Cours de Mathématiques de Terminale STMG

Pierre-Alexandre Fournié

2017

Introduction

Le matériel

Afin de faire des mathématiques dans de bonnes conditions, les élèves doivent se munir à chaque séance :

- du manuel
- d'un protège document (60 vues au moins)
- du cahier d'exercices (ou d'un classeur)
- d'au moins un stylo, un crayon de papier ou un criterium, et d'une gomme
- d'une calculatrice de modèle `TI 82 Stat`[1]
- d'une règle
- d'un surligneur

Utilisation de l'informatique

Il est recommandé aux élèves de télécharger et d'installer les 4 logiciels suivants sur un ordinateur à la maison.

1. un logiciel de tableur tel que `Libre Office` ou `Open Office`
   https ://fr.libreoffice.org/
2. `Anki`[2], un outil d'aide à la mémorisation basé sur le système des flash cards :
   http ://ankisrs.net/

Par ailleurs, afin de s'entraîner au baccalauréat, nous travaillerons régulièrement sur des annales. L'association des professeurs de mathématiques centralise les sujets ainsi que les corrections. Vous pouvez consulter ces annales à l'adresse suivante :

`http://www.apmep.fr/-Terminale-STG-190-sujets-`

Enfin, les élèves qui auraient des questions peuvent m'envoyer un mail à l'adresse :

`pierrealexandre.fournie.prof@gmail.com`

> Ne m'envoyez pas de questions la veille de l'examen car je risque alors de ne pas y répondre à temps.

1. c'est le choix du lycée en la matière
2. Ce logiciel peut également s'installer sur un smartphone `Apple` ou `Android`

Table des matières

Chapitre 1

Évolutions et suites

1.1 Évolutions

Définition : Coefficient multiplicateur, taux d'évolution

Soient $V_{initiale}$ *et* V_{finale} *deux valeurs positives avec* $V_{initiale} \neq 0$.
Le coefficient multiplicateur de $V_{initiale}$ *à* V_{finale} *est le nombre :*

$$\boxed{C = \frac{V_{finale}}{V_{initiale}}}$$

Le taux d'évolution de $V_{initiale}$ *à* V_{finale} *est le nombre :*

$$\boxed{t = \frac{V_{finale} - V_{initiale}}{V_{initiale}}}$$

Le coefficient multiplicateur et le taux d'évolution sont reliés par la formule :

$$\boxed{C = 1 + t}$$

Proposition : Évolutions successives, évolutions réciproques

Soient $V_{initiale}$, $V_{intermédiaire}$ *et* V_{finale} *trois valeurs positives avec* $V_{initiale} \neq 0$ *et* $V_{intermédiaire} \neq 0$.
Le coefficient multiplicateur de $V_{initiale}$ *à* V_{finale} *se calcule en fonction des coefficients multiplicateurs de* $V_{initiale}$ *à* $V_{intermédiaire}$ *et de* $V_{intermédiaire}$ *à* V_{finale}*, notés* C_1 *et* C_2 *:*

$$\boxed{C_{global} = \frac{V_{finale}}{V_{initiale}} = C_1 C_2}$$

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque de V_{finale} *à* $V_{initiale}$ *est le nombre :*

$$\boxed{C_{réciproque} = \frac{V_{initiale}}{V_{finale}} = \frac{1}{C_{direct}}}$$

Lorsqu'on calcule des évolutions successives ou des évolutions réciproques on repasse obligatoirement par les coefficients multiplicateurs.
Dans un second temps, on convertit les coefficients multiplicateurs en taux d'évolutions.

Entraînez-vous !

✎ *Exercice 0*

On donnera les taux en pourcentages arrondis à $0,1\%$ et les coefficients arrondis à $0,001$

1. *Un prix passe de 152 325 à 163 812, déterminer le taux d'évolution.*
2. *Après une augmentation de $2,5\%$, le prix d'une denrée est de 2532€/t. Quel était le prix initial de la denrée ?*
3. *Dans une ville, en 2005, le prix moyen des appartement était de 4250€/m^2. Ce prix a successivement subi des variations annuelles de $+5\%$ puis $+7\%$ et enfin -10%.*
   (a) *Quel est le prix moyen des appartements en 2008 ?*
   (b) *Quel est le taux d'évolution global entre 2005 et 2008 ?*
   (c) *Quel est le coefficient multiplicateur du prix entre 2005 et 2008 ?*
4. *Le prix TTC d'une denrée est de 199€. Quel est son prix HT, sachant que la TVA est de 20% ?*

Proposition : Taux d'évolution moyen

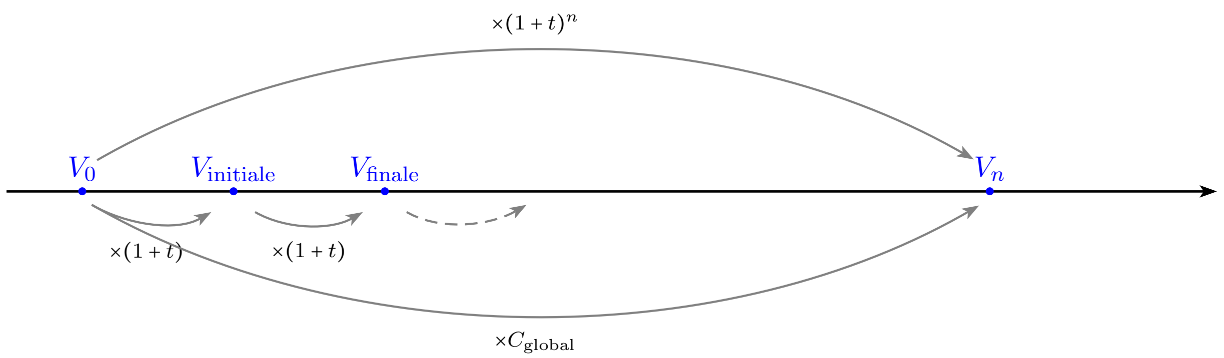
On considère une évolution sur n périodes où une grandeur passe de V_0 à V_n.
Alors le taux d'évolution moyen t_n sur ces n périodes vaut :

$$\boxed{t_n = \left(\frac{V_n}{V_0}\right)^{1/n} - 1}$$

Lorsqu'on connaît le taux coefficient multiplicateur global C_{global}, cette formule peut s'écrire de manière équivalente :

$$\boxed{t_n = C_{global}^{1/n} - 1}$$

Le calcul du taux d'évolution moyen provient de la résolution de l'équation $(1+t)^n = C_{0n}$ qui nous dit que le coefficient multiplicateur global correspond au coefficient multiplicateur de chaque période multiplié par lui-même n fois de suite comme l'indique le schéma ci-après.



On obtient la valeur de $2^{1/10}$ en tapant à la calculatrice ou au tableur `2^(1/10)`.
Le chapeau ^ permet d'introduire les puissances.

Exercice 1

On donnera les taux en pourcentages arrondis à $0,1\%$ et les nombres arrondis à $0,001$

1. *Donner les solutions des équations suivantes :*
   (a) $x^4 = 2,5$
   (b) $3x^{10} = 8$
   (c) $(x+1)^5 = 12$
   (d) $x^7 - 3 = 12$
2. *Le prix d'un produit passe de 1825€ à 1052€ en 4 ans.*
   (a) *Quel est le coefficient multiplicateur global sur les 4 années ?*
   (b) *Quel est le taux d'évolution global ?*
   (c) *Quel est le taux d'évolution annuel moyen ?*
3. *Le prix d'un produit est multiplié par 5 en 10 ans. Quel est le taux d'évolution annuel moyen sur ces 10 années ?*
4. *Le prix d'un produit subit les trois évolutions successives de $+10\%$, $+10\%$ puis -20%.*
   (a) *Quel est le coefficient multiplicateur global ?*
   (b) *Quel est le taux d'évolution global ?*
   (c) *Quel est le taux d'évolution moyen ?*

Définition : Indice

Soient $V_{initiale}$ et V_{finale} deux valeurs d'une grandeur positive.
*L'*indice base 100 relativement à V_{initiale} *de V_{finale} vaut :*

$$\boxed{I = 100 \times \frac{V_{finale}}{V_{initiale}}}$$

Un indice est en fait une grandeur fictive propositionnelle qui vaut 100 au moment où l'on observe V_{initiale}.
Pour calculer des indices, on utilisera donc des règles de proportionnalité.

Exercice 2

Le tableau ci-dessous indique le prix des appartements neufs en France métropolitaine, en euros par m^2, entre 2004 et 2009.

Année	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Prix	2 563	2 852	3 071	3 276	3 344	3 368
Indice	100					

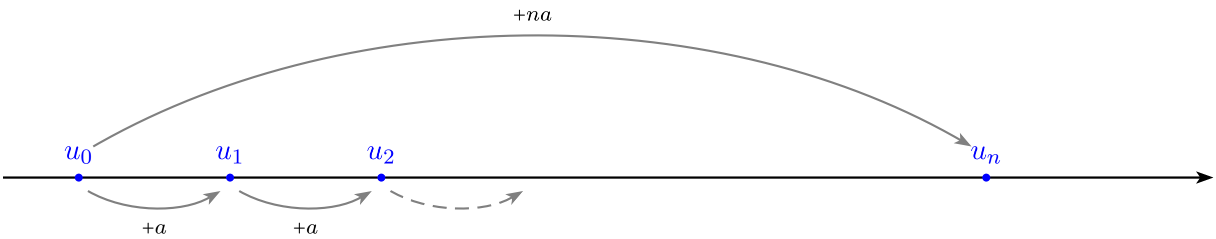
2004 correspond à l'année de référence pour l'indice.

1. *Quelles sont les valeurs de l'indice en 2005, 2006, 2007, 2008, 2009 ?*
2. *On suppose qu'entre 2009 et 2010, les prix ont baissé de $0,7\%$.*
   Quelle est la valeur de l'indice en 2010 ?
3. *Quel est le taux d'évolution global entre 2004 et 2009 ?*

1.2 Suites

Définition : Suite arithmétique

On dit qu'une suite u est arithmétique lorsqu'il existe un nombre fixé a tel que pour tout n, $u_{n+1} = u_n + a$.
a s'appelle la raison de u.



Proposition : Formule explicite d'une suite arithmétique

Soit une suite u arithmétique de raison a. Alors pour tout n :

$$\boxed{u_n = an + u_0}$$

Si la suite commence à u_1, on a également la formule :

$$\boxed{u_n = a(n-1) + u_1}$$

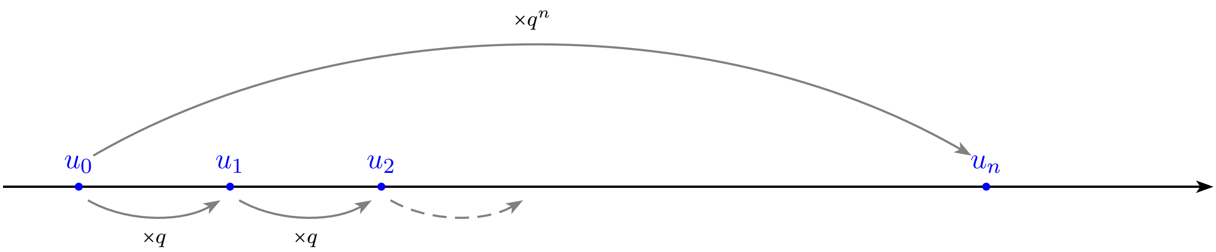
Proposition : Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit une suite u arithmétique de raison a. Alors, u est :

- *strictement croissante lorsque $a > 0$*
- *strictement décroissante lorsque $a < 0$*
- *constante lorsque $a = 0$*

Définition : Suite géométrique

On dit qu'une suite u est géométrique lorsqu'il existe un nombre fixé q tel que pour tout n, $u_{n+1} = qu_n$.
q s'appelle la raison de u.



Proposition : Formule explicite d'une suite géométrique

Soit une suite u géométrique de raison q. Alors pour tout n :

$$\boxed{u_n = u_0 q^n}$$

Si la suite commence à u_1, on a également la formule :

$$\boxed{u_n = u_1 q^{n-1}}$$

Proposition : Sens de variation d'une suite géométrique à termes positifs

Soit une suite u géométrique de raison q positive et de premier terme strictement positif. Alors, u est :
- *strictement croissante lorsque* $q > 1$
- *strictement décroissante lorsque* $0 < q < 1$
- *constante lorsque* $q = 1$

⚠ Une suite u telle que, pour passer de u_n à u_{n+1}, on augmente de $t\%$ est en fait une suite *géométrique* de raison $1 + \frac{t}{100}$.
Par exemple, si on passe de u_n à u_{n+1} en diminuant de 2%, la suite u est géométrique de raison $1 - \frac{2}{100} = 0,98$.

Pour déterminer le tableau de valeur d'un suite, on procède de la manière suivante.

On commence par déterminer la formule explicite de la suite u.
Supposons par exemple que cette formule soit $u_n = 352 \times 1,04^n$.
On va dans le menu `f(x)` puis on définit la fonction `Y1=352*1.04^(X)`. Ensuite, on règle les paramètres du tableau de valeur en allant dans `2nde` + `fenêtre` (déf table). Ici, on indique `DébTbl=1` et `Pas=1`.
Enfin, on va lire les valeurs de la suite dans `2nde` + `graphe` (table).

Entraînez-vous !

✎ *Exercice 3*

On donnera les résultats arrondis à $0,001$

1. *Dans les cas suivants déterminer u_5 :*
   (a) *u est une suite arithmétique de raison 3 telle que $u_6 = 253$*
   (b) *u est une suite géométrique de raison 3 telle que $u_6 = 16$*
   (c) *u est une suite arithmétique de raison 12 et de premier terme $u_1 = 5$*
   (d) *u est une suite géométrique de raison $1,5$ et de premier terme $u_0 = 125$*
2. *v est une suite géométrique de raison $1,05$ et de premier terme $v_0 = 1000$.*
   (a) *Quel est le sens de variation de v ?*
   (b) *Déterminer, pour tout entier n, la formule donnant v_n.*
   (c) *À l'aide de la calculatrice déterminer le plus petit entier n tel que v_n dépasse 3000.*

✎ Exercice 4

Entre 2010 et 2015, la population mondiale a augmenté de $6,06\%$.
En 2015, la planète comptait $7,35$ milliards d'êtres humains.

1. *Justifier par un calcul que le taux d'évolution annuel moyen entre 2010 et 2015 est de $1,18\%$.*
2. *On suppose qu'au delà de 2015, la population mondiale continuera de croître à ce rythme.*
   On note P_n la population mondiale, en milliards d'individus, prévue en $2015+n$ de sorte que $P_0 = 7,35$.
   (a) *Quelle est la nature de la suite P_n ?*
   (b) *Déterminer, pour tout n, la formule donnant P_n.*
   (c) *Déterminer selon cette approximation la population mondiale en 2025.*
   (d) *À l'aide de la calculatrice, déterminer à quel moment la population mondiale dépassera les 10 milliards d'individus.*

   On souhaite créer un algorithme qui calcule à quel moment la population mondiale dépassera les 10 milliards d'habitant selon ce modèle.
3. *Parmi les trois algorithmes suivants, lequel convient ? Justifier*

Algorithme A:	Algorithme B:	Algorithme C:
P vaut 7,35	P vaut 7,35	P vaut 7,35
N vaut 2015	N vaut 0	N vaut 0
Tant que $P > 10$:	Tant que $P < 10$:	Tant que $P < 10$:
Remplacer P par $1,0118 \times P$	Remplacer P par $1,0118 \times P$	Remplacer P par $P + 0,0118$
Remplacer N par $N + 1$	Remplacer N par $N + 1$	Remplacer N par $N + 1$
Fin tant que	Fin tant que	Fin tant que
Afficher N	Afficher $N + 2015$	Afficher N

✎ Exercice 5

♣

Rami s'entraîne au basket. Il enchaîne les lancers franc.
Pour chaque tir, il a une chance sur trois de marquer, indépendamment de ce qu'il s'est passé lors des tirs précédents. En arrondissant à $0,001$, donner les probabilités qu'il rate

a) *2 lancers d'affilée ?*
b) *3 lancers d'affilée ?*
c) *10 lancers d'affilée ?*

Combien de lancers doit-il faire pour être certain avec une probabilité de 99% au moins de réussir un panier ?

Chapitre 2

Statistiques à deux variables

2.1 Droites

2.1.1 Équations de droite

Théorème : Équation de droite

Soient A et B 2 points distincts d'un plan muni d'un repère $(O; I; J)$. L'équation de la droite (AB) s'écrit :

(Cas n^o 1) $x = x_A$ lorsque $x_A = x_B$

(Cas n^o 2) $y = mx + p$ lorsque $x_A \neq x_B$, avec

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
$$p = y_A - mx_A$$

Méthode : Pour tracer une droite affine dont on connaît une équation

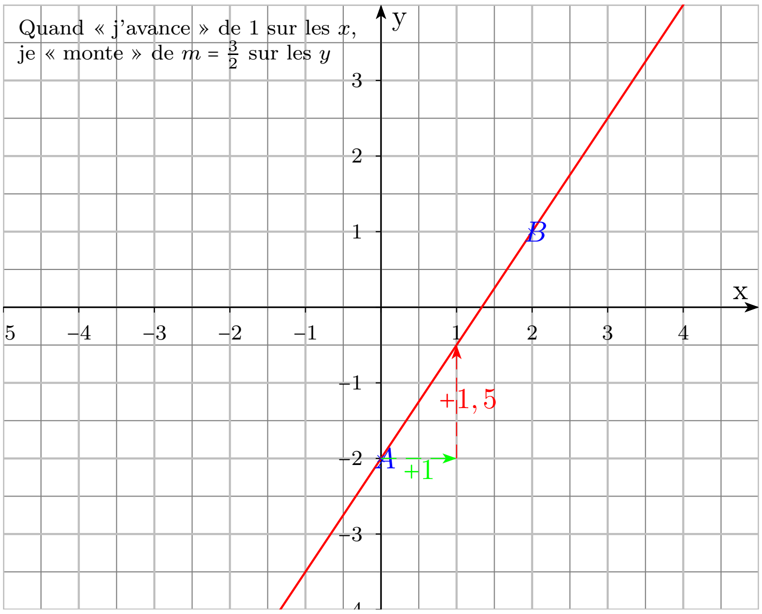
Il suffit de fixer deux valeurs de x et de calculer les deux valeurs de y correspondantes.
On obtient ainsi les coordonnées de deux points par lesquels passe la droite.

Pour savoir si une droite passe par un point dont on connaît les coordonnées, on regarde si les coordonnées du point sont solutions de l'équation de la droite. Par exemple, si on pose D la droite d'équation $y = 2x + 3$, le point $M(1; 3)$ n'est pas sur la droite car $3 \neq 2 \times 1 + 3$

2.1.2 Anatomie d'une droite affine

Considérons la droite D d'équation $y = \frac{3}{2}x - 2$.
Pour la tracer, plaçons les points A et B d'abscisses 0 et 2.
L'ordonnée de A est $y_A = \frac{3}{2} \times 0 - 2 = -2$.
L'ordonnée de B est $y_A = \frac{3}{2} \times 2 - 2 = 1$.

On peut toujours sur le graphique lire très facilement l'ordonnée à l'origine (ici -2) et le coefficient directeur (ici $\frac{3}{2} = 1,5$).



✎ *Exercice 0*

Tracer un repère sur votre feuille avec
— *les abscisses comprises entre 5 et -5*
— *les ordonnées comprises entre -10 et 10*

1. *Tracer la droite D_1 d'équation $y = -x + 3$ en expliquant la méthode.*
2. *Tracer la droite D_2 d'équation $y = \frac{1}{3}x - 1$ en expliquant la méthode.*
3. *Lire graphiquement les coordonnées de l'intersection de D_1 et D_2.*
4. *En déduire les solutions de l'équation $-x + 3 = \frac{1}{3}x - 1$.*

✎ *Exercice 1*

Soit le point $A(-1;\ 1)$ Par des calculs, préciser si le point A appartient aux droites suivantes :

$$\begin{array}{rcll} y & = & 2x+3 & T_1 \\ y & = & -x+1 & T_2 \\ y & = & \frac{-1}{3}x+\frac{5}{3} & T_3 \end{array}$$

2.2 Statistiques

2.2.1 Étude d'une série d'une variable quantitative

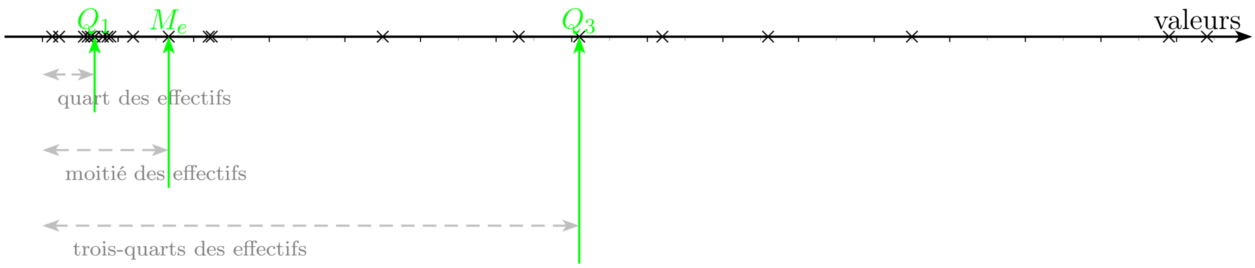
Définition : Fréquence

Soient une population d'effectif N et une sous-population A d'effectif N_A. La fréquence de A est le nombre :

$$\boxed{f(A) = \frac{N_A}{N}}$$

Définition : Quartiles, médiane

On considère une série statistique mesurant un caractère quantitatif.
Le premier quartile est la modalité notée Q_1 telle que le quart des valeurs de la série est inférieur à Q_1.
Le troisième quartile est la modalité notée Q_3 telle que les trois quarts des valeurs de la série sont inférieurs à Q_3.
Enfin, la médiane est la modalité notée M_e telle que la moitié des valeurs de la série est inférieure à M_e.



Définition : Moyenne, écart type

Soit une série statistique quantitative sur une population d'effectif total N représentée par le tableau suivant :

Modalités (valeurs)	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Effectifs	N_1	N_2	$\cdots$	N_n

La moyenne $\overline{x}$ *de la série est le nombre défini par :*

$$\boxed{\overline{x} = \frac{N_1 \times x_1 + N_2 \times x_2 + \cdots + N_n \times x_n}{N}}$$

Si on note F_i les fréquences correspondants aux modalités x_i, on a aussi :

$$\boxed{\mu = F_1 \times x_1 + F_2 \times x_2 + \cdots + F_n \times x_n}$$

*L'*écart type *donne une idée de l'écart entre les valeurs et la moyenne de la série. On le note souvent $\sigma(x)$.*

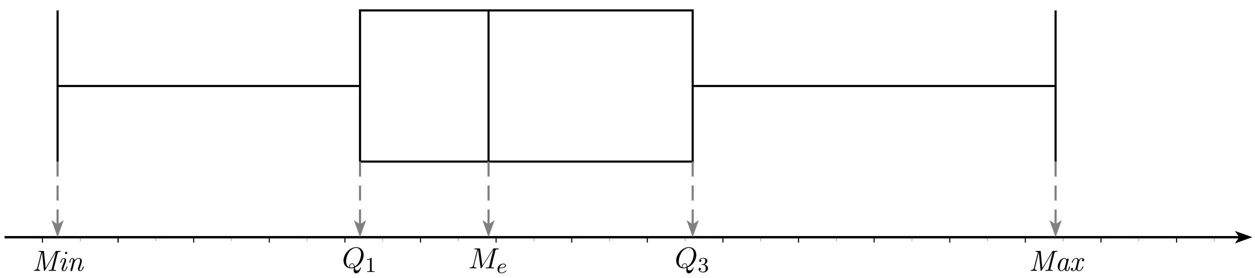
Plus l'écart type est grand et plus la série est dispersée.

La formule de l'écart type n'est pas à connaître. Vous utiliserez toujours la calculatrice pour le déterminer.
Si vous souhaitez aller plus loin, voici une définition de l'écart type :
c'est la racine de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

Pour déterminer tous les indicateurs d'une série statistique portant sur un caractère quantitatif, on utilise la fonction `Stats 1-Var` accessible depuis `stats` > `Calc` .
La syntaxe est la suivante :
`Stats 1-Var NomListeValeurs` lorsque les valeurs sont dans une liste simple.
`Stats 1-Var NomListeValeurs, NomListeEffectifs` lorsque les valeurs sont dans un tableau modalités / effectifs.

Définition : Diagramme en boîte à moustaches

Le diagramme en boîte à moustache est une représentation graphique d'une série statistique.
La boîte centrale est délimitée par Q_1 et Q_3, le trait central est placé au niveau de la médiane.
Les "pistons" sont délimités par les valeurs extrêmes de la série (le minimum et le maximum).
Ainsi, un diagramme en boîte à moustaches ressemble à ça :



Il arrive que les extrêmités du piston soient définies comme étant les 1^iers et 9^ièmes déciles. Dans ce cas, on indique les valeurs extrêmes par des croix.
Comme la notion de décile n'est pas au programme de STMG, vous devrez utiliser la définition proposée dans ce formulaire.

Exercice 2

Les tableaux suivants décrivent la répartition des salaires dans deux entreprises A et B.

Entreprise A : salaires	1200	1500	1800	2200	2800	3200	4800	12500
Effectifs	20	15	14	11	12	3	3	2

Entreprise B : salaires	1250	1400	1750	2100	2500	3100	3800	6500
Effectifs	3	12	19	11	5	4	3	3

1. *Donner pour chacune des deux entreprises : le salaire moyen, le salaire médian, le premier quartile, le troisième quartile, l'écart type, l'effectif total.*
2. *En précisant votre critère, dire laquelle de ces deux entreprises semble avoir les salaires les plus dispersés.*

2.2.2 Étude d'une série à deux variables quantitatives

Définition : Nuage de points

Lorsqu'on étudie une série de deux caractères quantitatifs x et y, on peut représenter le résultat de l'étude sous forme d'un nuage de points. Le $i^{\text{ième}}$ point correspondra à la $i^{\text{ième}}$ mesure et :

— *son abscisse sera x_i*

— *son ordonnée sera y_i.*

⚠ Quand on trace un nuage de points, on ne doit pas relier les points entre eux. Il faut en revanche bien indiquer les échelles et légendes des axes du repère.

Définition : Ajustement affine d'un nuage de points

Si on reprend les hypothèses de la définition précédente, dans le cas où le nuage de point a une forme allongée, on pourra envisager qu'il existe un lien affine entre les caractères x et y.
Dans ce cas, on cherchera à tracer la droite qui passe au plus près des points du nuage.
On appellera droite d'ajustement affine cette approximation.

Pour obtenir les coefficients de la droite d'ajustement affine, on entre les valeurs des x_i et des y_i dans les listes L_1 et L_2 de la calculatrice, accessibles depuis `Stats` `Edit` puis on sort du menu d'édition des listes (on quitte un menu avec `2nde` `mode`).
Dans un second temps, on va dans `stats` puis `CALC` puis
`4:` `RegLin(ax+b)`.
La commande `RegLin(ax+b)` L_1, L_2 vous permet d'obtenir les coefficients a et b de la droite affine d'approximation, qui a pour équation $\boxed{y = ax + b}$

✎ ***Exercice 3***

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice du nombre annuel d'immatriculations de voitures neuves équipées d'un moteur diesel de 2001 à 2011, base 100 en 2001.

Année	*2001*	*2002*	*2003*	*2004*	*2005*	*2006*	*2007*	*2008*	*2009*	*2010*	*2011*
Rang de l'année x_i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Indice y_i	*100*	*106,5*	*106,8*	*109,9*	*112,7*	*112,6*	*120,3*	*124,9*	*126,0*	*122,7*	*122,9*

Source : d'après INSEE

1. *A l'aide du papier millimétré fourni, placer les points de ce nuage de coordonnées $(x_i;\ y_i)$. On fera démarrer les ordonnées à 90 et on utilisera l'échelle 1 gros carreau = 2 unités d'indice, ce qui donne 1 petit carreau = 0,2.*
2. *Déterminer à l'aide de votre calculatrice l'équation de la droite d'ajustement affine. On arrondira les coefficients à $0,1$.*
3. *Tracer la droite en expliquant la méthode.*
4. (a) *En utilisant cette approximation, quel devrait être la valeur de l'indice en 2015.*

   (b) *À partir de quelle année l'indice devrait dépasser 160 ? Expliquer la méthode employée.*

Chapitre 3

Dérivation

3.1 Droites

Quelques rappels sur les équations de droite qui nous seront utiles dans ce chapitre.

Théorème : Équation de droite

Soient A et B 2 points distincts d'un plan muni d'un repère $(O; I; J)$. L'équation de la droite (AB) s'écrit :

(Cas n° 1) $x = x_A$ *lorsque* $x_A = x_B$

(Cas n° 2) $y = mx + p$ *lorsque* $x_A \neq x_B$, *avec*

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$p = y_A - mx_A$$

Proposition : Équation de droite dont on connaît un point et le coefficient directeur

Soit m un nombre fixé et $A(x_A;\ y_A)$ un point.
La droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur m a pour équation

$$\boxed{y = m(x - x_A) + y_A}$$

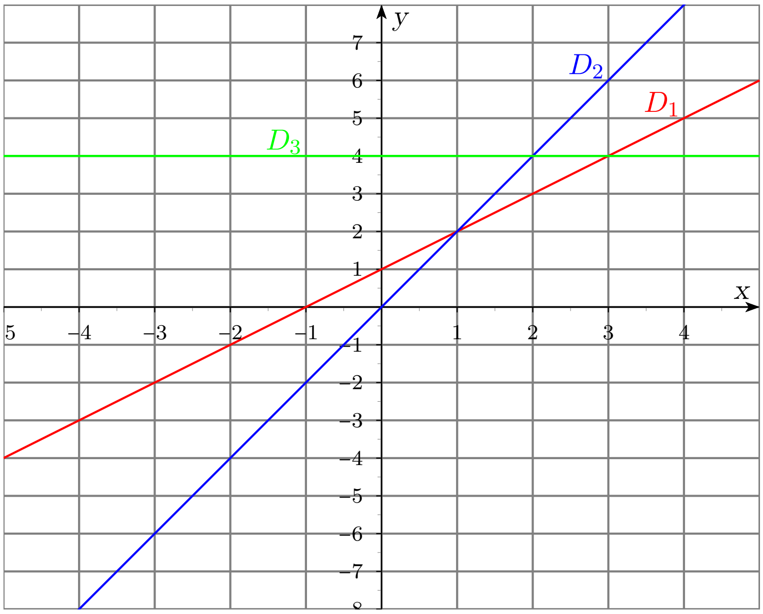
✎ ***Exercice 0***

On considère les points $A(-1;\ 2)$ $\quad B(1;\ 1)$ $\quad C(3;\ -3)$ $\quad D(6;\ 0)$

1. *Dans un repère sur votre feuille, placer ces quatre points.*
2. *Déterminer les équations des droites (AB) et (CD).*
3. *Par lecture graphique, quelles semblent être les coordonnées de l'intersection de (AB) et (CD) ?*
4. *Vérifier votre conjecture par un calcul.*

✎ ***Exercice 1***

Par lecture graphique, déterminer les équations des trois droites tracées plus bas :



3.2 Rappels sur les fonctions trinômiales, les études de signes et les inéquations

Proposition : Signe d'une fonction trinômiale

Soient a, b et c trois nombres fixés avec $a \neq 0$.
Soit une fonction f qui à tout x associe $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On calcule $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ puis on distingue trois cas :

(cas n° 1) *Si $\Delta < 0$, $f(x)$ est toujours du signe de a. Dans ce cas, $f(x)$ de peut pas se factoriser.*

(cas n° 2) *Si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe opposé à a pour x compris entre r_1 et r_2 et est du signe de a ailleurs, les valeurs de r_1 et r_2 étant :*

$$\boxed{\begin{cases} r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}}$$

Dans ce cas, on dit que r_1 et r_2 sont les racines *de f et $f(x)$ se factorise :*

$$\boxed{f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)}$$

(cas n° 3) *Si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq r$ et s'annule pour $x = r$ avec :*

$$\boxed{r = \frac{-b}{2a}}$$

Dans ce cas, on dit que r est la racine double *de f et $f(x)$ se factorise :*

$$\boxed{f(x) = a(x - r)^2}$$

Exercice 2

Développer et simplifier les expressions suivantes :

$$
\begin{array}{rcl}
A & = & (t-3)(t+1)+t^2-3t \\
B & = & (x-3)^2-(x-1)+12 \\
C & = & (x-1)(x^2+x+1) \\
D & = & 0,1(x-1)(x+4)+1,2x-4
\end{array}
$$

Exercice 3

Résoudre les équations et les inéquations proposées :

a) $(x-4)(x+3)=0$

b) $-3(x-2)(x-5)<0$

c) $2x^2-6x+4\geq 0$

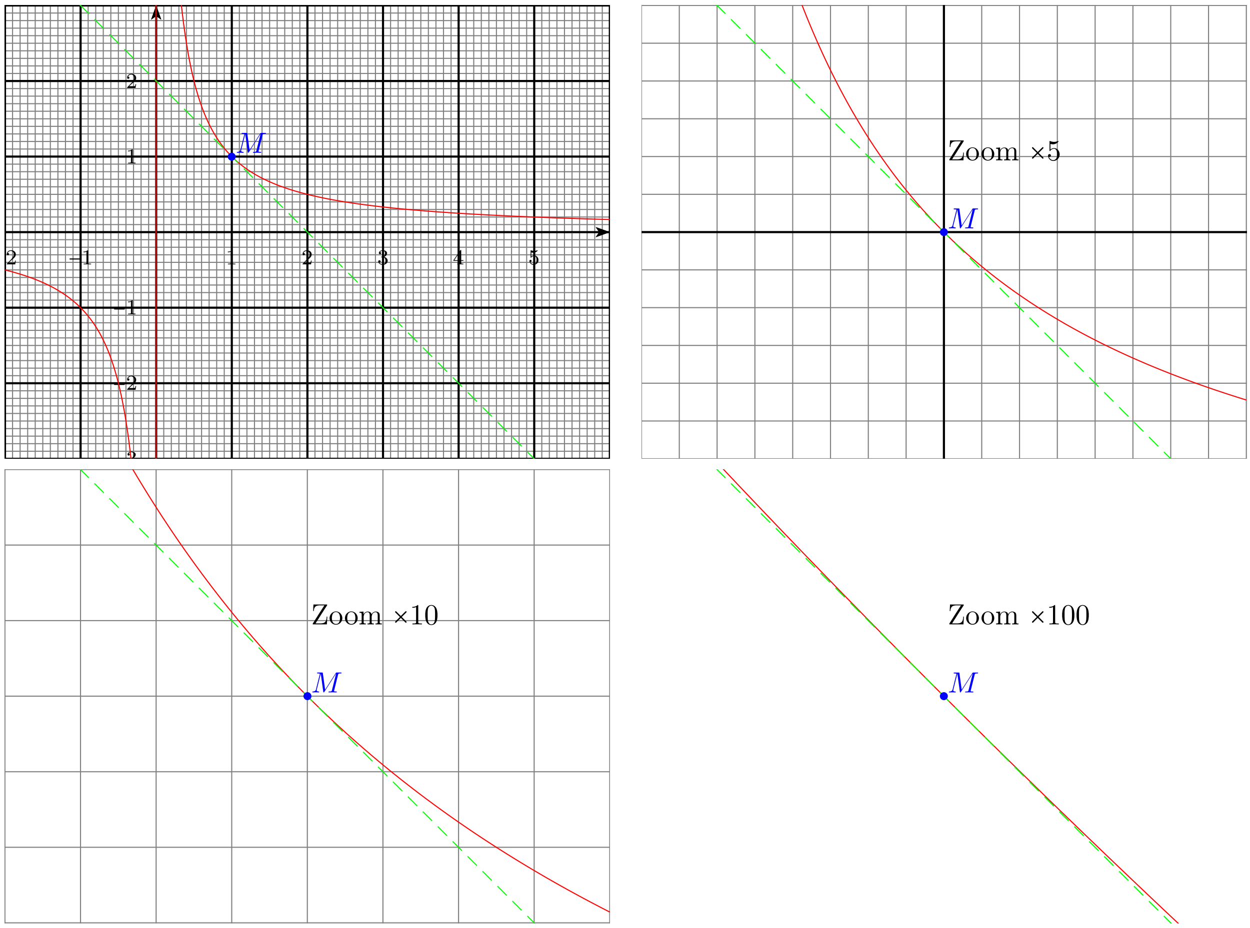
d) $\dfrac{(x^2+2x+12)}{x-6}<0$

Résoudre une inéquation dont l'un des membres est nul revient à déterminer le signe du membre restant. On peut dans ce cas dresser un tableau de signes si l'expression restante est déjà factorisée ou, lorsque c'est possible, utiliser les propriétés sur les fonctions trinômiales.

3.3 Dérivation

3.3.1 Tangente : définition purement graphique

On considère une courbe $\mathcal{C}$ tracée dans un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ et M un point de la courbe $\mathcal{C}$.
Sous certaines conditions, lorsque l'on agrandit l'échelle autour du point M, on s'aperçoit que la courbe $\mathcal{C}$ est très bien approchée par une droite.
On appelle *tangente* en M à la courbe $\mathcal{C}$ cette droite. Si l'on agrandit suffisamment l'échelle, on peut même confondre la courbe avec la tangente, comme le montre les zooms consécutifs faits autour du point M de coordonnées $(1;1)$. On a tracé en pointillés cette tangente.



3.3.2 Lien entre nombre dérivé et tangente

Proposition : Dérivation et tangente

Soit une fonction f de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et soit m un nombre.
Le nombre dérivé de f en m, lorsqu'il existe, est le nombre $f'(m)$ correspondant au coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse m.

Pour lire graphiquement le nombre dérivé, il faut donc lire le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse m.

Proposition : Équation de la tangente à la courbe d'une fonction f au point d'abscisse a

Soit une fonction f de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et soit a un nombre du domaine de définition de f.
On suppose que f est dérivable en a.
Alors l'équation de la tangente au point d'abscisse a est

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Exercice 4

Soit une fonction f dont la courbe est notée $\mathcal{C}_f$.
On suppose que $f(2) = 1$ et que $f'(2) = 3$. On note T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

a) *Le point* $A(1;\ 2)$ *est sur la courbe* $\mathcal{C}_f$.
b) *Le point* $M(2;\ 1)$ *appartient à* T.
c) *Le coefficient directeur de* T *est* 1.
d) *L'équation de* T *est* $y = 3x - 6$

3.3.3 Fonction dérivée et formulaire de dérivation

Définition : Fonction dérivée

Soit f *une fonction définie et dérivable sur un intervalle* I.
La fonction dérivée de f *est la fonction* f' *qui à tout* x *de* I *associe* $f'(x)$.

Proposition : Formulaire de dérivation

Soit n *un nombre entier naturel,* a *et* b *sont deux nombres réels fixés.*

Nom de la fonction	*Domaine de définition*	*Domaine de dérivabilité*	$f(x)$	$f'(x)$
Constante	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a	0
Affine	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$ax+b$	a
Carré	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	x^2	$2x$
Cube	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$
Puissance	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}
Inverse	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$

Proposition : Opérations sur les fonctions et dérivation

Soit I *un intervalle, soit* a *un nombre fixé et soient* u *et* v *deux fonctions dérivables sur* I.
Alors, pour tout x *de* I, *on a les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned}
(u+v)'(x) &= u'(x) + v'(x)\\
(au)'(x) &= au'(x)\\
(uv)'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\\
\left(\frac{1}{u}\right)'(x) &= \frac{-u'(x)}{u(x)^2}\\
\left(\frac{u}{v}\right)'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}
\end{aligned}$$

✎ **Exercice 5**

En utilisant le formulaire ainsi que la propriété précédente portant sur les opérations, déterminer les dérivées des fonctions suivantes.

$$\begin{aligned}
c(x) &= 3x+4\\
d(x) &= x^3 - x^2\\
e(x) &= \frac{3}{x}\\
f(x) &= \frac{4}{2+x}\\
g(x) &= \frac{x+1}{x-1}
\end{aligned}$$

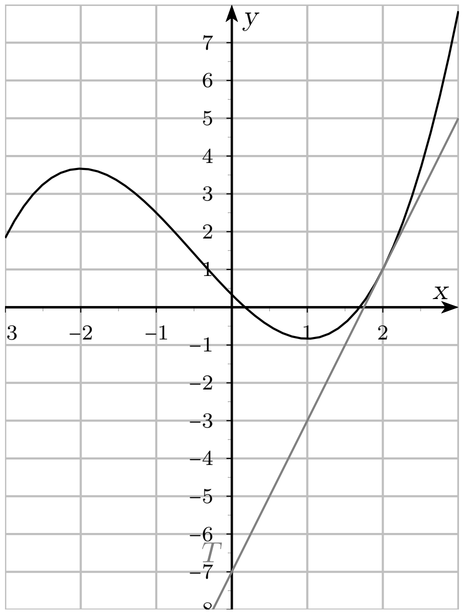
3.3.4 Dérivée et sens de variation

Théorème : Dérivation et sens de variation
Une fonction f est croissante sur un intervalle I si et seulement si sa dérivée est positive sur I.
Une fonction f est décroissante sur un intervalle I si et seulement si sa dérivée est négative sur I.
Une fonction f admet un extrêmum local en a si et seulement si sa dérivée s'annule en changeant de signe en a.

Pour étudier le sens de variation d'une fonction, il faut donc étudier le signe de sa dérivée. En pratique, on établira donc le tableau de signe de la dérivée sur une première ligne puis le tableau de variation de la fonction sur une seconde ligne.

Exercice 6

La courbe suivante représente une fonction f définie sur $[-3;\ 3]$
La droite T tracée en gris est tangente à la courbe.



1. *Lire graphiquement $f(2)$.*
2. *Lire graphiquement $f'(2)$.*
3. (a) *Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur $[-3;\ 3]$.*
   (b) *En déduire le signe de f' sur ce même intervalle.*
4. *Déterminer l'équation de T.*

Exercice 7

Une entreprise, qui fabrique et vend des ordinateurs sur commande, modélise le bénéfice en euros pour x ordinateurs fabriqués et vendus en une journée, par la fonction :

$$f(x) = x^3 - 60x^2 + 900x - 500$$

L'entreprise ne pouvant construire plus de 30 ordinateurs par jour, on aura $0 \le x \le 30$.

1. *Déterminer le bénéfice pour 4 puis pour 10 ordinateurs.*
2. *Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.*
3. *Dresser, après avoir étudié le signe de f' , le tableau de variation de f.*
4. *En déduire combien d'ordinateurs l'entreprise doit fabriquer et vendre chaque jour pour avoir un bénéfice maximal. Donner ce bénéfice.*

Chapitre 4

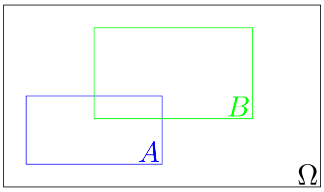
Probabilités conditionnelles

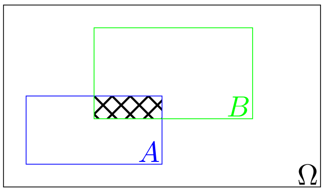
4.1 Rappels

4.1.1 Opérations sur les évènements

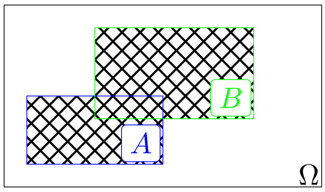
Définition : Opérations sur les évènements

Soient A et B deux évènements.
La réunion *de A et B est l'évènement noté $A \cup B$, formé des issues appartenant à A ou à B.*
*L'*intersection *de A et B est l'évènement noté $A \cap B$, formé des issues appartenant à A et à B.*
Le contraire *de A est l'évènement noté $\overline{A}$, formé des issues n'appartenant pas à A.*





$A \cap B$



$A \cup B$

Proposition : Probabilité de la réunion et du contraire

Soient A et B deux évènements. On a :

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \text{ et } \boxed{P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)}$$

Deux exercices pour s'entraîner.

Exercice 0

Vous vous apprêtez à découvrir votre cadeau d'anniversaire. On considère les évènements suivants de cette expérience aléatoire :

E : *mon cadeau est un vélo*
F : *mon cadeau est rouge*

On suppose que $P(E) = 0,12$ et $P(F) = 0,14$ et $P(E \cap F) = 0,06$.

1. *Décrire chacun des évènements suivants par une phrase : $\overline{F}, E \cap F, E \cup \overline{F}$.*
2. *Déterminer la probabilité que mon cadeau soit un vélo ou soit rouge.*
3. *En déduire la probabilité que ce cadeau ne soit ni un vélo, ni de couleur rouge.*

Exercice 1

On cherche à évaluer un test de dépistage d'une maladie infectieuse.

On procède à l'évaluation sur une population de 5000 *individus parmi lesquels on compte* 800 *malades avérés.*

On soumet les individus au test de dépistage. Les résultats sont résumés dans le tableau à double entrée suivant

		MALADE		
		OUI	*NON*	*TOTAL*
RÉSULTAT DU TEST	*POSITIF*	*793*	*12*	
	NEGATIF			
	TOTAL	*800*		*5000*

1. *Compléter les cases du tableau.*
2. *On choisit au hasard un individu dans la population de référence. Quelle est la probabilité*
   (a) *qu'il soit malade et testé positivement ?*
   (b) *qu'il soit sain et testé positivement ?*

4.1.2 Comment lire un arbre ?

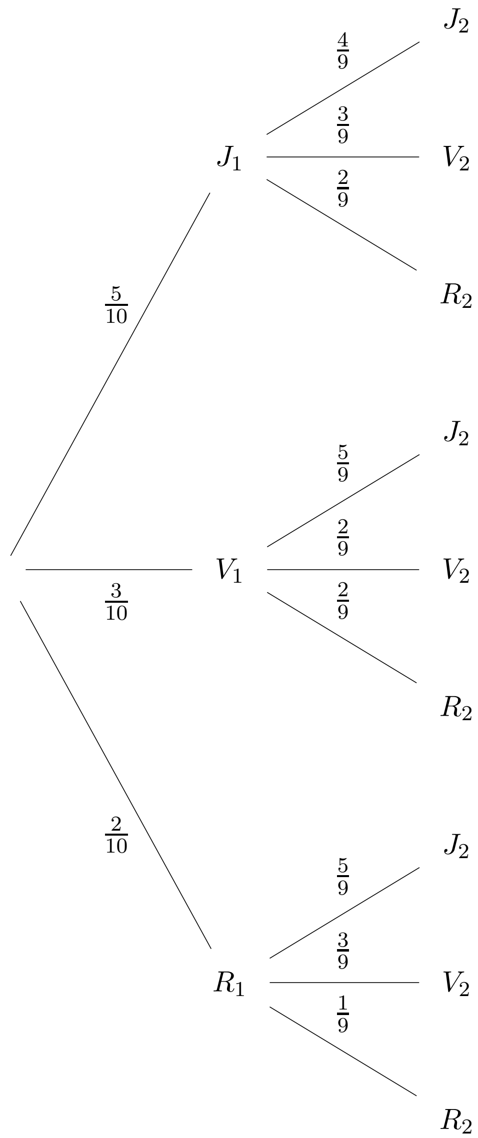
On considère une urne qui contient les boules suivantes :

- 5 boules jaunes
- 3 boules vertes
- 2 boules rouges

On tire 2 boules **sans remise** et on s'intéresse à la couleur des 2 boules.

Pour modéliser la succession des deux tirages, on réalise un arbre qui se lit de la manière suivante :

1. Le premier niveau d'embranchement correspond au premier tirage, il y a donc trois branches correspondant aux trois issues du premier tirage : J_1, V_1 et R_1.
2. Le second niveau d'embranchement correspond à la combinaison du premier tirage et du second tirage. De chaque nœud du premier niveau partent 3 branches correspondant aux 3 issues du second tirage : J_2, V_2 et R_2
3. Les terminaisons de l'arbre correspond aux 9 issues possibles pour la combinaison des 2 tirages.
4. Enfin, on place au niveau de chaque branche la probabilité de l'issue.



Les principales propriétés d'un arbre concernent les probabilités :

— Partant d'un nœud, la somme des probabilités vaut 1.
  Par exemple, partant du nœud V_1, on a bien $\dfrac{5}{9}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{9}=\dfrac{9}{9}=1$.

— Pour obtenir la probabilité d'une terminaison de l'arbre, on multiplie les probabilités des branches conduisant à cette terminaison.
  Par exemple, la probabilité de $R_1 \cap J_2$ vaut $P\left(R_1 \cap J_2\right)=\dfrac{2}{10}\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{10}{90}$.

✎ ***Exercice 2***

Un questionnaire à choix multiple comporte 3 questions. Pour chaque question 4 choix sont proposés et seul l'un d'entre eux est correct.
Un candidat coche, à chaque question, l'un des choix au hasard. On supposera que chacun des choix bénéficie de la même probabilité.

1. *En précisant soigneusement l'hypothèse utilisée, donner la probabilité de répondre juste à une question en particulier.*
2. *Réaliser un arbre correspondant à la succession des 3 questions en ne considérant que les deux issues $\left\{J,\overline{J}\right\}$ où J signifie « le candidat a répondu juste ».*
3. *Donner la probabilité des évènements suivants :*
   (a) *Le candidat a eu 3 bonnes réponses.*
   (b) *Le candidat a eu 2 bonnes réponses.*

(c) *Le candidat n'a eu aucune bonne réponse.*

(d) *Le candidat a eu au moins une bonne réponse.*

4.2 Probabilités conditionnelles

4.2.1 Définition à partir d'un arbre

La *probabilité conditionnelle* d'un évènement F, sachant un évènement E est la probabilité de F calculée à partir d'une situation où E est déjà réalisé. On la note $P_E(F)$.
Par exemple, la probabilité de choisir au hasard un élève à lunette dans la classe *sachant que* l'élève est une fille est en fait la probabilité de choisir un élève à lunette *parmi* les filles.

Quand on lit les probabilités dans un arbre, on lit en fait des probabilités conditionnelles. Si on reprend l'exemple développé précédemment, partant du nœud J_1, la probabilité d'obtenir J_2 est de $\frac{4}{9}$. C'est en fait la probabilité de J_2 *sachant* J_1. On a ainsi $P_{J_1}(J_2) = \frac{4}{9}$.

4.2.2 Définition par une formule

Définition : Probabilité conditionnelle

Soient E et F deux évènements avec $P(F) \neq 0$.
On définit la probabilité de F sachant E par :

$$\boxed{P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}} \text{ ce qui s'écrit aussi } \boxed{P(E \cap F) = P_E(F)\,P(E)}$$

4.2.3 Formule des probabilités totales

La formule des probabilités totales prend tout son sens dans le cas où l'expérience peut être représentée par un arbre.

Nous reprendrons donc l'exemple développé tout au long de ce formulaire.
Supposons que l'on veuille calculer la probabilité de J_2. En fait J_2 est réalisé par trois chemins dans l'arbre : $J_1 \cap J_2$, $V_1 \cap J_2$, $R_1 \cap J_2$. La probabilité de J_2 est donc :

$$\boxed{\begin{aligned} P(J_2) &= P(J_1 \cap J_2) + P(V_1 \cap J_2) + P(R_1 \cap J_2) \\ &= P(J_1) \times P_{J_1}(J_2) + P(V_1) \times P_{V_1}(J_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(J_2) \end{aligned}}$$

La formule encadrée plus haut s'appelle la formule des *probabilités totales*. Elle revient à faire la somme des chemins qui constituent un évènement.

On dit que J_1, V_1 et R_1 réalisent une partition de l'univers.
Une partition peut se définir comme un ensemble d'évènement incompatibles deux à deux et dont l'union forme l'univers tout entier. Ce terme n'est pas officiellement à votre programme cependant.

✎ ***Exercice 3***

Dans un lycée, en classe de terminale, 80% des élèves obtiennent le baccalauréat.
Parmi les admis, 43,75% sont des filles.
Parmi les recalés, 25% sont des filles.
On choisit un élève de terminale au hasard à l'issue du baccalauréat.
On note A l'évènement « l'élève est admis » et F l'évènement « c'est une fille ».

1. *Décrire avec une phrase les évènements* $\overline{A} \cap F$, $A \cup \overline{F}$.
2. *Par simple lecture de l'énoncé, déterminer* $P(A)$, $P\left(\overline{A}\right)$, $P_A(F)$, $P_{\overline{A}}(F)$.
3. *En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer* $P(F)$ *puis en déduire* $P\left(\overline{F}\right)$.
4. *Déterminer* $P_F(A)$ *et* $P_{\overline{F}}(A)$. *En déduire qui des garçons ou des filles a le mieux réussi le baccalauréat.*

✎ Exercice 4

On reprend les données de l'exercice 1 concernant le test de dépistage.

On choisit au hasard un individu dans la population de référence. On note M *l'évènement « cette personne est malade » et* T *l'évènement « cette personne est testée positivement »*

On s'intéresse aux deux types d'erreur dans un tel test :

1. *Déterminer* $P_M\left(\overline{T}\right)$.
2. *Déterminer* $P_{\overline{M}}(T)$.

Chapitre 5

Loi normale et échantillonnage

5.1 Loi binomiale

5.1.1 Comment reconnaître une variable qui suit une loi binomiale ?

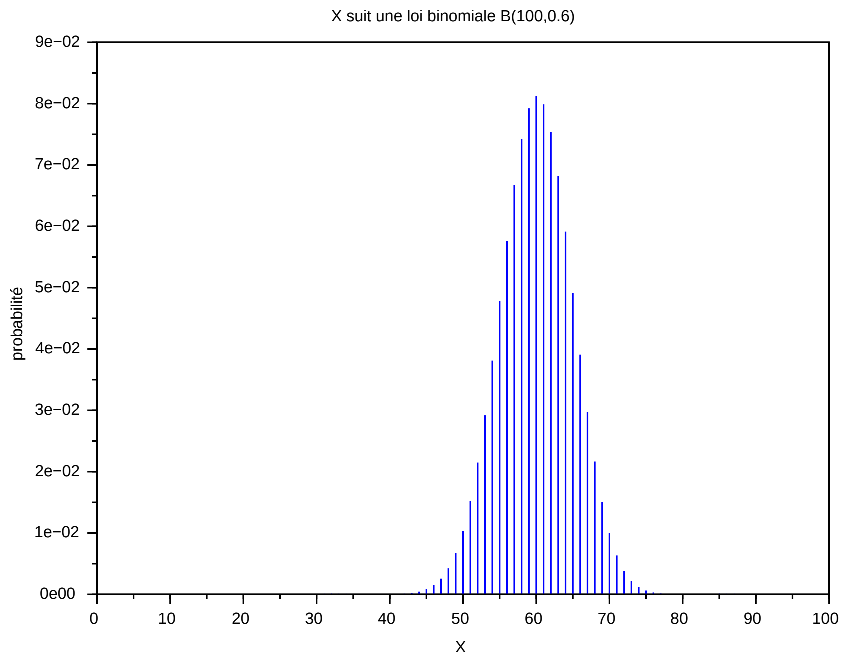
Il est important de savoir détecter les cas où l'on peut appliquer les résultats concernant la loi binomiale.

Il faut ainsi que l'expérience que l'on étudie vérifie les propriétés suivantes :

- L'expérience est formée d'une série de n répétitions d'une expérience aléatoire élémentaire à deux issues.
  On posera par convention que l'une de ces issues s'appelle succès S et on nommera l'autre échec $\overline{S}$.
- La répétition se fait de manière indépendante, c'est à dire que la probabilité de succès ou d'échec pour une expérience élémentaire ne dépend pas de ce qu'il s'est produit avant. On note $p = P(S)$ la probabilité de succès lors de l'une des expériences aléatoire.
- On compte le nombre total X de succès obtenus.

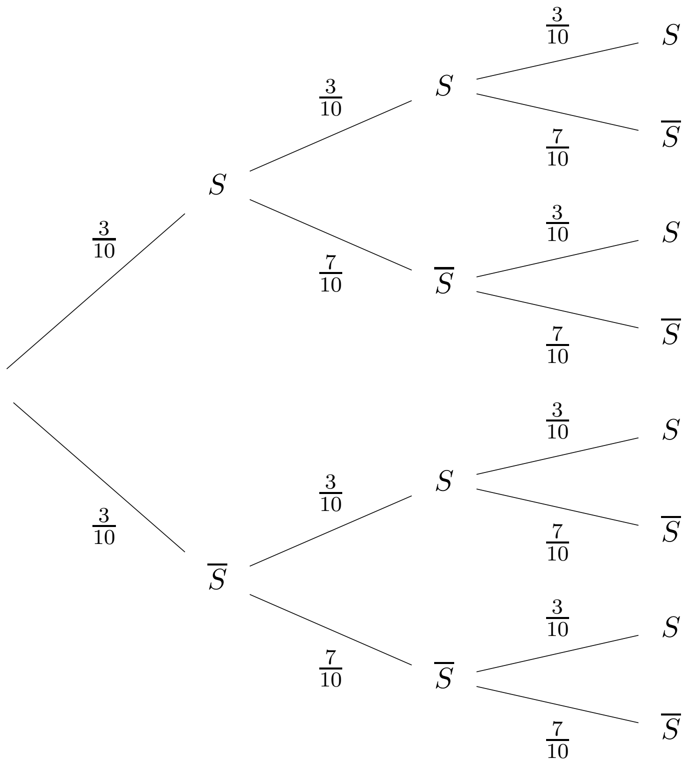
Dans ces conditions, on dira que X *suit une loi binomiale de paramètres n, p.*

Sur le graphique plus bas, on a représenté les probabilités des différentes valeurs de X, pour X qui suit une loi binomiale de paramètres 100, $0,6$.



Quand le nombre de répétitions n'est pas trop élevé, on peut représenter l'expérience avec un arbre.

Par exemple, considérons l'expérience suivante :
On tire avec remise 3 boules dans une urne qui contient 3 boules noires pour 10 boules en tout et on s'intéresse au nombre X de fois où l'on a obtenu une boule noire. On peut représenter cette expérience de la manière suivante :



Dans le cas d'une série de tirages dans une urne, il y a indépendance des tirages si l'on remet la boule tirée à chaque fois.

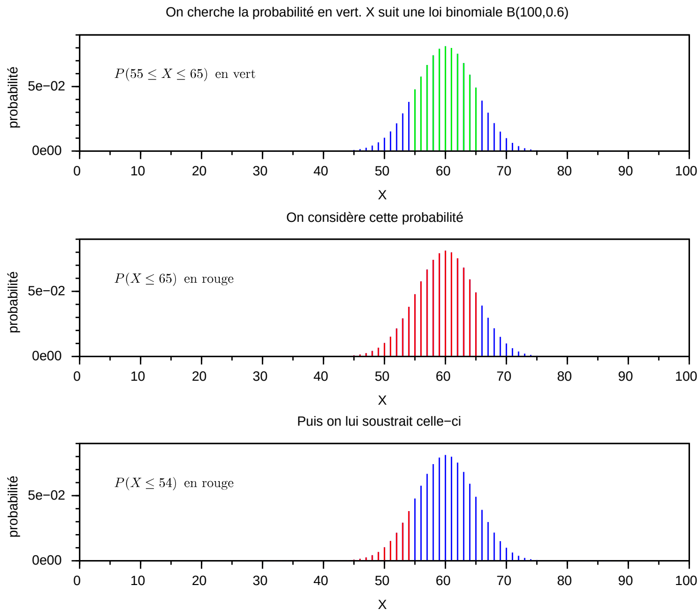
5.1.2 Utilisation de la calculatrice

Dans le cas où X suit une loi binomiale, on utilisera la calculatrice pour déterminer les probabilités de X.

Pour obtenir $P(X = 4)$ avec X qui suit une loi binomiale pour 15 répétitions et avec une probabilité de succès de $0,6$, on tape :
`binomFdp(15,0.6,4)` . On obtient `binomFdp` dans le menu `2nde` `var` puis `DISTRIB` et enfin `A:` `binomFdp`.
Pour obtenir $P(X \leq 6)$ avec X qui suit une loi binomiale pour 20 répétitions et avec une probabilité de succès de $0,5$, on tape :
`binomFRép(20,0.5,6)` .

En pratique, on peut être amené à déterminer des probabilités d'appartenance à un intervalle. Dans ce cas, on se ramènera toujours à des calculs portant sur la fonction de répartition.

Supposons par exemple que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,6$ et que l'on veut calculer la probabilité $P(55 \leq X \leq 65)$. On procède par soustraction :



Ce raisonnement graphique nous permet d'en déduire que :
$P\,(55 \leq X \leq 65) = P\,(\leq 65) - P\,(\leq 54)$.

Pour obtenir $P\,(55 \leq X \leq 65)$ avec X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,6$, on tape :
`binomFRép(100,0.6,65) - binomFRép(100,0.6,54)` .

✎ ***Exercice 0***

On tire 100 fois à pile ou face et on note X le nombre de piles obtenus.

1. *Pourquoi peut-on dire que X suit une loi binomiale ? Préciser les valeurs des deux paramètres de cette loi.*
2. *(a) À l'aide de la calculatrice, déterminer $P(X \leq 60)$ puis $P(X \leq 39)$.*
   (b) En déduire $P(40 \leq X \leq 60)$. Traduire en français cette probabilité.

5.1.3 Espérance de la loi binomiale

On reprend les mêmes hypothèses et on suppose que X suit une loi binomiale de paramètres n, p.
On appelle espérance de X le nombre

$$\boxed{E(X) = np}$$

L'espérance représente la valeur moyenne de X si on refait un grand nombre de fois l'expérience.

Reprenons l'expérience de l'urne contenant 3 boules noires pour 10 boules. Si on applique la formule, on obtient $E(X) = 3 \times \dfrac{3}{10} = 0,9$.
Cela signifie qu'on obtient en moyenne $0,9$ boules noires si on en pioche 3 avec remise un grand nombre de fois.

✎ ***Exercice 1***

Une urne contient 4 boules noires et 9 boules blanches. On propose le jeu suivant :

- *Le joueur procède à 5 tirages avec remise.*
- *Il gagne 10 € par boule noire obtenue et perd 1,2 € par boule blanche obtenue.*
  Par exemple, s'il a obtenu 2 boules noires sur la partie, il a gagné
  $2 \times 10 - 3 \times 1,2 = 16,4$ €.

On note N le nombre de boules noires obtenues sur une partie.

1. *Quelle est la loi suivie par N ?*
2. *Déterminer l'espérance de N.*
3. *♣ En déduire le gain moyen par partie.*

5.2 Loi normale

5.2.1 Définition graphique

Certaines expériences aléatoires ont des nombres infinis d'issues et l'on peut associer des nombres réels à ces expériences.

Par exemple, les conditions météorologiques de demain à Colombes sont typiquement une expérience aléatoire dont le nombre d'issues est infini. À cette expérience aléatoire on peut associer par exemple la température, qui est un nombre réel. On dira alors que la température T qu'il fera demain à Colombes est une variable aléatoire réelle.

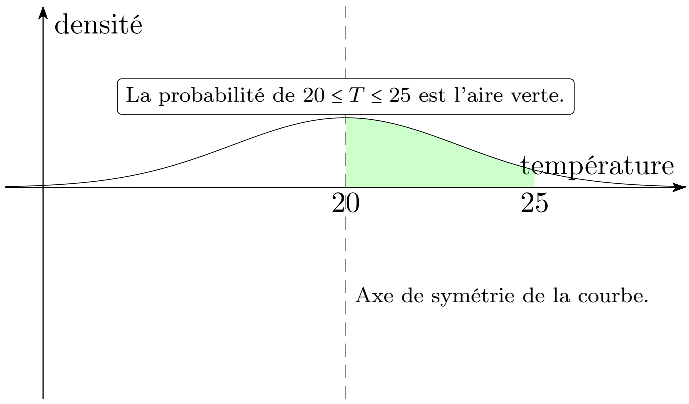
Il est quasiment impossible que, demain, il fasse exactement 18° avec une précision infinie. En revanche, la probabilité que T soit dans l'intervalle $[18;\ 19]$ n'est pas nulle. Ainsi, pour ce genre de variable, on s'intéressera aux probabilités d'appartenir à un certain intervalle.

En physique, en économie, en biologie, on retrouve de nombreuses variables aléatoires qui suivent une loi qu'on appelle *normale*. Une loi normale est définie par deux paramètres :

- la moyenne que l'on note souvent μ (mu) :
  Elle représente la valeur moyenne observée si l'on pouvait répéter l'expérience un nombre infini de fois
- l'écart-type que l'on note σ (sigma) :
  Il représente les écarts possibles entre les valeurs observées et la moyenne. Plus l'écart-type est grand et plus les valeurs peuvent être éloignées de la moyenne.

Cette loi est définie par une courbe en cloche et l'on mesure la probabilité d'appartenir à un intervalle en calculant l'aire sous la courbe.

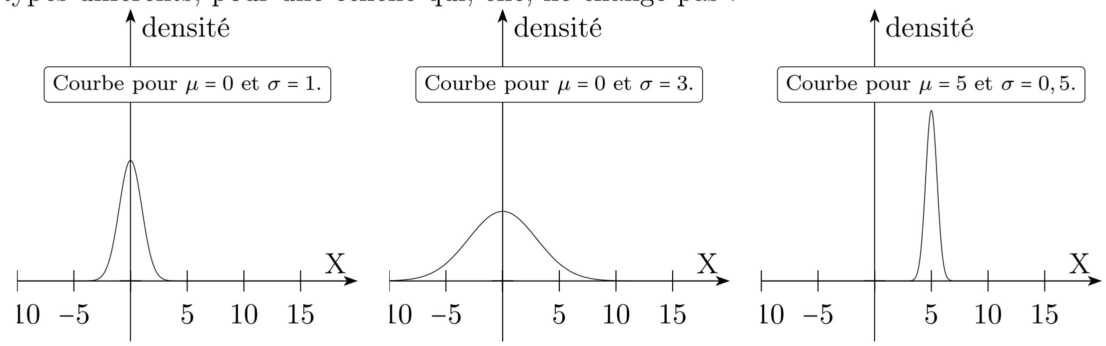
Par exemple, si l'on suppose que la température à Colombes demain suit une loi normale de moyenne $\mu = 20$ et d'écart-type $\sigma = 3$, on obtiendra la probabilité que la température soit comprise entre 20 et 25 degrés en calculant l'aire verte représentée plus bas.



La fonction associée à cette courbe n'est pas au programme de STMG. En revanche, vous devez connaître certaines propriétés de la courbe en cloche. Ainsi, vous devez savoir que :

- La fonction a son maximum lorsque la variable vaut μ.
- La droite d'équation $x = \mu$ est un axe de symétrie de la courbe.
- Plus l'écart-type est grand et plus la courbe est « étalée ».

Pour illustrer cette remarque, nous avons représenté 3 courbes en cloche avec des moyennes et des écarts types différents, pour une échelle qui, elle, ne change pas :



5.2.2 Utilisation de la calculatrice

Ici encore, on utilisera en pratique la calculatrice pour déterminer les probabilités de variables suivant des lois normales.

Pour obtenir $P(U \in [12;\ 16])$ avec U qui suit une loi normale de moyenne 15 et d'écart type 3, on tape :
`NormalFRép(12,16,15,3)` . On obtient `NormalFRép` dans le menu `2nde` `var` puis `DISTRIB` et enfin `2:` `NormalFRép`.
Dans le cas où l'une des bornes de l'intervalle est infinie, il suffit de la remplacer par une très grande (ou très petite) valeur. En général -10^6 ou 10^6 sont largement suffisants. Ainsi, `NormalFRép(-10^6,16,15,3)` nous donne $P(U \leq 16)$ avec U qui suit une loi normale d'espérance 15 et d'écart type 3.

✐ ***Exercice 2***

On admet que le poids des bébés (en kg) à la naissance suit une loi normale de moyenne $\mu = 3,3$ et d'écart type $\sigma = 0,5$. On considère un bébé pris au hasard et on note G son poids.

1. *Déterminer $P(2,8 \leq G \leq 3,8)$. Interpréter le résultat.*
2. *Déterminer $P(G \geq 4)$. Interpréter le résultat.*

5.3 Intervalle de fluctuation et intervalle de confiance

5.3.1 Deux problèmes

Les deux problèmes dont nous parlons ici sont très courants dans les statistiques et sont tous les deux liés à un résultat très important qu'on appelle *loi des grands nombres*.

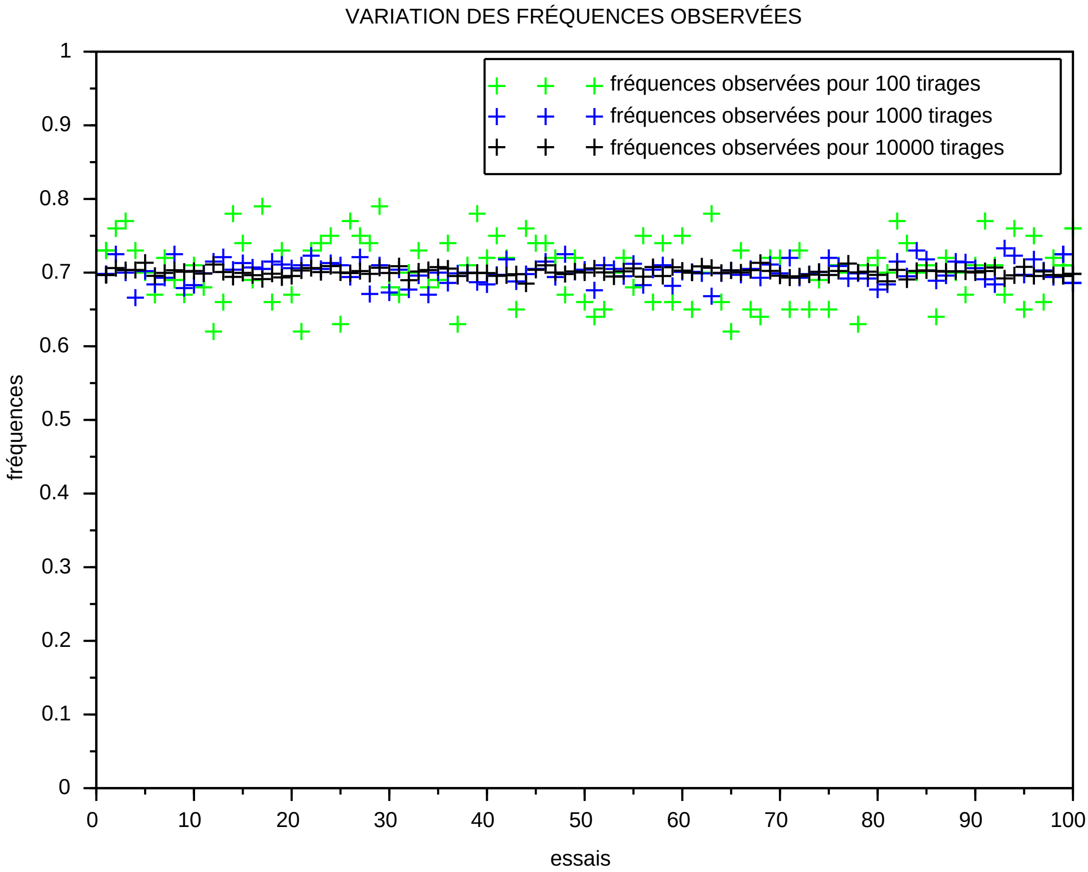
5.3.1.1 Recherche d'une probabilité connaissant une fréquence

Supposons que vous disposez d'une pièce de monnaie et que vous voulez déterminer si la pièce est équilibrée. En pratique, vous allez lancer la pièce et compter le nombre de fois que vous avez obtenu pile ou plus exactement la fréquence de piles, c'est à dire le nombre de piles divisé par le nombre de lancers.

Plus vous allez lancer la pièce et plus la fréquence des piles sera proche de la probabilité de faire pile.

Plus bas, on a illustré ce phénomène :

1. On a d'abord procédé à 100 lancers puis calculé la fréquence et réitéré l'expérience 100 fois.
   Pour chacune des 100 expériences, on a noté d'une croix verte, la fréquence obtenue.
2. Puis, on a lancé 1000 fois la pièce puis calculé la fréquence et réitéré à nouveau l'expérience 100 fois.
   De même, pour chacune des 100 expériences, on a noté d'une croix bleue, la fréquence obtenue.
3. Enfin, on a lancé 10000 fois la pièce puis calculé la fréquence et réitéré à nouveau l'expérience 100 fois.
   Enfin, pour chacune des 100 expériences, on a noté d'une croix noire, la fréquence obtenue.



Sur le graphique, on peut voir que les croix noires sont plus concentrées que les croix bleues qui elles même sont plus concentrées que les croix vertes. Ainsi, plus on augmente le nombre de lancers et moins la fréquence de piles fluctue. Elle semble se stabiliser en $0,7$ que l'on peut ainsi supposer être la probabilité de faire pile.

On peut définir, avec une certitude d'au moins 95%, un intervalle où se situe la probabilité connaissant la fréquence et le nombre de lancers réalisés. On appellera *intervalle de confiance à 95%* cet intervalle.

5.3.1.2 Recherche d'une fréquence connaissant une probabilité

Considérons maintenant un second problème très connu qu'on appelle l'affaire Partida.

En Novembre 1976 dans un comté du sud du Texas, Rodrigo Partida était condamné a huit ans de prison pour cambriolage d'une résidence et tentative de viol. Il attaqua ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté était discriminant à l'égard des Américains d'origine mexicaine. Alors que $79,1\%$ de la population du comté était d'origine mexicaine, sur les 870 personnes convoquées pour être jurés lors d'une certaine période de référence, il n'y eût que 339 personnes d'origine mexicaine.

Tout le problème ici est de déterminer si la fréquence de personnes d'origine mexicaine parmi les jurés est « anormale » ou pas.

Considérons l'expérience aléatoire suivante : « En 1976, on rencontre une personne de ce comté au hasard » et supposons que toutes les issues sont équiprobables.

La probabilité de l'évènement «cette personne est d'origine mexicaine» est identique à la proportion de personnes du comté d'origine mexicaine. Ce résultat provient de l'hypothèse d'équirépartion des probabilités.

De manière générale, lorsqu'on choisit n individus une population, tout se passe comme si on répétait n fois une expérience de tirage avec remise, à condition que n soit bien plus petit que la taille de la population.

Dans cet expérience, on appellera *échantillon* le fait de tirer au hasard 870 personnes et *taille de l'échantillon* le nombre de personnes choisies. Ici, la taille est de 870.

Là encore, on peut prévoir avec une certitude d'au moins 95% où se situe la fréquence recherchée si on tire au hasard 870 personnes. On appellera *intervalle de fluctuation à 95%* cet intervalle.

5.3.2 Les formules à retenir

Connaissant la probabilité (ou la proportion) p et la taille n de l'échantillon, *l'intervalle de fluctuation à 95%* de la fréquence s'obtient par la formule :

$$\boxed{\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}};\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]}$$

De même, connaissant la fréquence f pour un échantillon de taille n, *l'intervalle de confiance à 95%* de la probabilité (ou de la proportion) s'obtient par la formule :

$$\boxed{\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}};\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]}$$

Par exemple, si on cherche l'intervalle de fluctuation à 95% dans le cadre de l'affaire partida, on calcule :

$$\left[0,791 - \frac{1}{\sqrt{870}};\ 0,791 + \frac{1}{\sqrt{870}}\right] \simeq [0,7571;\ 0,8249]$$

Comme la fréquence de jurés d'origine mexicaine était de $\frac{339}{870} \simeq 0,3897$ et que cette fréquence n'est pas dans l'intervalle, on peut considérer que la situation est anormale. C'est d'ailleurs pour cette raison que Partida a réussi à faire casser son procès.

Dans les applications numériques, n'oubliez pas de convertir les pourcentages afin de calculer les intervalles de fluctuation ou de fréquences.
Ainsi, il ne faudra pas calculer $50 - \frac{1}{\sqrt{100}}$ mais bien $\frac{50}{100} - \frac{1}{\sqrt{100}}$ pour déterminer un intervalle de confiance avec une fréquence de 50% et une taille d'échantillon de 100.

✎ **Exercice 3**

Dans un village, sur les 100 dernières naissances, on observe 37 garçons.

1. *Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95% des fréquences de garçons associé à un échantillon de taille 100. On admettra qu'il naît autant de garçons de que de filles dans le monde.*
2. *La situation dans ce village paraît-elle normale ?*

✎ **Exercice 4**

Sur un sondage de 1000 personnes, 300 déclarent vouloir passer les prochaines vacances à l'étranger.

Déterminer l'intervalle de confiance à 95% de la proportion de personnes voulant passer leurs prochaines vacances à l'étranger.

Annexe A

Formulaire

A.1 Dérivation

A.1.1 Droites

Soient A et B 2 points distincts d'un plan muni d'un repère $(O; I; J)$. L'équation de la droite (AB) s'écrit :
(Cas n° 1) $\boxed{x = x_A}$ lorsque $x_A = x_B$
(Cas n° 2) $\boxed{y = mx + p}$ lorsque $x_A \neq x_B$, avec

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
$$p = y_A - mx_A$$

Dans le cas où l'on connaît m, la droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur m a pour équation

$$\boxed{y = m(x - x_A) + y_A}$$

A.1.2 Tangentes

Soit une fonction f de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et soit a un nombre.
Le nombre dérivé de f en a, lorsqu'il existe, est le nombre $f'(a)$ correspondant au coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.
Dans ce cas, l'équation de la tangente est :

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

A.1.3 Dérivation des fonctions usuelles

n désigne un nombre entier naturel. k est un nombre réel fixé.

Nom	Définition	Dérivabilité	$f(t)$	$f'(t)$
Constante	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	k	0
Identité	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	t	1
Puissance	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	t^n	nt^{n-1}
Racine	$[0;\ +\infty[$	$]0;\ +\infty[$	$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2\sqrt{t}}$
Inverse	$]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$	$]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$	$\frac{1}{t}$	$\frac{-1}{t^2}$
Exponentielle	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^t	e^t
Logarithme	$]0;\ +\infty[$	$]0;\ +\infty[$	$\ln(t)$	$\frac{1}{t}$

A.1.4 Opérations et dérivation

On dispose également de formules permettant de calculer la dérivée de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions.
Ainsi, dans les formules suivantes, u, v et w désignent trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I et dérivables en un nombre t de I. D'autre part, α désigne un nombre fixé et on supposera que $w(t) \neq 0$.

On a alors :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} (u+v)'(t) & = & u'(t)+v'(t) \\ (\alpha u)'(t) & = & \alpha u'(t) \\ (uv)'(t) & = & u'(t)v(t)+u(t)v'(t) \\ \left(\dfrac{1}{w}\right)'(t) & = & -\dfrac{w'(t)}{w(t)^2} \\ \left(\dfrac{u}{w}\right)'(t) & = & \dfrac{u'(t)w(t)-u(t)w'(t)}{w(t)^2} \end{array}}$$

A.2 Taux d'évolution et suites

A.2.1 Taux d'évolution

Soient V_{initiale} et V_{finale} deux valeurs positives avec $V_{\text{initiale}} \neq 0$.
Le coefficient multiplicateur de V_{initiale} à V_{finale} est le nombre :

$$\boxed{C = \frac{V_{\text{finale}}}{V_{\text{initiale}}}}$$

Le taux d'évolution de V_{initiale} à V_{finale} est le nombre :

$$\boxed{t = \frac{V_{\text{finale}} - V_{\text{initiale}}}{V_{\text{initiale}}}}$$

Le coefficient multiplicateur et le taux d'évolution sont reliés par la formule :

$$\boxed{C = 1 + t}$$

A.2.2 Évolutions successives

Soient V_{initiale}, $V_{\text{intermédiaire}}$ et V_{finale} trois valeurs positives avec $V_{\text{initiale}} \neq 0$ et $V_{\text{intermédiaire}} \neq 0$.
Le coefficient multiplicateur de V_{initiale} à V_{finale} se calcule en fonction des coefficients multiplicateurs de V_{initiale} à $V_{\text{intermédiaire}}$ et de $V_{\text{intermédiaire}}$ à V_{finale}, notés C_1 et C_2 :

$$\boxed{C_{\text{global}} = \frac{V_{\text{finale}}}{V_{\text{initiale}}} = C_1 C_2}$$

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque de V_{finale} à V_{initiale} est le nombre :

$$\boxed{C_{\text{réciproque}} = \frac{V_{\text{initiale}}}{V_{\text{finale}}} = \frac{1}{C_{\text{direct}}}}$$

A.2.3 Évolution moyenne

On considère une évolution sur n périodes où une grandeur passe de V_0 à V_n.
Alors le taux d'évolution moyen t_n sur ces n périodes vaut :

$$\boxed{t_n = \left(\frac{V_n}{V_0}\right)^{1/n} - 1}$$

Lorsqu'on connaît le taux coefficient multiplicateur global C_{global}, cette formule peut s'écrire de manière équivalente :

$$\boxed{t_n = C_{\text{global}}^{1/n} - 1}$$

A.2.4 Indice

Soient V_{initiale} et V_{finale} deux valeurs d'une grandeur positive.
L'*indice base 100 relativement à $V_{initiale}$* de V_{finale} vaut :

$$\boxed{I = 100 \times \frac{V_{\text{finale}}}{V_{\text{initiale}}}}$$

A.2.5 Suites

A.2.5.1 Arithmétique

Soit une suite u arithmétique de raison a. Alors pour tout n :

$$\boxed{u_n = an + u_0}$$

Si la suite commence à u_1, on a également la formule :

$$\boxed{u_n = a(n-1) + u_1}$$

A.2.5.2 Géométrique

Soit une suite u géométrique de raison q. Alors pour tout n :

$$\boxed{u_n = u_0 q^n}$$

Si la suite commence à u_1, on a également la formule :

$$\boxed{u_n = u_1 q^{n-1}}$$

A.3 Fonctions du second degré

Soient a, b et c trois nombres fixés avec $a \neq 0$.
Soit une fonction f qui à tout x associe $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On calcule $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ puis on distingue trois cas :

(cas n° 1) Si $\Delta < 0$, $f(x)$ est toujours du signe de a. Dans ce cas, $f(x)$ de peut pas se factoriser.

(cas n° 2) Si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe opposé à a pour x compris entre r_1 et r_2 et est du signe de a ailleurs, les valeurs de r_1 et r_2 étant :

$$\boxed{\begin{cases} r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}}$$

Dans ce cas, on dit que r_1 et r_2 sont les *racines* de f et $f(x)$ se factorise :

$$\boxed{f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)}$$

(cas n° 3) Si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq r$ et s'annule pour $x = r$ avec :

$$\boxed{r = \frac{-b}{2a}}$$

Dans ce cas, on dit que r est la *racine double* de f et $f(x)$ se factorise :

$$\boxed{f(x) = a(x - r)^2}$$

A.4 Probabilités

A.4.1 Union et contraire

Soient A et B deux évènements. On a :

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \text{ et } \boxed{P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)}$$

A.4.2 Probabilité conditionnelle

Soient E et F deux évènements avec $P(F) \neq 0$.
On définit la probabilité de F sachant E par :

$$\boxed{P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}} \text{ ce qui s'écrit aussi } \boxed{P(E \cap F) = P_E(F)\, P(E)}$$

Annexe B

Algorithmique

L'algorithmique se révèle être un sujet délicat pour beaucoup d'élèves de terminale S. L'objectif de ce petit chapitre est de présenter le vocabulaire de l'algorithmique puis, à travers des exemples de difficulté croissante, d'aborder des cas classiques d'étude.

B.1 Introduction à l'algorithmique

Les algorithmes sont omniprésents dans le quotidien : depuis le programme du lave-linge, jusqu'à la procédure d'arrimage d'un module de la station orbitale ; même certains de nos comportements les plus automatisés sont en fait des algorithmes.
Par exemple le fait se sortir de cette pièce peut se décomposer de la manière suivante :

```
Je me dirige vers la porte.
J'ouvre la porte.
Je sors de la pièce
```

> La séquence d'instructions ne tient pas compte du fait que la porte soit ouverte ou non. On verra plus tard comment intégrer une telle condition.
> On peut remarquer également que chacune des instructions peut être décomposée en instructions plus simples. Par exemple, le fait de « se diriger vers la porte » est constitué de plusieurs instructions élémentaires.

B.1.1 Vocabulaire

B.1.1.1 Algorithme, entrée, sortie

Un *algorithme* est une séquence d'instructions visant à produire un résultat ou une opération à partir d'une certaine situation de départ.
On appelle souvent *entrée* la situation de départ et *sortie* le résultat de l'algorithme.
On parlera d'*éditer* un programme lorsqu'on écrira les instructions et d'*exécuter* un programme lorsqu'on demandera à la machine d'exécuter les instructions.

B.1.1.2 Instructions

Lorsque l'on demande à la machine d'accomplir une action, on parle d'*instruction*.
Voilà les principaux types d'instructions que l'on retrouve en informatique :

- Afficher un message ou une image à l'écran.
- Lire une donnée depuis une saisie clavier, une action de la souris ou un emplacement de la mémoire.
- Écrire dans la mémoire.
- Faire un calcul (numérique ou logique).

B.1.1.3 Variables

Dans un algorithme, on demande souvent à la machine de manipuler :
- des nombres
- des chaînes de caractère
- des variables de type VRAI / FAUX [1]

Quand l'ordinateur manipule de telles grandeurs, il les stocke en mémoire. Aussi, on doit spécifier à l'ordinateur qu'il doit créer cet espace de stockage dans sa mémoire. La taille de l'espace en question et la manière dont l'ordinateur gère ce stockage dépend souvent du type de grandeur manipulée.

Une *variable* est ainsi un emplacement dans la mémoire de l'ordinateur que l'on désigne par un *nom*.
Lorsqu'on décide de créer un tel emplacement, on doit spécifier :
- un nom pour la variable
- le type de variable que l'on souhaite créer

Les *types de variable* dépendent du langage informatique utilisé. Pour simplifier, les deux principaux types sont :
- les nombres
- les chaînes de caractère

On appelle *déclaration* l'action de spécifier le nom et le type d'une variable.
On appelle *affectation (ou écriture)* l'action de stocker une valeur donnée dans l'espace mémoire correspondant à une variable
Enfin, on appelle *lecture de variable* le fait de récupérer le contenu de l'espace mémoire correspondant à une variable.
En résumé, on utilise les variables pour stocker des données dans une case mémoire. Afin de manipuler des variables, il faut d'abord les créer (les déclarer) puis on peut dans la suite de l'algorithme lire et écrire dans cet espace mémoire. On lit ou on écrit une variable en spécifiant son nom à la machine.

B.1.2 Instructions conditionnelles et boucles

B.1.2.1 Instructions conditionnelles

On reprend l'exemple de l'algorithme de la sortie de cette pièce et on l'affine un peu. En fait, on aimerait que l'algorithme prenne en compte le fait que la porte soit ouverte ou non. La version améliorée s'écrit donc :

```
Je me dirige vers la porte
    Si la porte est fermée:
        J'ouvre la porte
        Je sors de la pièce
    Si la porte est ouverte:
        Je sors de la pièce
```

La plupart des langages de programmation permettent de réaliser des séquences d'instructions différentes selon qu'une condition est vérifiée ou non. Une *instruction conditionnelle* est ainsi une séquences d'instructions exécutée uniquement si une condition est vérifiée.
Pour reprendre une image connue, cela correspond à un « aiguillage » dans le programme.
Suivant les langages, la syntaxe et la variété des instructions conditionnelles change. La plus célèbre d'entre elles, présente dans presque tous les langages de programmation s'appelle *if ... then ... end*. En français, cela s'écrit :

```
    Si telle condition est vérifiée alors:
        Faire action 1
        Faire action 2
        ...
```

1. On appelle cela des variables *booléennes*.

Une version améliorée du *si … alors … fin* permet de spécifier une séquence alternative d'instructions lorsque la condition n'est pas vérifiée. Elle s'écrit *si … alors … sinon … fin*
Dans le cas de l'algorithme de sortie de pièce, on aurait ainsi pu écrire :

```
Je me dirige vers la porte
    Si la porte est fermée:
        J'ouvre la porte
        Je sors de la pièce
    Sinon:
        Je sors de la pièce
```

B.1.2.2 Boucles

On imagine que l'on souhaite écrire un algorithme pour un basketteur qui doit effectuer 100 fois la même tâche en entraînement, par exemple « marquer un coup franc ». On pourrait bien sûr écrire :

```
Je me place sur la ligne
Je vise le panier
Je lance
Je me place sur la ligne
Je vise le panier
Je lance
Je me place sur la ligne
Je vise le panier
Je lance
...
```

Heureusement, presque tous les langages de programmation permettent de dire à la machine d'effectuer 100 fois la même tache. On pourra donc écrire :

```
    100 fois de suite:
        Je me place sur la ligne
        Je vise le panier
        Je lance
```

On appelle un tel procédé une *boucle*, c'est une séquence d'instructions répétées un nombre donné de fois. Là encore, il peut y avoir des différences selon les langages de programmation. La boucle la plus présente est la boucle *for … … end.* En français on peut l'écrire :

```
    x fois de suite:
        Faire action 1
        Faire action 2
        ...
```

B.1.2.3 Boucles conditionnelles

Une boucle conditionnelle est une série d'instructions qui s'exécute tant qu'une certaine condition est vérifiée. En français, une telle boucle s'appelle *tant que.*
En reprenant l'exemple du basketteur, on peut améliorer son entraînement en se disant qu'il l'arrête dès qu'il a marqué 5 paniers de suite :

```
    Tant que je n'ai pas marqué 5 paniers de suite:
        Je me place sur la ligne
```

```
Je vise le panier
Je lance
```

Dans la plupart des langages une telle boucle s'écrit *while ... ... end.*

B.1.3 Introduction à la programmation avec la TI

B.1.3.1 Le menu Prgm

Le menu `prgm` de la calculatrice est constitué de 3 sous-menus :

- `EXEC` correspond à l'exécution du programme. Une fois sélectionné le programme que l'on souhaite exécuter avec `entrer` , il s'affiche
  `prgmNomDuProgramme` dans le menu principal. Pour lancer le programme, il faut valider avec `entrer`
- `EDIT` permet d'éditer (de modifier) les programmes existants.
  Le mode d'édition se caractérise par les `:` en début de chaque ligne. Il est inutile de sauver, cela est fait automatiquement lorsqu'on écrit dans le programme.
- `NOUV` afin de créer un nouveau programme. Il suffit d'écrire le nom du nouveau programme et de valider avec `entrer` . On se retrouve alors dans le mode d'édition du programme.

B.1.3.2 Les instructions d'entrées / sorties

Ces instructions s'obtiennent en appuyant sur la touche `prgm` en mode édition, puis en allant dans le sous-menu `E/S` .

1. Pour afficher un message ou une variable :
   `Disp "BONJOUR"` affiche « BONJOUR » à l'écran
   `Disp A` affiche la valeur de A à l'écran
   `Disp "A CARRE VAUT", A^2` affiche « A CARRE VAUT » suivi de la valeur de A^2 à l'écran
2. Pour que l'utilisateur saisisse une valeur dans une variable :
   `Input "ENTRER UNE VALEUR", X` affiche le message « ENTRER UNE VALEUR » suivi d'un prompt. Quand l'utilisateur saisit un nombre, il est stocké dans X
   `Prompt X, Y, Z` va afficher successivement 3 prompts. Quand l'utilisateur va saisir les 3 nombres, ces derniers seront stockés respectivement dans X, Y puis Z.

B.1.3.3 Le stockage dans une variable

On utilise la commande `sto` .
Par exemple, `2*A+3 → B` va calculer $2A+3$ et stocker cette valeur dans la variable B.

B.1.3.4 Pour exécuter un programme

Il faut sortir du mode édition (`2nde` `mode`) puis exécuter le programme (`prgm` puis sous-menu `EXEC` et enfin `Entrer` deux fois).

B.2 Quelques applications

B.2.1 Calcul d'intervalles de fluctuations

On peut tout à fait automatiser le traitement des calculs d'intervalles de fluctuation et de confiance.
Ici, la calculatrice nous permet de calculer automatiquement les bornes de l'intervalle.
Un tel programme s'écrit, par exemple :

```
:Input "F OU P=?",P :Prompt N
:1/√(N) → D
:Disp "INTERVALLE:"
```

```
:Disp P-D, P+D
```

B.2.2 Suites définies par récurrence

Les algorithmes permettent de travailler sur des suites définies par récurrence. On exploitera l'exemple :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1000 \\ u_{n+1} & = & 1,05 \times u_n - 40 \end{cases}$$

Pour déterminer u_{100}, on doit calculer $u_1, u_2, \cdots, u_{99}$. À chaque étape, on modifie le terme de la même manière pour passer au terme suivant, ce qui conduit à utiliser une boucle.
Le calcul de u_{100} pourra ainsi s'écrire :

`On affecte la valeur` 1000 `à` u
`Pour i allant de` 1 `à` 100`:`
    `On affecte la valeur` $1,05 \times u - 40$ `à` u.
`Fin pour`
`On affiche la valeur de` u.

On n'a pas besoin d'avoir 100 variables pour déterminer u_{100}. En effet, dans le cas d'une récurrence d'ordre 1, on calcule un terme à partir de la seule valeur du terme précédent. Ainsi, on peut « écraser » la valeur de u à chaque étape.

Exercice 0

Écrire cet algorithme à la `TI`. On obtient les boucles depuis le mode édition en allant dans `prgm` puis `CTL` .

On admettra ici que u est strictement croissante. On suppose que l'on souhaite déterminer le rang à partir duquel u devient supérieure à 10^6. Ici, on doit donc stocker d'une manière ou d'une autre le rang en cours et utiliser une boucle conditionnelle qui s'arrête dès que u dépasse 10^6.
L'algorithme s'écrira :

`On affecte la valeur` 1000 `à` u
`On affecte la valeur` 0 `à` n
`Tant que` $u < 10^6$`:`
    `On affecte la valeur` $1,05 \times u - 40$ `à` u.
    `On affecte la valeur` $n+1$ `à` n.
`Fin tant que`
`On affiche la valeur de` n.

Exercice 1

Implémenter cet algorithme à la `TI`.

La condition du `Tant que` est le contraire de la situation recherchée. En effet, l'algorithme doit s'arrêter dès que $u \geq 10^6$, ce qui signifie qu'il continue tant que $u < 10^6$!

La variable n définie plus haut s'appelle un compteur car elle compte le nombre de passages dans la boucle. *Incrémenter* le compteur signifie augmenter sa valeur de 1.