Annexe C

Tableau de signes

C.1 Premier exemple très simple

Soit la fonction $f : x \mapsto x(x-2)$. On cherche à déterminer le signe de cette fonction.
Pour cela, on va utiliser la fait que si on connaît simultanément le signe de x, et celui de $(x-2)$, on peut en déduire le signe de $f(x)$.
Nous allons donc déterminer séparément le signe de ces facteurs.
Ainsi :

$$\begin{aligned} x \text{ est positif} &\Longleftrightarrow x \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in [0;\ +\infty[\\ &\text{D'autre part :} \\ (x-2) \text{ est positif} &\Longleftrightarrow x-2 \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x-2+2 \geq 0+2 \\ &\Longleftrightarrow x \geq 2 \\ &\Longleftrightarrow x \in [2;\ +\infty[\end{aligned}$$

Les deux nombres pour lesquels ces deux facteurs changent de signe sont donc 0 et 2.

Le tableau de signes de f est ainsi dressé de la manière suivante :

1. La première ligne correspond aux valeurs de x importantes pour le signe de f (ici, on place 0, 2).
2. Chaque ligne suivante correspond au signe de chacun des facteurs tels que déterminés juste avant.
3. La dernière ligne correspond au signe de $f(x)$. Pour remplir cette dernière ligne, on utilise les lois présentées plus loin et que l'on connaît en fait depuis le collège.

Cela donne en pratique :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Voici comment la dernière ligne de ce tableau se lit :
« $f(x)$ est strictement positif lorsque x appartient à $]-\infty;\ 0[\cup]2;\ +\infty$ ».
« $f(x)$ est strictement négatif lorsque x appartient à $]0;\ 2[$ ».
« $f(x)$ s'annule lorsque $x=0$ ou $x=2$ ».

C.2 Un exemple complet

Soit une nouvelle fonction $g : x \mapsto \dfrac{(3x-6)(-x-1)}{(x+4)}$. On cherche encore une fois à déterminer le signe de cette fonction.
Ce signe se déduit de celui de $(3x-6)$, de $(-x-1)$ et de $(x+4)$.
Nous allons donc déterminer séparément le signe de ces facteurs.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
(3x-6) \text{ est positif} &\iff 3x-6 \geq 0 \\
&\iff 3x-6+6 \geq 0+6 \\
&\iff \frac{3x}{3} \geq \frac{6}{3} \\
&\iff x \geq 2 \\
&\iff x \in [2;+\infty[\\
&\text{D'autre part :} \\
(-x-1) \text{ est positif} &\iff -x-1 \geq 0 \\
&\iff -x-1+x \geq 0+x \\
&\iff -1 \geq x \\
&\iff x \in]-\infty;-1] \\
&\text{Et enfin :} \\
(x+4) \text{ est positif} &\iff x+4 \geq 0 \\
&\iff x+4-4 \geq 0-4 \\
&\iff x \geq -4 \\
&\iff x \in [-4;+\infty[
\end{aligned}$$

Ainsi, les 3 nombres charnières donnant le signe de g sont 2, -1, -4.
Nous pouvons donc en déduire le tableau de signes de g.
Sachant que l'inverse de 0 n'existe pas, nous en déduisons que le dénominateur de $g(x)$ ne peut pas s'annuler.
Ainsi, -4 **est une valeur interdite de** g.

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
$(3x-6)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-x-1)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x+4)$		$-$	$\|\|$	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

C.3 Propriétés à connaître

C.3.1 Loi des signes et signe de l'inverse

Proposition : Loi des signes

Soient a et b 2 nombres.
Le signe de $a \times b$ est donné par le tableau suivant.

	$a > 0$	$a < 0$	$a = 0$
$b > 0$	$+$	$-$	0
$b < 0$	$-$	$+$	0
$b = 0$	0	0	0

Proposition : Signe de l'inverse

Soit a un nombre non nul.
Le signe de a est identique au signe de $\frac{1}{a}$.

C.3.2 Rappel : tableau de signes d'une fonction affine

Proposition :

Soient m et p 2 nombres fixés tels que $m \neq 0$.
Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine.
Alors le tableau de signes de f est donné par :

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		*signe opposé de m*	0	*signe de m*	

Exercice 0

1. *Établir les tableaux de signes des fonctions*

$$\begin{array}{llll} f: & x & \mapsto & 2x+1 \\ g: & x & \mapsto & -2x \\ h: & x & \mapsto & -3x-2 \end{array}$$

2. *En déduire le tableau de signes de la fonction*

$$u : x \mapsto \frac{-2x(2x+1)}{-3x-2}$$

3. *Pour quelle valeur la fonction u n'est-elle pas définie ?*

C.4 Études de signe et exemples d'application

C.4.1 Quelques exercices

Exercice 1

Soit la fonction $h : x \mapsto (-2x+3)(x-5)(x+1)$.
On cherche à résoudre $h(x) \geq 0$.

1. *Résoudre les inéquations suivantes et donner les solutions sous forme d'intervalle*
   a) $-2x+3 \geq 0$
   b) $x-5 \geq 0$
   c) $x+1 \geq 0$
2. *En suivant le même principe que pour l'exemple complet du premier paragraphe, dresser le tableau de signes de* h.
3. *En déduire la solution de* $h(x) \geq 0$

Exercice 2

On cherche à résoudre $(3x-5)(-x+2) < 0$.

1. *Reproduisez les étapes de l'exercice précédent afin d'obtenir le tableau de signes de la fonction* $x \mapsto (3x-5)(-x+2)$.
2. *En déduire les solutions de l'inéquation.*

Exercice 3

On cherche à résoudre $\dfrac{(x-1)(x+1)}{2-x} \geq 0$.

1. *Pour quelle valeur de* x*, l'expression* $\dfrac{(x-1)(x+1)}{2-x}$ *n'est pas définie.*
2. *Faire le tableau de signes de la fonction* $x \mapsto \dfrac{(x-1)(x+1)}{2-x}$.
3. *En déduire les solutions de l'inéquation.*

C.4.2 Inéquations générales

> Pour résoudre une inéquation en utilisant un tableau de signes, on doit annuler l'un des deux membres et factoriser le membre restant.
> Il est important de se souvenir qu'**un tableau de signes n'a de sens que pour des expressions réduites au même dénominateur et factorisées**.

Là encore, le mieux est de s'entraîner sur quelques exemples concrets.

Exercice 4

Soit l'inéquation $x \geq \dfrac{1}{x}$.

1. *Montrer que l'inéquation est équivalente à* $\dfrac{x^2-1}{x} \geq 0$.
2. *Factoriser le numérateur de l'expression* $\dfrac{x^2-1}{x}$.
3. *En déduire le tableau de signes de la fonction* $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x}$ *puis les solutions de l'inéquation.*

Exercice 5

Soit l'inéquation $(x-1)^2 \geq 9$.

Résoudre cette inéquation en vous ramenant à une inéquation de la forme $f(x) \geq 0$, *en factorisant* $f(x)$ *puis en faisant son tableau de signes.*