
Planche n° 3 : Résolutions de problèmes assistées par XCas

Corrigé

Partie A : Résolutions d'inéquations

1. L'inéquation est équivalente à $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Il faut maintenant chercher le signe de l'expression trinômiale $x^2 - 4x + 3$.

Son discriminant vaut, après calcul, 4. Les deux racines sont, après calcul, $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$.

Cette expression est donc strictement négative pour x dans $]1; 3[$.

2. (a) Cela se fait en annulant le membre de droite et en réduisant le membre de gauche au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
 \frac{x+1}{x-1} \geq x &\iff \frac{x+1}{x-1} - x \geq 0 \\
 &\iff \frac{x+1}{x-1} - \frac{x(x-1)}{x-1} \geq 0 \\
 &\iff \frac{x+1-x(x-1)}{x-1} \geq 0 \\
 &\iff \frac{x+1-x^2+x}{x-1} \geq 0 \\
 &\iff \frac{-x^2+2x+1}{x-1} \geq 0
 \end{aligned}$$

(b) Là encore, on a déterminé un problème équivalent de recherche de signe. Il nous faut donc factoriser le numérateur du membre de gauche.

C'est une expression trinômiale dont les racines sont, après calcul, $r_1 = -\sqrt{2}+1$ et $r_2 = \sqrt{2}+1$.

Le signe du dénominateur $x-1$ est, quant à lui, très simple.

Finalement, on dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}+1$	1	$\sqrt{2}+1$	$+\infty$	
$-x^2 + 2x + 1$	-	0	+	+	0	-
$(x - 1)$	-		0	+		+
$\frac{-x^2 + 2x + 1}{x - 1}$	+	0	-	+	0	-

On cherchait l'expression positive ou nulle, les solutions sont donc $]-\infty; -\sqrt{2}+1] \cup]1; \sqrt{2}+1]$.

3. On refait les mêmes opérations et on obtient une inéquation équivalente :

$$\frac{(1-2x)(1+2x)}{x^2} \geq 0.$$

On fait de même un tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$(1 - 2x)$	+	0	+	0	-
$(1 + 2x)$	-	0	+	+	+
x^2	+	+	0	+	+
$\frac{(1 - 2x)(1 + 2x)}{x^2}$	-	0	+	+	0

On obtient les solutions $\left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \left]0; \frac{1}{2}\right]$

4. L'inéquation de départ est équivalente à $x^2 - 3x - 4 \geq 0$. Les racines de la fonction trinôme sont $r_1 = -1$ et $r_2 = 4$. L'expression est donc positive ou nulle sur $]-\infty; -1] \cup [4; +\infty[$.

Partie B : Études de fonctions

Les commandes listées à la fin permettent de répondre à l'ensemble des questions de cette partie.

1. (a) On doit raisonner par équivalence sur l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1}{2} &\iff 2(x+1) = x^2+1 \\ &\iff 2x+2 = x^2+1 \\ &\iff x^2+1-2x-2 = 0 \\ &\iff x^2-2x-1 = 0 \end{aligned}$$

Après calcul du discriminant et des racines, on obtient les solutions $-1 + \sqrt{2}$ et $-1 - \sqrt{2}$. Mais il faut éliminer $-1 - \sqrt{2}$ qui n'est pas dans $[0; 10]$.

- (b) Il faut utiliser la dérivée d'un quotient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (x^2+1) - 2x \times (x+1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Le tableau de signes se fait toujours selon le même principe. Ici, on réduit à $[0; 10]$ puisque la fonction est définie sur cet intervalle :

x	0	$-1 + \sqrt{2}$	10
$-x^2 - 2x + 1$	+	0	-
$(x^2 + 1)^2$	+		+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1	$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$	$\frac{11}{101}$

(c) À l'aide du logiciel on obtient :

$$f''(x) = \frac{2(x-1)(x-\sqrt{3}+2)(x+\sqrt{3}+2)}{(x^2+1)^3}$$

Pour étudier la convexité, il faut dresser le tableau de signes de f'' .

x	0	1	10
2	+		+
$(x-1)$	-	0	+
$(x-\sqrt{3}+2)$	+		+
$(x+\sqrt{3}+2)$	+		+
$(x^2+1)^3$	+		+
$f''(x)$	-	0	+

La fonction est donc concave sur $[0; 1]$. Elle est convexe sur $[1; 10]$

2. (a) Il faut résoudre « $g(x)$ positif » avec XCas

On obtient ainsi le tableau de signes de g :

x	-5	1	5
$g(x)$	-	0	+

(b) Il faut chercher le tableau de signes de $g'(x)$. Après calcul, on obtient :

x	-5		5
$g'(x)$		+	
$g(x)$	-198	92	

(c) Grâce au logiciel, on détermine le signe de g'' .

x	-5	$\frac{2}{3}$	5
$g''(x)$	-	0	+

La fonction est donc concave sur $\left[-5; \frac{2}{3}\right]$ puis convexe ensuite.

```
1 f(x):=(x+1)/(x^2+1)
2 resoudre(f(x)=1/2)
3 factoriser(deriver(f))
4 f(0)
5 simplifier(f(sqrt(2)-1))
6 f(10)
7 ddf:=factoriser(deriver(deriver(f)))
8 resoudre(ddf(x)>=0)
9 g(x):=x^3-2x^2+4x-3
10 resoudre(g(x)>=0)
11 resoudre(deriver(g(x))>=0)
12 g(-5)
13 g(5)
14 resoudre(deriver(deriver(g(x)))>=0)
```