_n\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire équirépartie.
Alors les probabilités de toutes les issues sont égales à $\frac{1}{n}$.

Exercice 1

Prouver cette proposition.

8.1.3 Probabilité d'un évènement

Nous allons calculer la probabilité d'un évènement non élémentaire.
Reprenons le premier exemple et cherchons à calculer la probabilité de l'évènement F «le numéro obtenu est pair».
Cet évènement est composé des issues $\{2; 4; 6\}$. Sa probabilité est la somme des probabilités de chacune des issues. Sa probabilité est donc :
$P(F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
De manière générale, on a la loi suivante :

Définition 8.2: Probabilité d'un évènement

Soit n un nombre entier et soit $\Omega = \{E_1; E_2; E_3; \cdots; E_n\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire avec une loi de probabilité :

Issue	E_1	$\cdots$	E_n
Probabilité	p_1	$\cdots$	p_n

Soit F un évènement constitué d'issues.
La probabilité de F est définie par :

$$P(F) = \sum_{i/E_i \in F} p_i$$

<u>Exercice 2</u>

En reprenant l'exemple du tirage de dés, calculer la probabilité de l'évènement «la face obtenue est supérieure ou égale à 4».

....
....
....

On dispose par ailleurs de la formule suivante permettant de relier entre les probabilités de réunions et d'intersections d'évènements.

Proposition 8.1: Formule des réunions

Soit une expérience aléatoire et deux évènements E et F. On a la formule suivante :

$$\boxed{P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)}$$

<u>Exercice 3</u>

Dans un village, 35% des gens pratiquent la pétanque, 15% des gens portent une moustache. Enfin, on sait que 10% des habitants sont des moustachus qui pratiquent la pétanque.
On choisit un habitant au hasard, calculer la probabilité pour qu'il porte la moustache ou joue à la pétanque.

....
....
....
....
....

8.2 Variables aléatoires discrètes

8.2.1 Définition et exemples

Définition 8.3: Variable aléatoire

Soit n un nombre entier et soit $\Omega = \{E_1; E_2; E_3; \cdots; E_n\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire. Définir une variable aléatoire sur cette expérience, c'est associer à chaque issue E_i un unique réel X_i.

Toujours avec le premier exemple

On peut définir "naturellement" une variable aléatoire en associant à chaque issue possible des lancés le numéro de la face obtenue.

Second exemple :

Un joueur joue à pile ou face avec un partenaire qui lui propose de gagner 1 EUR à chaque fois que le tirage tombe sur pile et de perdre $1,10$ EUR à chaque fois que le tirage tombe sur face.
Ici, notre univers est constitué de 2 éventualités "pile" ou "face". Nous l'écrivons ainsi :

$\Omega = \{P; F\}$
Tout naturellement,
- à l'éventualité "pile", nous associons le gain, soit 1
- à l'éventualité "face", nous associons la perte, soit $-1,1$

Nous avons ainsi défini une variable aléatoire.

Un troisième exemple :

Un joueur joue deux fois de suite à pile ou face face à un partenaire qui lui propose de gagner 3 EUR si la pièce tombe sur pile deux fois de suite et de perdre 1 EUR pour chaque face obtenu lors des 2 lancés.
Ici, les issues sont les tirages observés lors des deux lancés de pièce. Il y en a donc 4.
Nous les écrivons $\Omega = \{(P,P); (P,F); (F,P); (F,F)\}$.
Par exemple, (P,F) désigne pile obtenu au premier lancé et face obtenu au second.
A chaque issue de l'expérience, nous pouvons associer les gains ou perte. Nous obtenons ainsi la variable aléatoire que nous notons X, associée à chaque tirage :

Issue	(P,P)	(P,F)	(F,P)	(F,F)
Valeur de X	3	-1	-1	-2

Exercice 4

En reprenant le troisième exemple et en supposant que cet expérience est équiré-partie, donnez la probabilité :
- *de perdre 1 EUR*
- *de perdre 2 EUR*
- *de gagner 3 EUR*

8.2.2 Espérance d'une variable aléatoire

8.2.2.1 Approche heuristique

Supposons que l'on joue un grand nombre de fois au second jeu, c'est à dire au jeu qui consiste à :

— gagner 1 EUR si la pièce tombe sur pile

— perdre 1,1 EUR si la pièce tombe sur face

Quelle est le gain moyen que l'on peut espérer à ce jeu ?

On pose $\begin{cases} N \text{ le nombre total de lancers} \\ N_P \text{ le nombre de piles} \\ N_F \text{ le nombre total de faces} \end{cases}$, de sorte que $N = N_F + N_P$.

Le gain total G_T s'écrit :

$$G_T = 1N_P - 1,1N_F$$

Le gain moyen G_m vaut :

$$G_m = \frac{G_T}{N} = 1\frac{N_P}{N} - 1,1\frac{N_F}{N}$$

Pour N très grand $\begin{cases} \frac{N_P}{N} \\ \frac{N_F}{N} \end{cases}$ "s'approche" de la probabilité d'un lancer $\begin{cases} \text{lancer pile} \\ \text{lancer face} \end{cases}$.

Ainsi le gain moyen "s'approche" de :

$$G_m \approx 1\frac{1}{2} - 1,1\frac{1}{2} = -0,05$$

On dit que cette approximation du gain moyen est l'*espérance* de cette variable aléatoire.

8.2.2.2 Définition

Définition 8.4: Espérance

Soit n un entier.

Soit X une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs x_i et soient p_i, pour $1 \leq i \leq n$, les probabilités associées.

L'espérance de X notée $E(X)$ est la grandeur :

$$E(X) = \sum_{1 \geq i \geq n} p_i x_i$$

Exercice 5

On lance 2 dés à 6 faces non pipés.

Calculer l'espérance de la variable aléatoire définie par la somme des faces obtenues.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8.2.3 Variance d'une variable aléatoire

8.2.3.1 Deux jeux d'argent de même espérance

Exercice 6

Calculer les espérances des 2 jeux suivants.
À quel jeu préféreriez-vous jouer ? Pourquoi ?
Premier jeu : On vous propose de jouer à pile ou face avec la règle suivante :
- *pile : vous gagnez 1 €*
- *face : vous perdez 1 €.*

Second jeu : On vous propose à nouveau de jouer à pile ou face :
- *pile : vous gagnez 1 000 000 €*
- *face : vous perdez 1 000 000 €.*

8.2.3.2 Définition : variance et écart type

Définition 8.5: Variance, écart type
Soit n un entier.
Soit X une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs x_i et soient p_i, pour $1 \leq i \leq n$, les probabilités associées.
On note $E(X)$ l'espérance de X/
L'espérance de X notée $V(X)$ est la grandeur :

$$V(X) = \sum_{1 \geq i \geq n} p_i (x_i - E(X))^2$$

L'écart type de X noté $\sigma(X)$ est la grandeur :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exercice 7

Reprendre l'exercice précédent et calculer la variance des 2 jeux.

Dans le cas d'un jeu d'argent, la variance, tout comme l'écart type, donne une idée du risque encouru par le joueur, c'est à dire de l'amplitude des variations entre l'espérance du jeu et les différents gains ou pertes envisageables. Plus la variance ou l'écart type est grand et plus le jeu est risqué.

8.2.4 Opérations sur les variables aléatoires

Soit une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{E_1; \cdots; E_n\}$.
Soient α et β deux nombres et X la variable aléatoire qui a chaque issue E_i associe un nombre x_i.
On peut définir sur ce même univers la variable aléatoire $\alpha X + \beta$ qui associe à chaque issue E_i le nombre $\alpha x_i + \beta$.
On peut alors calculer l'espérance de $\alpha X + \beta$.

Proposition 8.2: Espérance de la variable $\alpha X + \beta$

$$\boxed{E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta}$$

On a également une propriété concernant la variance de αX.

Proposition 8.3: Variance de la variable αX

$$\boxed{V(\alpha X) = \alpha^2 V(X)}$$

8.3 Expériences aléatoires indépendantes

8.3.1 Description de l'exemple

Dans un jeu, un candidat tourne une roue composée de 9 secteurs d'angles identiques et de couleurs différentes :

— les secteurs verts, au nombre de 4, permettent de gagner 1000 EUR

— les secteur noirs, au nombre de 5, font perdre 1000 EUR

A l'issue de ce premier tirage, le candidat tire une boule dans une urne composée de 15 boules de couleurs différentes :

— 4 boule bleues qui permettent de doubler le gain ou d'annuler la perte.

— 9 boules blanches qui ne changent rien au gain ou à la perte du candidat

— 2 boules noires qui triplent la perte

Nous sommes ici en présence d'une expérience aléatoire composée de deux expériences aléatoires indépendantes. Ainsi, les issues de cette expérience globale seront les combinaisons des issues des 2 expériences. Nous notons ainsi V et N les deux issues possibles au lancer de la roue.
Nous notons de même B (pour bleue), W (pour blanche) et N (pour noire) les trois issues au tirage de la boule dans l'urne.
L'expérience globale possède 6 issues combinaison des issues des deux sous-expériences :
{(V,B), (V,W), (V,N), (N,B), (N,W), (N,N)}
Lors du lancer de la roue, nous avons les probabilités suivantes :

Evènement	V	N
Probabilité	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$

Lors du tirage de la boule, nous avons les probabilités suivantes :

Evènement	B	W	N
Probabilité	$\frac{4}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{2}{15}$

8.3.2 Définition

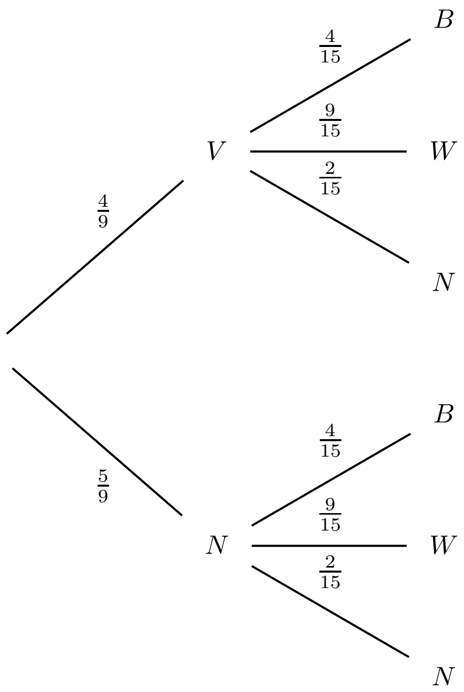
Définition 8.6: Expériences aléatoires indépendantes

On dit que plusieurs expériences aléatoires sont indépendantes lorsque, pour toute combinaison d'issues, la probabilité de cette combinaison est égale au produit des probabilités de chacune des issues composant la combinaison.

Typiquement, les deux expériences de la roue et de l'urne sont indépendantes. Ainsi, nous pouvons calculer les probabilités de chaque combinaison d'issues. Pour se faire, nous allons utiliser un outil graphique : l'arbre pondéré

8.3.3 Les arbres pondérés

Nous pouvons modéliser le jeu global de la manière suivante :



L'arbre se lit de la manière suivante :

1. Le premier niveau d'embranchement correspond au premier jeu, il y a donc deux branches correspondant aux deux issues du premier jeu.
2. Le second niveau d'embranchement correspond à la combinaison du premier jeu et du second jeu. Pour chaque noeud du premier niveau, on a donc 3 branches correspondant aux 3 issues du second jeu.
3. Les terminaisons de l'arbre correspond aux 6 issues possibles.
4. Enfin, on place au niveau de chaque embranchement la probabilité de l'issue.

Sachant que les deux expériences sont indépendantes, on obtient la probabilité d'une des 6 issues comme le produit des probabilités des branches conduisant à la terminaison de l'arbre correspondant à l'issue. Par exemple, l'issue (N, W) a pour probabilité $\frac{5}{9} \times \frac{9}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

__Exercice 8__

Calculer l'espérance puis la variance du jeu.

Chapitre 9

Loi binômiale et échantillonnage

« Deux intellectuels assis vont moins loin qu'une brute qui marche. »
MICHEL AUDIARD, extrait du film *Un Taxi pour Tobrouk*

9.1 Définitions

9.1.1 Épreuve de Bernouilli

Une *épreuve de Bernouilli* est une expérience aléatoire qui possède deux issues. Par convention, l'une des issues sera appelée *succès* et l'autre *échec*.
Si p est la probabilité de succès, on dire que l'épreuve de Bernouilli est de paramètre p.

9.1.2 Schéma de Bernouilli

Soit n un nombre entier naturel.
Une succession de n épreuves de Bernouilli indépendantes de paramètre p s'appelle un *schéma de Bernouilli* de paramètres n, p.

9.1.3 Loi Binomiale

Soit une succession de n épreuves de Bernouilli indépendantes de paramètre p. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. La loi de probabilité suivie par X s'appelle une *loi binomiale* de paramètres n, p.

9.1.4 Exemple de calcul de loi binomiale

9.1.4.1 L'exemple

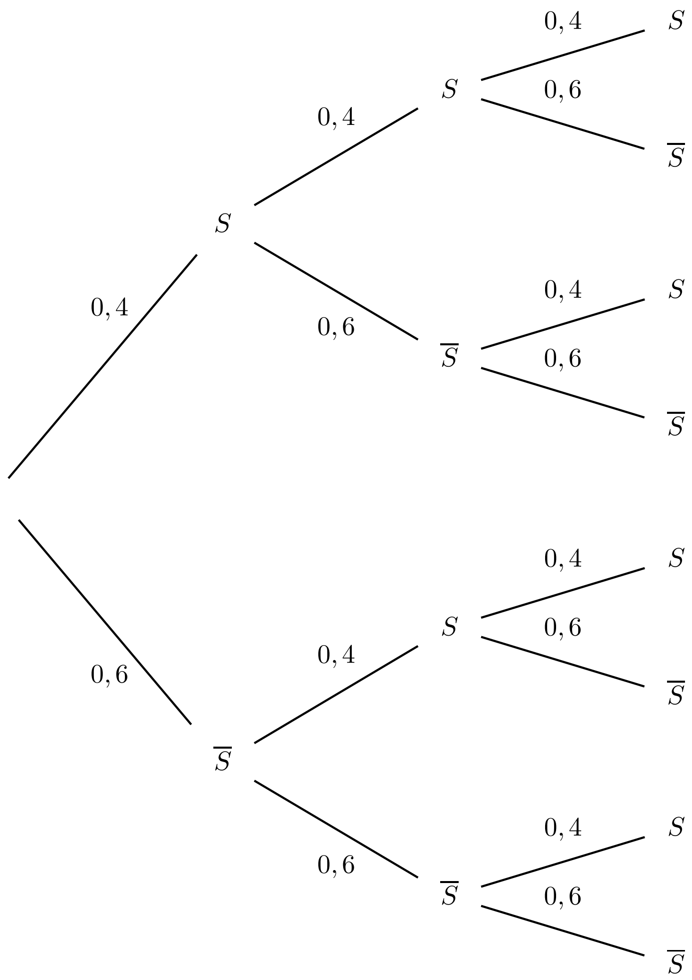
Toutes les secondes une puce fait :
- soit un saut de 1m vers l'avant avec une probabilité de $0,4$
- soit une pause

Le comportement de la puce à chaque seconde est indépendant des secondes précédentes.
On note X la distance parcourue en $3s$.
X suit ainsi une loi binomiale de paramètres $3; 0,4$ puisque X est la somme de 3 épreuves de Bernouilli de paramètres $0,4$ indépendantes.

9.1.4.2 Calcul de la loi de probabilité

On note :
- S l'issue «la puce saute»
- $\overline{S}$ l'issue «la puce fait une pause»

L'arbre de cette expérience peut être représenté de la manière suivante :



On en déduit que :
1. $X = 0$ est réalisé par 1 terminaison de probabilité $0,6^3$, soit avec une probabilité $0,6^3 = 0,216$.
2. $X = 1$ est réalisé par 3 terminaisons de probabilité $0,4 \times 0,6^2$, soit avec une probabilité $3 \times 0,4 \times 0,6^2 = 0,432$.
3. $X = 2$ est réalisé par 3 terminaisons de probabilité $0,4^2 \times 0,6$, soit avec une probabilité $3 \times 0,4^2 \times 0,6 = 0,288$.
4. $X = 3$ est réalisé par 1 terminaison de probabilité $0,4^3$, soit avec une probabilité $0,4^3 = 0,064$.

Ainsi la loi de probabilité de X est :

Valeur de X	0	1	2	3
Probabilité	$0,216$	$0,432$	$0,288$	$0,064$

Nous venons ainsi de calculer une loi binomiale $\mathcal{B}(3;0,4)$

9.2 Outils pour le calcul de lois binomiales

9.2.1 Coefficient binomiaux

9.2.1.1 Définition

Soit l'arbre pondéré associé à la répétition de n épreuves de Bernouilli.
Soit k un nombre entier. On appelle *coefficient binomial* $n; k$ le nombre de terminaisons de l'arbre réalisant k succès.
On note $\binom{n}{k}$ ce coefficient.

9.2.1.2 Exemple de calcul de coefficients binomiaux

En reprenant l'exemple de la saut de la puce traité au paragraphe précédent, on a :

$$\binom{3}{0} = 1$$
$$\binom{3}{1} = 3$$
$$\binom{3}{2} = 3$$
$$\binom{3}{3} = 1$$

9.2.1.3 Triangle de Pascal

Il existe un lien entre les coefficients binomiaux qui nous permet de les calculer par récurrence.

Proposition 9.0: Formule de Pascal

$$\forall n \geq 2, \forall k \geq 1, \; \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Démonstration. On distingue les chemins réalisant k succès de la manière suivante :

1. Ceux qui appartiennent au sous-arbre «du haut». Il y en a $\binom{n-1}{k-1}$.
2. Ceux qui appartiennent au sous-arbre «du bas». Il y en a $\binom{n-1}{k}$.

Nous obtenons donc la formule attendue. □

9.2.2 Formulation de la loi binomiale

Avec ces notations, si X suit une la loi binomiale de paramètres $n; p$, on a

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

9.2.3 Espérance et variance de la loi binomiale

Si X suit une loi binômiale $\mathcal{B}(n; p)$, on a

$$\boxed{E(X) = np} \text{ et } \boxed{V(X) = np(1-p)}$$

9.3 Application à l'échantillonnage

9.3.1 Deux problèmes ouverts

9.3.1.1 Le problème de la parité

Dans un parlement de 150 élus, on compte 60 femmes. Peut-on considérer que ce parlement respecte la parité ? Si oui, avec quel critère ?

9.3.1.2 Les yeux bleus

Dans une classe de 36 élèves, 3 ont les yeux bleus. Sachant qu'en France, la proportion de personnes aux yeux bleus est de $0,31$, cette classe est-elle représentative de la population française en ce qui concerne le critère des yeux bleus ?

> Remarque importante : Considérons l'expérience aléatoire suivante : «on rencontre un français au hasard» et supposons que toutes les issues sont équiprobables.
> La probabilité de l'évènement «ce français a les yeux bleus» est identique à la proportion de français qui ont les yeux bleus. Ce résultat provient de l'hypothèse d'équirépartion des probabilités.

9.3.2 Modélisation

9.3.2.1 Rappel : Notion d'échantillon

> **Définition 9.0: Échantillon**
> *Considérons une expérience aléatoire et n un nombre entier. On appelle* échantillon de taille n *les n résultats obtenus lors des n réalisations indépendantes de cette expérience aléatoire.*

9.3.2.2 Modélisation des deux problèmes précédents

La parité du parlement :
La plupart des gens pensent que la parité doit impliquer un nombre identique de postes occupés par des hommes et par des femmes. En fait, cela est pratiquement impossible et surtout cette solution manque de subtilité. Nous pouvons le reformuler de cette manière :
On choisit au hasard 150 personnes en France, et on appelle X le nombre de femmes présentes dans cet échantillon. Le parlement est-il un échantillon normal compte-tenu de la loi de X ?
Si on prélève 150 personnes dans la population française, on ne change pratiquement pas la proportion de femmes dans le reste de la population. Ainsi, un prélèvement de 150 personnes correspond à une succession de tirages sans remise.
Fort de cette remarque, nous en concluons que X est en fait une loi binomiale $\mathcal{B}(150; p)$ où p est la proportion de femmes dans la population française.

Les yeux bleus :
De même, nous pouvons, pour savoir si la classe est "représentative", la comparer avec ce que l'on obtient si on prélève au hasard un échantillon de 36 personnes en France et que l'on s'intéresse à la variable Y qui compte le nombre de personnes aux yeux bleus obtenues.
Par les mêmes arguments, on obtient que Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(36; 0,31)$.

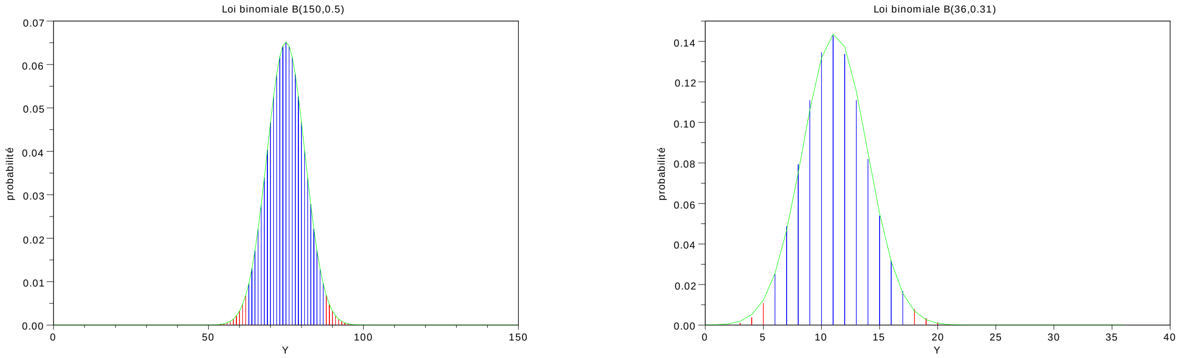


FIGURE 9.1 – Nos deux exemples

9.3.2.3 La distribution binomiale

Supposons que la proportion de femmes dans la population est exactement $0,5$ et intéressons-nous à
- — la loi que suit X, i.e. $\mathcal{B}(150;0,5)$.
- — la loi que suit Y, i.e. $\mathcal{B}(36;0,31)$.

Les graphiques plus bas représentent la répartition des probabilités de X et de Y.

(Remarque 0) Ces deux graphiques montrent que les probabilités sont concentrées autour de certaines valeurs. Dit autrement, il est très peu probable que X et Y prennent leurs valeurs en dehors des deux intervalles centraux.

L'objet du paragraphe suivant est de définir cet intervalle central appelé intervalle de fluctuation.

9.3.2.4 Définition d'un intervalle de la fluctuation

On considère une variable aléatoire Z qui compte le nombre de fois où apparaît un évènement E lors d'un échantillonnage de taille n. Nous avons vu précédemment que si $P(E) = p$ alors Z suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Définition 9.1: Intervalle de fluctuation

Avec les hypothèses précédentes, l'intervalle de fluctuation à 95% du nombre de fois où E se réalise est l'intervalle $[\alpha;\beta]$ avec

$$\begin{array}{ll} \alpha & : \textit{le plus petit entier } i \textit{ tel que } P(Z \leq i) > 0,025 \\ \beta & : \textit{le plus petit entier } j \textit{ tel que } P(Z \leq j) \geq 0,975 \end{array}$$

De plus, on a alors $P(\alpha \leq Z \leq \beta) \geq 0,95$, soit $\boxed{P(Z \in [\alpha;\beta]) \geq 0,95}$

Démonstration. Soient les nombres α et β tels que définis précédemment.
Il suffit de montrer que $P(Z \in [\alpha;\beta]) \geq 0,95$.
Notons que l'ensemble des nombres entiers de l'intervalle $[0;\beta]$ peut être séparé en deux sous-ensembles disjoints :

1. Les nombres entiers de $[0;\alpha-1]$
2. les nombres entiers de $[\alpha;\beta]$

Ainsi, on en déduit $P(Z \in [0;\alpha-1]) + P(Z \in [\alpha;\beta]) = P(Z \in [0;\beta])$.
Par suite, $P(Z \in [\alpha;\beta]) = P(Z \in [0;\beta]) - P(Z \in [0;\alpha-1])$.
Par définition de α et β :
$P(Z \leq \alpha-1) \leq 0,025$ et $P(Z \leq \beta) \geq 0,975$. En particulier :
$-P(Z \leq \alpha-1) \geq -0,025$ et $P(Z \leq \beta) \geq 0,975$. En sommant ces deux inégalités :

$P(Z \leq \beta) - P(Z \leq \alpha - 1) \geq 0,975 - 0,025$, ce qui donne bien : $P(Z \in [\alpha;\beta]) \geq 0,95$.
Par ailleurs, α et β sont choisis de manière à obtenir un intervalle de confiance « centré » en probabilité et le plus large possible. □

On voit qu'en pratique, pour calculer un intervalle de définition, on a besoin de connaître, pour tout k entier compris entre 0 et n, la valeur de $P(Z \leq k)$.
Ceci conduit à définir les distributions cumulées de la loi binomiale.

Définition 9.2: Distribution cumulée croissante
Soit Z une variable aléatoire prenant des valeurs entières.
On définit la distribution cumulée par l'application qui à tout nombre entier k associe $P(Z \leq k)$.

(Remarque 1) La suite des $P(Z \leq k)$ est croissante. En effet, l'évènement $Z \leq k$ est inclus dans l'évènement $Z \leq k+1$

(Remarque 2) Avec vos calculatrices, vous pouvez calculer des distributions cumulées croissantes.

Méthode 9.0: Calculer une distribution cumulée croissante
À titre d'exemple, on va déterminer la distribution cumulée croissante d'une loi $\mathcal{B}(150;0,5)$.

(Étape n° 1) On se rend dans le menu d'édition des listes :
Aller dans le menu `stats` *, puis* `EDIT` *et sélectionner* `1` `:Edite.`

(Étape n° 2) On remplit la liste `L1` *avec les entiers de 0 et 100 :*
On se place sur l'entête de `L1` *puis on inscrit la formule* `suite(X,X,0,150).`
La fonction `suite` *se situe dans le menu* `2nde` + `stats` *puis* `OPS` *et* `5` `:suite.`

(Étape n° 3) Dans la liste `L2` *on va calculer les valeurs de $P(X \leq k)$ où X est une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{B}(150;0,5)$ et où k correspond aux valeurs de la liste* `L1`*. Pour cela :*
On se place sur l'entête de `L2` *puis on inscrit la formule* `binomFrép(150,0.5,L1).`
La fonction `binomFrép` *se situe dans le menu* `2nde` + `var` *puis* `DISTRIB` *et* `A` `:binomFrép`

Méthode 9.1: Calculer un intervalle de fluctuation à 95%
Pour calculer l'intervalle de fluctuation d'une variable Z suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, on procède de la manière suivante.

1. *On calcule la distribution cumulée croissante.*
2. *On fait varier k de 0 à n.*
3. *La plus petit k tel que $P(Z \leq k) > 0,025$ correspond à la borne inférieure de l'intervalle de fluctuation, notée α*
4. *Le plus petit k tel que $P(Z \leq k) \geq 0,975$ correspond à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation, notée β*

Démonstration. Cette méthode correspond à la définition 9.3.2.4. □

Exercice 0

Reprendre les deux problèmes ouverts et, à l'aide de votre calculatrice, déterminer les intervalles de fluctuations pour chacune des deux lois.
Conclure.

Annexe A

Algorithmique

Nous allons ici exposer et mettre en œuvre quelques notions d'algorithmique à travers des exemples qui utilisent les résultats du cours. Les applications de l'algorithmique sont nombreuses et variées : depuis la robotique jusqu'à la programmation informatique.
Nous programmerons dans 2 langages : celui de la calculatrice `TI` et le langage `Algobox`.

A.1 Introduction à l'algorithmique

Le mot algorithme vient du nom d'un mathématicien perse Al Khuwarizmi [1].

Définition A.0: Algorithme, entrée, sortie
Un algorithme est une séquence d'instructions visant à produire un résultat ou une opération à partir d'une certaine situation de départ.
On appelle souvent entrée *la situation de départ et* sortie *le résultat de l'algorithme.*

premier exemple
Prenons l'exemple d'un algorithme simple qui consiste à sortir de la salle de classe. On pourrait écrire cette séquence de la manière suivante :

```
Je me dirige vers la porte.
J'ouvre la porte.
Je sors de la classe
```

Notons ici que la séquence d'instructions ne tient pas compte du fait que la porte soit ouverte ou non. Nous verrons plus tard comment prendre en compte une telle condition.

A.1.1 Instructions, variables

A.1.1.1 Instructions

Un algorithme définit une suite structurée d'actions de l'ordinateur. Lorsque l'on demande à l'ordinateur d'accomplir une action, on parle d'*instruction*.

1. né vers 780, mort vers 850

Définition A.1: Instruction

Une instruction est un ordre donné à la machine. Ainsi, dans un algorithme, on peut demander, entre autre, à la machine :

— *d'afficher un message ou une image à l'écran*
— *de lire une donnée depuis une saisie clavier, une action de la souris ou un emplacement de la mémoire*
— *d'écrire dans la mémoire*
— *de faire un calcul numérique*
— *de faire un calcul logique*

A.1.1.2 Variables

Dans un algorithme, on demande souvent à l'ordinateur de manipuler :

— des nombres
— des chaînes de caractère
— des variables de type VRAI / FAUX [2]

Quand l'ordinateur manipule de telles grandeurs, il les stocke en mémoire. Aussi, on doit spécifier à l'ordinateur qu'il doit créer cet espace de stockage dans sa mémoire. La taille de l'espace en question et la manière dont l'ordinateur gère ce stockage dépend souvent du type de grandeur manipulée.

Définition A.2: Variable

Une variable est un emplacement dans la mémoire de l'ordinateur que l'on désigne par un nom*.*
Lorsqu'on décide de créer un tel emplacement, on doit spécifier :

— *un nom pour la variable*
— *le type de variable que l'on souhaite créer*

Les types de variable dépendent du langage informatique utilisé. Dans le cas d'`algobox` *et pour ce qui nous intéresse, les types sont :*

— *des nombres*
— *des chaînes de caractère*

On appelle déclaration *l'action de spécifier le nom et le type d'une variable.*
On appelle affectation (ou écriture) *l'action de stocker une valeur donnée dans l'espace mémoire correspondant à une variable*
Enfin, on appelle lecture de variable *le fait de récupérer le contenu de l'espace mémoire correspondant à une variable.*

En résumé, on utilise les variables pour stocker des données dans une case mémoire. Afin de manipuler des variables, il faut d'abord les créer (=les déclarer) puis on peut dans la suite de l'algorithme lire et écrire dans cet espace mémoire. On lit ou on écrit une variable en spécifiant son nom à la machine.

A.1.2 Un exemple issu de la géométrie cartésienne

On souhaite écrire un programme qui

1. demande à l'utilisateur de rentrer les valeurs de coordonnées de A et B
2. calcule les coordonnées du milieu de $[AB]$ ainsi que la distance AB

Au tout début de votre manuel se trouve un petit livret consacré à l'algorithmique.
La page XXVIII donne les commandes utiles pour écrire un programme et l'exécuter.

2. on appelle cela des variables *booléennes*

Exercice 0

Nous allons maintenant écrire un petit programme de calcul de distance et de coordonnées de milieu.

1. *Écrire la programme suivant avec votre `TI` :*

```
INPUT "XA", T
INPUT "YA", U
INPUT "XB", V
INPUT "YB", W
DISP "LE CARRE DE LA DISTANCE EST:", (V-T)^2+(W-U)^2
DISP "LE MILIEU EST:", (V+T)/2, (W+U)/2
```

2. *Tester le programme avec les points $A(0;1)$ et $B(1;0)$. Le résultat obtenu confirme-t-il vos attentes ?*

A.1.3 Instructions conditionnelles et boucles

Reprenons l'exemple de l'algorithme de la sortie de classe et essayons de l'affiner un peu. En fait, on aimerait que l'algorithme prenne en compte le fait que la porte soit ouverte ou non. Écrivons la version améliorée, en français :

```
Je me dirige vers la porte
    Si la porte est fermée:
        J'ouvre la porte
        Je sors de la classe
    Si la porte est ouverte:
        Je sors de la classe
```

La plupart des langages de programmation permettent de réaliser des séquences d'instructions différentes selon qu'une condition est vérifiée ou non. Pour reprendre une image connue, cela correspond à un "aiguillage" dans le programme. Un tel aiguillage s'appelle une *instruction conditionnelle*.

un autre exemple
Imaginons que l'on souhaite écrire un algorithme pour un basketeur qui doit effectuer 100 fois la même tache en entraînement, par exemple «marquer un coup franc». On pourrait bien sûr écrire :

```
Je me place sur la ligne
Je vise le panier
Je lance
Je me place sur la ligne
Je vise le panier
Je lance
Je me place sur la ligne
Je vise le panier
Je lance
...
```

Heureusement, presque tous les langages de programmation permettent de dire à la machine d'effectuer 100 fois la même tache.
Ainsi, on pourra écrire :

```
    100 fois de suite:
        Je me place sur la ligne
```

```
        Je vise le panier
        Je lance
```

On appelle un tel procédé une *boucle*.

A.1.3.1 Instructions conditionnelles

Définition A.3: Instruction conditionnelle
Une instruction conditionnelle est une instruction qui ne s'exécute que si une certaine condition est vérifiée.

Suivant les langages, la synthaxe et la variété des instructions conditionnelles varie. La plus célèbre d'entre elle, présente dans presque tous les langages de programmation s'appelle *if ... then ... end*. En français, cela s'écrit :

```
    Si telle condition est vérifiée alors:
        Faire action 1
        Faire action 2
        ...
```

A.1.3.2 Une application avec les distances

On se donne les coordonnées 3 points A, B et C et on aimerait savoir si le triangle est rectangle en A. Pour cela on écrit l'algorithme suivant :

```
Déclaration de variables:
    Je déclare une variable que j'appelle Xa et qui est de type nombre
    Je déclare une variable que j'appelle Ya et qui est de type nombre
    Je déclare une variable que j'appelle Xb et qui est de type nombre
    Je déclare une variable que j'appelle Yb et qui est de type nombre
    Je déclare une variable que j'appelle Xc et qui est de type nombre
    Je déclare une variable que j'appelle Yc et qui est de type nombre
    Je déclare une variable que j'appelle AB2 et qui est de type nombre
    Je déclare une variable que j'appelle AC2 et qui est de type nombre
    Je déclare une variable que j'appelle BC2 et qui est de type nombre
Instructions:
    J'affecte à la variable Xa la valeur entrée par l'utilisateur au clavier
    J'affecte à la variable Ya la valeur entrée par l'utilisateur au clavier
    J'affecte à la variable Xb la valeur entrée par l'utilisateur au clavier
    J'affecte à la variable Yb la valeur entrée par l'utilisateur au clavier
    J'affecte à la variable Xc la valeur entrée par l'utilisateur au clavier
    J'affecte à la variable Yc la valeur entrée par l'utilisateur au clavier
    J'affecte à la variable AB2 la valeur (Xa-Xb)^2+(Ya-Yb)^2
    J'affecte à la variable AC2 la valeur (Xa-Xc)^2+(Ya-Yc)^2
    J'affecte à la variable BC2 la valeur (Xb-Xc)^2+(Yb-Yc)^2
    Si BC2=AC2+AB2:
        J'affiche «Oui, le triangle ABC est rectangle en A»
    Si BC2≠AC2+AB2:
        J'affiche «Non, le triangle ABC n'est pas rectangle en A»
```

Exercice 1

Écrire ce programme dans `Algobox` *ou dans la* `TI`*. Si vous utilisez la* `TI`*, la phase de déclaration de variable n'est pas nécessaire.*

A.1.3.3 Boucles

Définition A.4: Boucle
Une boucle est une séquence d'instructions répétées un nombre donné de fois.

Là encore, il peut y avoir des différences selon les langages de programmation. La boucle la plus présente est la boucle *for ... ... end*. En français on peut l'écrire :

```
x fois de suite:
    Faire action 1
    Faire action 2
    ...
```

A.1.3.4 Boucles conditionnelles

Définition A.5: Boucle conditionnelle
Une boucle conditionnelle est une série d'instructions qui s'exécute tant qu'une certaine condition est vérifiée. En français, une telle boucle s'appelle `TANT QUE`*.*

En reprenant l'exemple du basketeur, on peut améliorer son entraînement de la manière suivante en se disant qu'il arrête l'entraînement dès qu'il a marqué 5 paniers de suite :

```
Tant que je n'ai pas marqué 5 paniers de suite:
    Je me place sur la ligne
    Je vise le panier
    Je lance
```

Dans la plupart des langages une telle boucle s'écrit *while ... ... end*.

A.2 Deux programmes un peu plus complexes

A.2.1 Le jeu de devinette

On aimerait programmer un petit jeu de devinette dont les règles sont la suivantes :

(Étape 1) L'ordinateur choisit un nombre entier au hasard entre 1 et 1000.

(Étape 2) Tant que l'utilisateur n'a pas deviné le bon nombre :

- (Sous-étape 1) L'utilisateur propose un nombre
- (Sous-étape 2) Si le nombre est trop grand l'ordinateur répond «au dessus»
- (Sous-étape 3) Si le nombre est trop petit, il répond «en dessous»
- (Sous-étape 4) Si l'utilisateur trouve ce nombre, l'ordinateur répond «gagné !»

En français, un tel algorithme s'écrira :

```
Déclaration de variables:
    Je déclare une variable que j'appelle nombrechoisi et qui est de type nombre
    Je déclare une variable que j'appelle proposition et qui est de type nombre
Instructions:
    J'affecte à la variable nombrechoisi une valeur au hasard entre 1 et 1000
    J'affecte à la variable proposition le nombre 0
    Tant que nombrechoisi ≠ proposition:
        J'affecte à la variable proposition la valeur entrée par l'utilisateur.
        Si proposition > nombrechoisi:
            L'ordinateur affiche «au dessus».
        Si proposition < nombrechoisi:
            L'ordinateur affiche «au dessous».
        Si proposition = nombrechoisi:
            L'ordinateur affiche «gagné».
```

Exercice 2

Créer un tel programme dans Algobox ou dans la `TI`. Pour créer un nombre au hasard entre 1 et 1000 avec `Algobox`, vous utiliserez la syntaxe suivante : `ALGOBOX_ALEA_ENT(1,1000)`.

A.2.2 La dichotomie

L'idée de la dichotomie est exactement basée sur l'exemple du jeu de devinette précédent.
Prenons un exemple concret : le calcul de $\sqrt{2}$.
On sait a priori que $\sqrt{2}$ est compris entre 2 et 1. En effet, on vérifie aisément : $1^2 < 2$ et $2 < 2^2$.
De cette inégalité, nous déduisons également que 1 est une approximation par défaut de $\sqrt{2}$ et que 2 est une approximation par excès de $\sqrt{2}$. Nous allons chercher à réduire de proche en proche l'écart entre l'approximation et la vraie valeur.
On calcule $1.5^2 = 2.25$. Ainsi 1.5 est encore une approximation par excès de $\sqrt{2}$ donc nous en déduisons un meilleur encadrement de $\sqrt{2}$: entre 1 et 1.5 et nous savons que l'écart maximal entre $\sqrt{2}$ et cet approximation est 0.5.
Nous pouvons poursuivre encore cette démarche en se fixant une limite à l'écart maximal de l'erreur. Une telle méthode s'appelle dichotomie.

Exercice 3

Écrire en français un algorithme de dichotomie permettant de calculer une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près. On pourra déclarer 2 variables :
- *une variable e qui stockera l'approximation par excès*
- *une variable d qui stockera l'approximation par défaut*

et utiliser une boucle conditionnelle de type `TANT QUE`.
Dans un second temps, implémenter et tester cet algorithme dans `algobox` ou avec la `TI`.

Annexe B

Usage de la calculatrice

Nous rappelons ici les principales fonctions de la calculatrice qui vont nous être utiles pour traiter des problèmes de mathématiques.
L'organisation du chapitre suit les thèmes du programme de seconde.
Plutôt que d'énoncer une liste fastidieuse de commandes pour chaque fonctionnalité, nous allons traiter des cas concrets d'exercice.

B.1 Les fonctions

B.1.1 Énoncé

Exercice 0

Soit la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2+x+2 \end{array}$$

Pour toutes les questions suivantes, il est demandé d'utiliser la calculatrice uniquement. Aucun calcul n'est exigé. Toutes les réponses doivent être fournies ***avec une précision de 0,01****.*

1. *Reproduire et remplir le tableau suivant :*

x	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$f(x)$									

2. *Tracer à l'écran la courbe de f pour des abscisses comprises entre $-2,5$ et $2,5$.* *Conjecturer le tableau de variation de f sur $[-2,5;2,5]$.*
3. *Déterminer l'extrêmum de f (lieu, type, valeur).*
4. *Déterminer les antécédents de 0 par f. On définit la fonction*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -3x+1 \end{array}$$

5. *Tracer également la courbe de g puis déterminer les solutions de $f(x)=g(x)$ avec une précision de $0,01$.*

B.1.2 Résolution

Pour résoudre cette exercice, vous devrez suivre les étapes décrites ici :

1. Pour obtenir le tableau de valeur de f

`mode`	*Menu des réglages généraux*
On vérifie que `Fct` est sélectionné	*Pour pouvoir définir la fonction f*
$f(x)$	*Menu de définition des fonctions*
On définit `Y1=x^2+x+2`	*$Y1$ correspond à la fonction f*
`2nde` + `fenêtre` (déf table)	*Réglage des paramètres des tableaux de valeurs.*
On règle `DébTbl=-2` `Pas=0.5`	*x commence en -2 et le pas est de $0,5$*
`2nde` + `graphe` (table)	*Pour obtenir le tableau de valeurs de f, lire la colonne de $Y1$*

2. Pour tracer la courbe de f

`fenêtre`	*Menu des réglages de la fenêtre graphique*
On règle `Xmin=-2.5` `Xmax=2.5` `Xgrad=1` `Ymin=0` `Ymax=8` `Ygrad=1` `Xres=1`	*On règle la taille de la fenêtre en fonction du tableau de valeurs de f*
`graphe`	*La courbe de f apparaît.*

3. Pour déterminer l'extrêmum de f

`graphe`	*On a la courbe de f à l'écran*
`2nde` + `trace` (calculs)	*C'est le menu des calculs*
On sélectionne `3` `:Minimum`	*Car on voit à l'écran que f admet un minimum*
On positionne le curseur avant le minimum puis on valide avec `entrer` . On positionne le curseur après le minimum puis on valide.	*On donne à la machine un encadrement du minimum*
On définit la valeur initiale n'importe où puis on valide.	
À l'écran on lit `X=-.50000` et `Y=1.75`	*Le minimum de f est atteint en $x = 0,5$ et vaut $1,75$.*

4. Pour tracer la courbe de g et déterminer les antécédents de 0

`f(x)` puis on édite `Y2=-3*x+1`	*$Y2$ correspond à la fonction g*
`graphe`	*La courbe de g apparaît.*
`2nde` + `trace` on sélectionne 2 `:Zero`	*C'est la fonction qui permet de déterminer les antécédents de 0*
On sélectionne la bonne courbe puis on valide avec `entrer` . On positionne le curseur avant l'antécédent puis on valide. On positionne le curseur après l'antécédent puis on valide. On définit la valeur initiale n'importe où puis on valide.	*On donne à la machine un encadrement du minimum*
À l'écran on lit `X=.3333` et `Y=0`	*L'antécédent de 0 est $x \simeq 0,3333$.*

5. Pour déterminer les solutions de $f(x) = g(x)$:

`graphe`	*On a les 2 courbes à l'écran.*
`zoom` on sélectionne 3 `:Zoom -`	*Pour dézoomer.*
`2nde` + `trace` on sélectionne 5 `:Intersect`	*C'est la fonction qui permet de déterminer les intersections des 2 courbes*
On sélectionne les 2 courbes en validant 2 fois avec `entrer` .	
On positionne la valeur initiale à gauche de la première intersection puis on valide.	*On définit la valeur initiale*
À l'écran on lit `X=-3.7320` et `Y=12.1961`	*La première solution est $x \simeq -3,7320$.*
`2nde` + `trace` on sélectionne 5 `:Intersect`	*C'est la fonction qui permet de déterminer les intersections des 2 courbes*
On sélectionne les 2 courbes en validant 2 fois avec `entrer` .	
On positionne la valeur initiale à droite de la seconde intersection puis on valide.	*On définit la valeur initiale*
À l'écran on lit `X=-.2679` et `Y=1.8038`	*La seconde solution est $x \simeq -0,2679$.*

B.2 Statistiques

B.2.1 Énoncé

Exercice 1

On a mesuré quotidiennement en décembre 2011 les précipitations (en mm) dans la ville de Sciez en Savoie. On obtient la série suivante :

0 10,4 4,8 1,8 13,6 2,8 11,2 2 0,4 0,4 0 16,4 5 9,4 14,2 32
0,8 1,6 0,8 3,6 1,2 0 0 1,8 0 0 0 0 0 10,4 10,4

1. *Quel est l'effectif de la série ?*
2. *Donner la moyenne, la médiane, le premier quartile, le troisième quartile.*

Exercice 2

On s'intéresse à la masse salariale de l'entreprise A. Le tableau suivant donnent les salaires perçus (en € par mois) dans l'entreprise ainsi que les effectifs pour chacun des salaires.

Entreprise A	1200	1500	1800	2200	2800	3200	4800	12500
Effectifs	20	15	14	11	12	3	3	2

1. *Donner le salaire moyen, le salaire médian, le premier quartile, le troisième quartile, l'effectif total.*
2. *Déterminer les effectifs cumulés par salaire puis les fréquences cumulées pour chaque salaire.*

B.2.2 Résolution

Voici les manipulations à faire pour résoudre l'exercice 1 :

`stats`	*Menu des statistiques.*
`EDIT` on sélectionne `1` `:Edite`	*Pour éditer les listes de valeur.*
Si la liste `L1` n'est pas vide, on se place sur l'entête `L1` , `annul` puis `entrer`	*Pour vider la liste `L1`*
On entre dans la colonne `L1` les valeurs de la série.	*Pour entrer les valeurs de la série.*
`stats` puis `CALC` puis `1` `:Stats 1-Var`	*Cette fonction permet de calculer les indicateurs de séries statistiques.*
On précise `Stats 1-Var L1` puis `entrer` (On obtient `L1` avec `2nde` + `1`)	*On obtient les indicateurs de notre série.*
On lit $\overline{x}$=5 `n=31` `Q1=0` `Med=1.8` `Q3=10.4`	*$\overline{x}$, `n`, `Q1`, `Med`, `Q3` correspondent respectivement à la moyenne, l'effectif, le premier quartile, la médiane, le troisième quartile.*

Voici les manipulations à faire pour résoudre l'exercice 2 :

`stats` puis **EDIT** puis **1** `:Edite` Si les listes `L2` et `L3` ne sont pas vides, il faut les vider.	*Pour éditer les listes de valeurs.*
On entre dans la colonne `L2` les valeurs des salaires puis dans la colonne `L3` les effectifs correspondants.	*On a ainsi le tableau valeurs / effectifs reproduit dans les colonnes `L2` et `L3`.*
`stats` puis **CALC** puis **1** `:Stats 1-Var` puis on précise `Stats 1-Var L2, L3` et enfin `entrer` (On obtient `L2` avec `2nde` + `2`)	*On obtient les indicateurs de notre entreprise.*
On lit $\overline{x}$=`2231.25` `n=80` `Q1=1350` `Med=1800` `Q3=2500`	*$\overline{x}$, `n`, `Q1`, `Med`, `Q3` correspondent respectivement à la moyenne, l'effectif, le premier quartile, la médiane, le troisième quartile.*
`stats` puis puis **EDIT** puis **1** `:Edite` On se place sur l'entête de **L3**	*On retourne dans l'édition des listes de valeurs*
puis `2nde` + `stats` (listes) puis **OPS** puis **6** `:somCum`	*Cette fonction permet de faire une somme cumulée.*
On écrit `somCum(L3)` puis `entrer`	*`L4` se remplit avec les valeurs de la somme cumulée de `L3`, ce qui correspond à l'effectif cumulé des salaires.*

Table des matières