

---

## Planche n° 5: Convexité

---

Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

### Exercice 1

#### Partie A

La fonction  $f$  est définie pour tout réel  $x$  élément de l'intervalle  $[1 ; 7]$  par :

$$f(x) = 1,5x^3 - 9x^2 + 24x + 48.$$

On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  et  $f''$  sa dérivée seconde sur  $[1 ; 7]$ .

- Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1 ; 7]$  :
  - Calculer  $f'(x)$ .
  - Calculer  $f''(x)$ .
- Déterminer sur quel intervalle la fonction  $f$  est convexe.

#### Partie B

Une entreprise fabrique et commercialise un article dont la production est comprise entre 1 000 et 7 000 articles par semaine.

On modélise le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, par la fonction  $f$  définie dans la partie A où  $x$  désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.

On note  $c$  la fonction définie sur  $[1 ; 7]$  représentant le coût moyen par article fabriqué, exprimé en euros.

On a, par conséquent, pour tout  $x$  de  $[1 ; 7]$  :

$$c(x) = \frac{f(x)}{x} = 1,5x^2 - 9x + 24 + \frac{48}{x}.$$

On admet que la fonction  $c$  est dérivable sur  $[1 ; 7]$ . On note  $c'$  sa fonction dérivée.

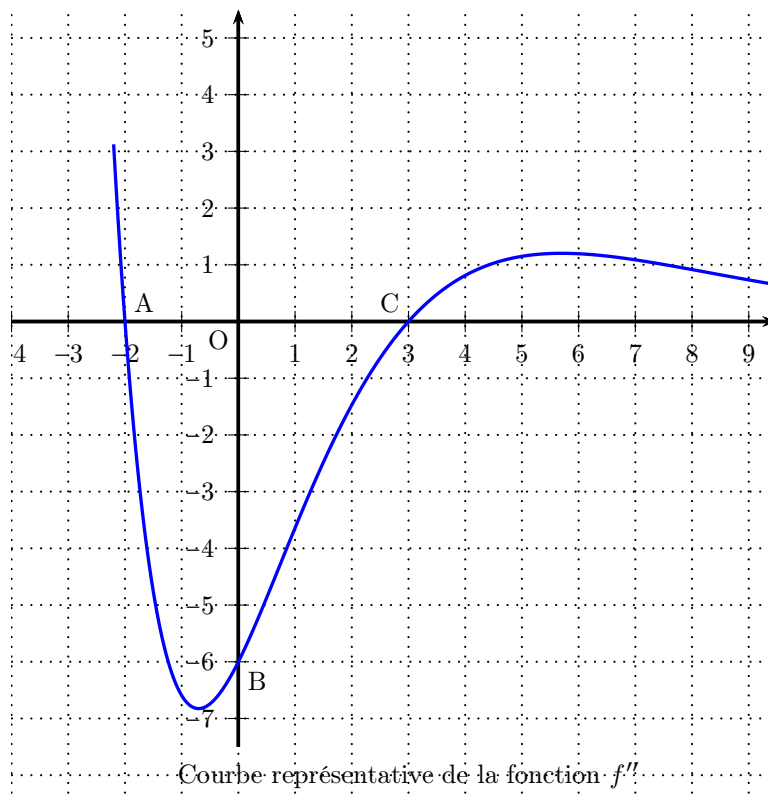
- Montrer que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[1 ; 7]$ , on a :

$$c'(x) = \frac{3(x-4)(x^2+x+4)}{x^2}.$$

- Étudier les variations de la fonction  $c$  sur l'intervalle  $[1 ; 7]$ .
  - Déterminer, en milliers, le nombre d'articles à fabriquer pour que le coût moyen par article soit minimal.

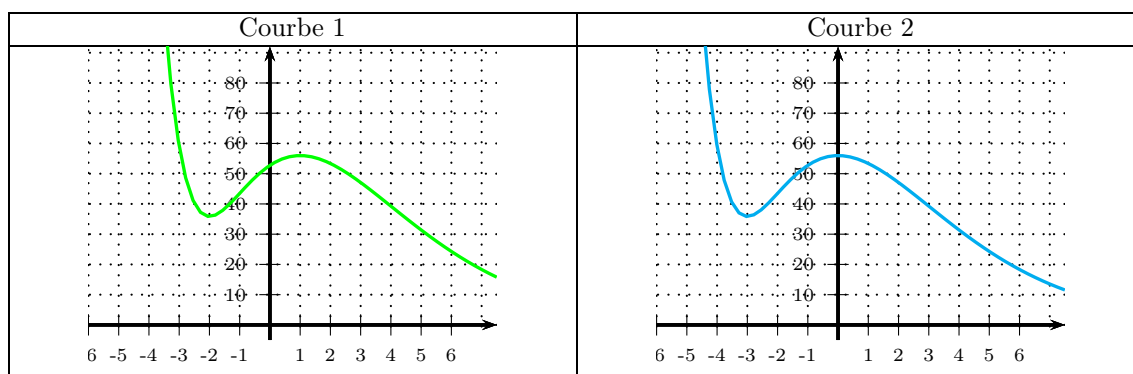
## Exercice 2

On considère une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction  $f''$ , dérivée seconde de la fonction  $f$ , dans un repère orthonormé. Les points suivants appartiennent à la courbe :  $A(-2 ; 0)$  ;  $B(0 ; -6)$  et  $C(3 ; 0)$ .



Dans tout cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1. La courbe représentative de  $f$  admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur  $[-2 ; 3]$ , la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction  $f$  : laquelle ? Justifier la réponse.



---

## Planche n° 3 : Convexité

### Corrigé

---

### Exercice 1

#### Partie A

- Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1 ; 7]$  :
  - $f'(x) = 1,5 \times 3x^2 - 9 \times 2x + 24 = 4,5x^2 - 18x + 24$
  - $f''(x) = 4,5 \times 2x - 18 = 9x - 18$
- La fonction  $f$  est convexe sur les intervalles sur lesquels sa dérivée première  $f'$  est croissante, c'est-à-dire sur lesquels sa dérivée seconde  $f''$  est positive.  
 $f''(x) \geq 0 \iff 9x - 18 \geq 0 \iff 9x \geq 18 \iff x \geq 2$   
 La fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $[2 ; 7]$ .

#### Partie B

$$1. \quad c'(x) = 1,5 \times 2x - 9 + 0 + 48 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3x - 9 - \frac{48}{x^2} = \frac{3x^3 - 9x^2 - 48}{x^2}$$

$$\frac{3(x-4)(x^2+x+4)}{x^2} = \frac{3(x^3+x^2+4x-4x^2-4x-16)}{x^2} = \frac{3(x^3-3x^2-16)}{x^2} = \frac{3x^3-9x^2-48}{x^2}$$

Donc, pour tout  $x$  de

$$[1 ; 7]$$

$$, \quad c'(x) = \frac{3(x-4)(x^2+x+4)}{x^2}$$

- (a) On cherche le signe de  $c'(x)$  sur l'intervalle  $[1 ; 7]$ .
  - signe de  $x - 4$  :  $x - 4 > 0$  pour  $x > 4$  donc sur  $[4 ; 7]$
  - signe de  $x^2 + x + 4$  :  $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$  donc  $x^2 + x + 4 > 0$  pour tout  $x$ $c(1) = 64,5$ ,  $c(4) = 24$  et  $c(7) \approx 41,4$

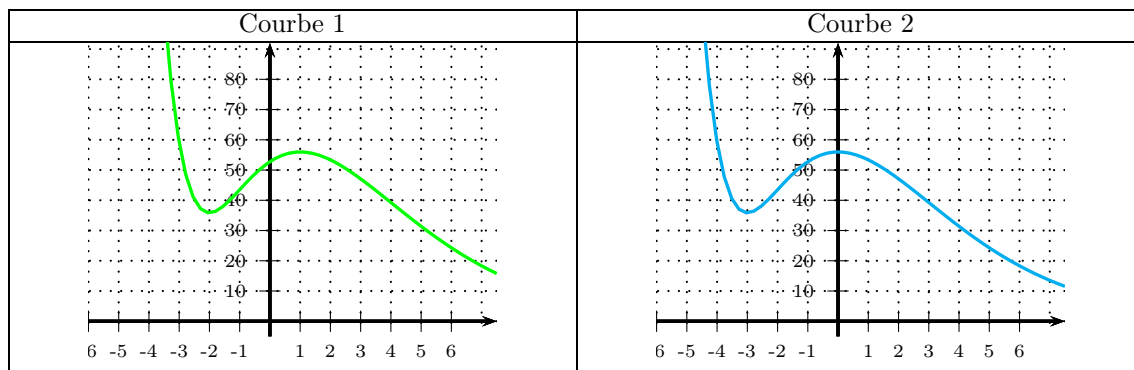
D'où le tableau de variation de la fonction  $c$  sur  $[1 ; 7]$  :

$x$	1	4	7
$x - 4$	-	0	+
$x^2 + x + 4$	+		+
$x^2$	+		+
$c'(x)$	-	0	+
$c(x)$	64,5	24	41,4

- (b) Le minimum de la fonction  $c$  est atteint pour  $x = 4$  donc pour 4 000 articles à fabriquer ; le coût moyen par article est alors de  $24 \times 1\,000$  soit 24 000 euros.

## Exercice 2

1. La courbe représentative de la fonction  $f$  admet un point d'inflexion si cette courbe traverse sa tangente, autrement dit si la dérivée seconde de  $f$  s'annule et change de signe.  
D'après sa courbe représentative, la fonction  $f''$  s'annule et change de signe en  $x = -2$  et  $x = 3$  ; donc la courbe représentant la fonction  $f$  admet deux points d'inflexion, aux points d'abscisses  $-2$  et  $3$ .
2. Sur l'intervalle  $[-2; 3]$ , la courbe représentant la fonction  $f''$  est située en dessous de l'axe des abscisses, donc  $f'' \leq 0$ . Cela veut dire que, sur cet intervalle, la fonction dérivée première  $f'$  est décroissante, et donc que la fonction  $f$  est concave.
3. On donne les deux courbes :



La courbe 1 représente une fonction qui admet en  $x = -2$  un minimum ; au point d'abscisse  $-2$ , la courbe ne traverse pas sa tangente, donc le point d'abscisse  $-2$  n'est pas un point d'inflexion. Donc la courbe 1 ne représente pas la fonction  $f$ .

La fonction  $f$  est représentée par la courbe 2.