Exercices de Terminale ES

Pierre-Alexandre Fournié

2016

Planche n$^{\mathrm{o}}$ 1: Exercices de Première sur les fonctions

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $3x - 2 > -2$

b) $1,25x - 4 = 0,05x + 0,2$

c) $-x^2 + 12x - 15 < 0$

d) $\dfrac{x(x-5)}{x+2} \geq 0$

Indication: Utiliser éventuellement les notions sur les fonctions trinomiales et les tableaux de signes.

Exercice 2

Une entreprise fabrique un modèle de meuble en bois. Elle peut produire au maximum 100 meubles par jour.
Pour x meubles fabriqués et vendus, le coût de production journalier (exprimé en euros), noté $C(x)$, est donné par :

$$C(x) = 2,25x^2 - 6x + 20$$

Chaque meuble est vendu 299 €.
L'entreprise est ouverte cinq jours par semaine.

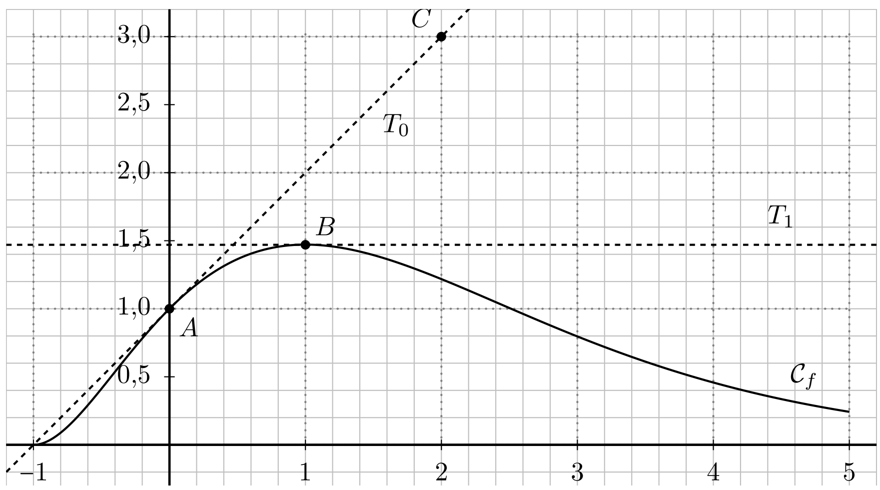
1. Montrer que le bénéfice journalier correspondant à la production et la vente de x meubles ($x \in [0\ ;\ 100]$) est donné par

$$B(x) = -2,25x^2 + 305x - 20.$$

2. Calculer $B'(x)$ et donner le tableau de variations de B sur $[0\,;\,100]$.
3. Combien de meubles faut-il produire et vendre pour réaliser un bénéfice journalier maximal ?
   Déterminer le bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise sur une période de quatre semaines.

Exercice 3

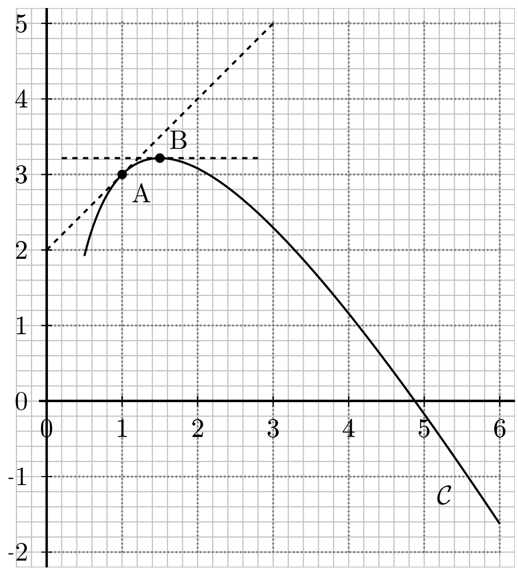
Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\ ;\ 5]$.
On note f' la fonction dérivée de f.
La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A\,(0\,;\,1)$ et par le point B d'abscisse 1.
La tangente T_0 à la courbe au point A passe par le point $C\,(2\,;\,3)$ et la tangente T_1 au point B est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer les valeurs exactes de $f'(1)$, $f'(0)$, $f(1)$.
2. Avec la précision permise par le graphique, dresser le tableau de variation de f sur $[-1;\ 5]$.

Exercice 4

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $[0,5;\ 6]$. Les points $A\,(1;\ 3)$ et B d'abscisse $1,5$ sont sur la courbe $\mathcal{C}$.
Les tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ aux points A et B sont aussi représentées en pointillés sur ce graphique, la tangente au point B est horizontale.
On note f' la fonction dérivée de f.



1. Déterminer $f'(1,5)$.
2. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ passant par A passe par le point de coordonnées $(0;\ 2)$. Déterminer une équation de cette tangente.
3. Avec la précision permise par le graphique, dresser le tableau de signes de f sur $[0,5;\ 6]$.

Exercice 5

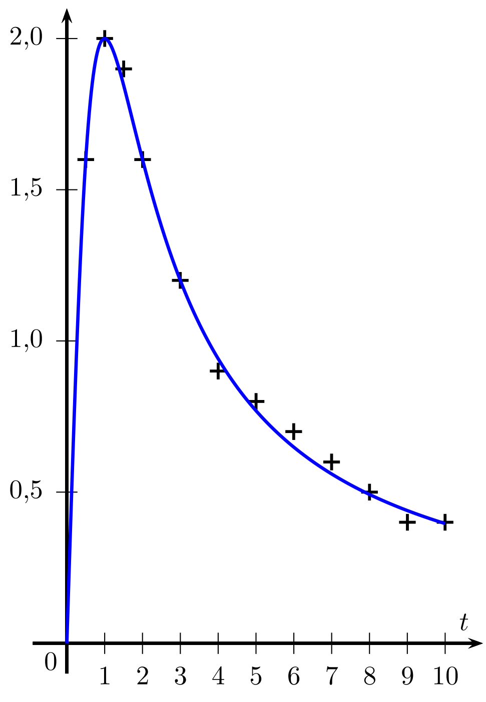
Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation.
Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en mg/l	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par

$$g(t) = \frac{4t}{t^2+1}.$$

Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en mg/l de l'antibiotique.
Le graphique suivant représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g.



1. Par lecture graphique donner sans justification :
   (a) les variations de la fonction g sur $[0 ; 10]$;
   (b) la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;
   (c) l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à 1,2 mg/l.
2. (a) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 10]$ et sa dérivée est g'.
   Montrer que :
   $$g'(t) = \frac{4\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}.$$
   (b) En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.
3. On définit la CMI (Concentration Minimale Inhibitrice) d'un antibiotique comme étant la concentration au dessus de laquelle les bactéries ne peuvent plus se multiplier.
   La CMI de l'antibiotique injecté est $1,2$ mg/l.
   Déterminer, par le calcul, le temps d'antibiotique utile c'est-à-dire la durée pendant laquelle la concentration de l'antibiotique étudié est supérieure à sa CMI.

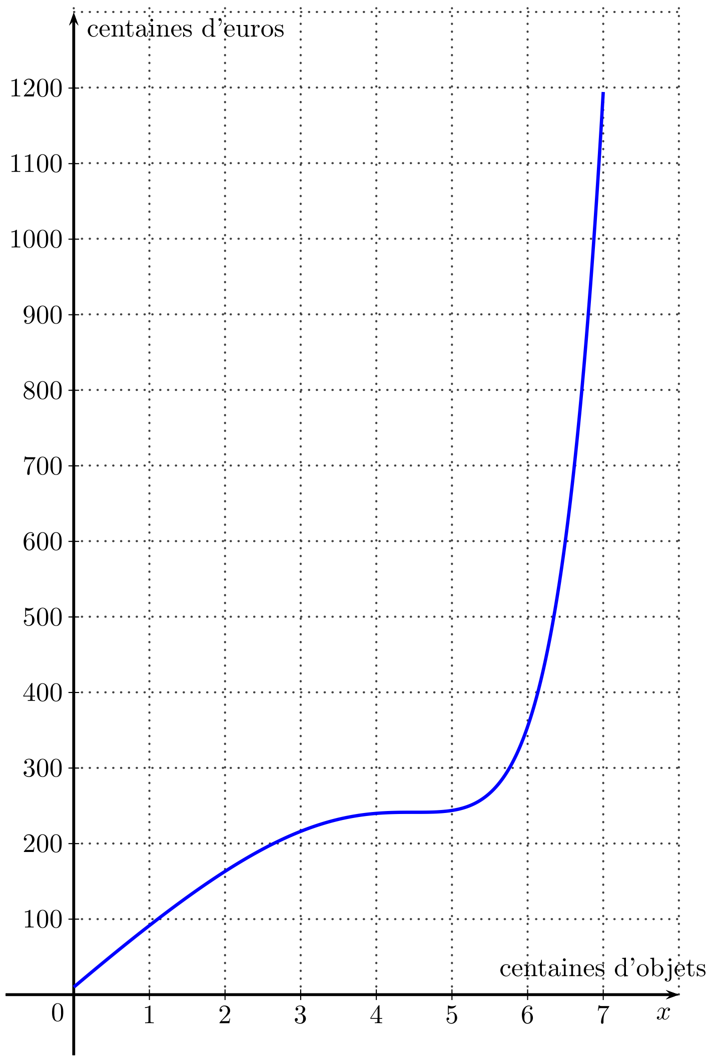
Exercice 6

Une entreprise fabrique chaque jour des objets. Cette production ne peut dépasser 700 objets par jour.
On modélise le coût total de production par une fonction C.
Lorsque x désigne le nombre d'objets fabriqués, exprimé en centaines, $C(x)$, le coût total correspondant, est exprimé en centaines d'euros.

La courbe représentative de la fonction C est donnée plus bas.

Le prix de vente de chacun de ces objets est de 75 euros.

1. On note r la fonction « recette ». Pour tout nombre réel x dans l'intervalle $[0\ ;\ 7]$, $r(x)$ est le prix de vente, en centaines d'euros, de x centaines d'objets.
   Représenter la fonction r dans le repère donné en annexe.
2. En utilisant les représentations graphiques portées sur l'annexe, répondre aux questions qui suivent.
   (a) En supposant que tous les objets produits sont vendus, quelle est, pour l'entreprise, la fourchette maximale de rentabilité ? Justifier la réponse.
   (b) Que penser de l'affirmation : « il est préférable pour l'entreprise de fabriquer 500 objets plutôt que 600 objets » ?



Exercice 7 : Une énigme

Déterminer deux nombres x et y avec y non nuls tels que $x + y = xy = \frac{x}{y}$.

Planche n° 2: Suites

Exercice 1

Afin de lutter contre la pollution de l'air, un département a contraint dès l'année 2013 certaines entreprises à diminuer chaque année la quantité de produits polluants qu'elles rejettent dans l'air.
Ces entreprises ont rejeté 410 tonnes de ces polluants en 2013 et 332 tonnes en 2015. On considère que le taux de diminution annuel de la masse de polluants rejetés est constant.

1. Justifier que l'on peut considérer que l'évolution d'une année sur l'autre correspond à une diminution de 10 %.
2. En admettant que ce taux de 10 % reste constant pour les années à venir, déterminer à partir de quelle année la quantité de polluants rejetés par ces entreprises ne dépassera plus le seuil de 180 tonnes fixé par le conseil départemental.

Exercice 2

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total.
Pour l'ouverture prévue le 1er janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Partie A

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5 % des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.
On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013 + n)$.
On donne $u_0 = 42$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n \times 0,95 + 6$.
2. On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel.
   Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

Variables	U, N
Initialisation	Mettre 42 dans U
	Mettre 0 dans N
Traitement	Tant que U < 100
	U prend la valeur U $\times 0,95 + 6$
	N prend la valeur N +1
	Fin du tant que
Sortie	Afficher N.

3. À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

Partie B

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus.
On appelle v_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013 + n)$.

1. Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.
2. On admet que $v_{n+1} = v_n \times 0,95 + 4$ avec $v_0 = 42$.
   On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n, par $w_n = v_n - 80$.
   Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et préciser son premier terme w_0.
3. On admet que, pour tout entier naturel $n : w_n = -38 \times (0,95)^n$.
   (a) Déterminer la limite de (w_n).
   (b) En déduire la limite de (v_n).
   (c) Interpréter ce résultat.

Exercice 3

En janvier 2016, une personne se décide à acheter un scooter coûtant 5 700 euros sans apport personnel. Le vendeur lui propose un crédit à la consommation d'un montant de 5 700 euros, au taux mensuel de 1,5 %. Par ailleurs, la mensualité fixée à 300 euros est versée par l'emprunteur à l'organisme de crédit le 25 de chaque mois. Ainsi, le capital restant dû augmente de 1,5 % puis baisse de 300 euros.
Le premier versement a lieu le 25 février 2016.
On note u_n le capital restant dû en euros juste après la n-ième mensualité (n entier naturel non nul). On convient que $u_0 = 5\,700$.
Les résultats seront donnés sous forme approchée à $0,01$ près si nécessaire.

1. (a) Démontrer que u_1, capital restant dû au 26 février 2016 juste après la première mensualité, est de 5 485,50 euros.
   (b) Calculer u_2.
2. On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 1,015u_n - 300$$

On considère l'algorithme suivant :

Variables	n est un entier naturel
	u est un nombre réel
Traitement	Affecter à u la valeur 5 700
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $u > 4\,500$
	u prend la valeur $1,015 \times u - 300$
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin du tant que
Sortie	Afficher n

(a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaires entre la deuxième et la dernière colonne.

Valeur de u	5 700	...		
Valeur de n	0	...		
$u > 4\,500$ (vrai/faux)	vrai	...	vrai	faux

(b) Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20\ 000$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = 1,015 \times v_n$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n = 20\ 000 - 14\ 300 \times 1,015^n$.
4. À l'aide de la réponse précédente, répondre aux questions suivantes :
   (a) Démontrer qu'une valeur approchée du capital restant dû par l'emprunteur au 26 avril 2017 est 2 121,68 euros.
   (b) Déterminer le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt.
   (c) Quel sera le montant de la dernière mensualité ?
   (d) Lorsque la personne aura terminé de rembourser son crédit à la consommation, quel sera le coût total de son achat ?

Exercice 4

Un loueur de voitures dispose au 1er mars 2015 d'un total de 10 000 voitures pour l'Europe.
Afin d'entretenir son parc, il décide de revendre, au 1er mars de chaque année, 25 % de son parc automobile et d'acheter 3 000 voitures neuves.
On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite :
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1er mars de l'année $2015 + n$.
On a donc $u_0 = 10\ 000$.

1. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 3\ 000$.
2. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par
$$v_n = u_n - 12\ 000.$$
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser son premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   Déterminer la limite de la suite (v_n).
   (c) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_n = 12\ 000 - 2\ 000 \times 0,75^n$.
   (d) En vous appuyant sur les réponses données aux deux questions précédentes, que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années ?
3. On admet dans cette question que la suite (u_n) est croissante.
   On aimerait déterminer l'année à partir de laquelle le parc automobile comptera au moins 11 950 voitures.
   (a) Recopier l'algorithme suivant et compléter les pointillés afin qu'il permette de répondre au problème posé.

Initialisation	U prend la valeur 10 000 N prend la valeur 0

Traitement	Tant que ...
	  N prend la valeur ...
	  U prend la valeur ...
	Fin de tant que

Sortie	Afficher ...

   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année recherchée.
   (c) Retrouver ce résultat en résolvant l'inéquation
$$12\ 000 - 2\ 000 \times 0,75^n \geqslant 11\ 950.$$

Exercice 5

Le 1er septembre 2015, un ensemble scolaire compte 3 000 élèves.
Une étude statistique interne a montré que chaque 1er septembre :

- 10 % de l'effectif quitte l'établissement ;
- 250 nouveaux élèves s'inscrivent.

On cherche à modéliser cette situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre d'élèves le 1er septembre de l'année $2015 + n$.

1. Justifier qu'on peut modéliser la situation avec la suite (u_n) telle que $u_0 = 3\ 000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9\,u_n + 250$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 2\ 500$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9. Préciser v_0.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 500 \times 0,9^n + 2\ 500$.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -50 \times 0,9^n$.
   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. La capacité optimale d'accueil est de 2 800 élèves. Ainsi, au 1er septembre 2015, l'ensemble scolaire compte un sureffectif de 200 élèves.
   Écrire un algorithme permettant de déterminer à partir de quelle année, le contexte restant le même, l'ensemble scolaire ne sera plus en sureffectif.

Exercice 6

Déterminer, en fonction de n, les valeurs des sommes suivantes :

$$\begin{array}{rcl} A_n & = & 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n} \\ B_n & = & 1 + 1,1 + 1,1^2 + \cdots + 1,1^n \\ C_n & = & 1 + 0,9 + 0,9^2 + \cdots + 0,9^n \\ D_n & = & -2 - 2 \times (1,1)^2 + \cdots - 2 \times (1,1)^n \\ E_n & = & 0,8 + 0,8^2 + \cdots + 0,8^n \end{array}$$

Déterminer, pour n tendant vers l'infini, les limites de ces cinq nombres.

Planche n° 2 :
Corrigé

Exercice 1

1. Si l'évolution était de -10% par an, le coefficient multiplicateur sur deux ans serait de $0,9 \times 0,9 = 0,9^2 = 0,81$ car le coefficient multiplicateur pour un an serait de $1 - \frac{10}{100} = 0,9$.
   Or $410 \times 0,81 \simeq 332$, ce qui valide notre hypothèse.
2. On fait un tableau de valeurs à la calculatrice de la suite définie par :

$$\begin{cases} M_0 & = & 410 \\ M_{n+1} & = & 0,9 \times M_n \end{cases}$$

   M_n correspond à la quantité émise en $2013 + n$ selon cette hypothèse de diminution annuelle de 10%.
   On vérifie que $M_n \leq 180$ à partir de $n = 8$, ce qui correspond à l'année $2013 + 8 = 2021$.

> Il faut aller dans `mode` puis sélectionner `Suit`. Ensuite, on écrit la définition de la suite dans `f(x)`. Il faut entrer `nMin=0`, ce qui correspond au premier rang puis `u(n)=0.9*u(n-1)`, afin d'exprimer la relation de récurrence, et enfin `u(nMin)=410`. On obtient u à l'aide de `2nde` `7`.
> Ensuite on règle les paramètres de la table `2nde` + `fenêtre` avec un pas de 1 et un début de table de 0. Enfin, on visualise les valeurs dans `2nde` + `graphe`.

Exercice 2

Partie A

1. Diminuer de 5% revient à multiplier par $1 - \frac{5}{100} = 0,95$. Comme de plus on ajoute chaque année 6 milliers d'ouvrages, la formule $u_{n+1} = u_n \times 0,95 + 6$ représente bien l'évolution du nombre d'ouvrages, en milliers, d'une année sur l'autre.
2. D'après la définition de l'algorithme, la variable U stocke les valeurs successives de (u_n) et la variable N stocke le rang correspondant.
   Cette algorithme s'arrête dès que u est au dessus de 100 et il affiche le rang de N. Ainsi, il calcule le nombre d'années nécessaires à ce que le fond de la bibliothèque dépasse les 100 000 ouvrages.
3. En faisant un tableau de valeurs de la suite, u_n dépasse 100 pour la première fois pour $n = 27$. Il va donc afficher 27.

Partie B

1. Il faut modifier la ligne « U prend la valeur U $\times 0,95 + 6$ » et la remplacer par
   « U prend la valeur U $\times 0,95 + 4$ ».

2. On va montrer que $w_{n+1} = 0,95w_n$. On sait que :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= v_{n+1} - 80\\
&= 0,95v_n + 4 - 80\\
&= 0,95v_n - 76\\
&= 0,95\left(v_n - \frac{76}{0,95}\right)\\
&= 0,95\left(v_n - 80\right)\\
&= 0,95w_n
\end{aligned}$$

Son premier terme est $w_0 = v_0 - 80 = 42 - 80 = -38$

3. (a) La suite (w_n) est de raison comprise strictement entre 0 et 1.
Elle tend donc vers 0.
(b) On sait que $w_n = v_n - 80$ donc $v_n = w_n + 80$. Et comme (w_n) tend vers 0, on en déduit que (v_n) tend vers 80.
(c) Le nombre d'ouvrages de la bibliothèque se rapprochera de 80 000 dans un grand nombre d'années.

Exercice 3

1. (a) Le capital augmente de 1,5% puis diminue de 300€. Ainsi, $u_1 = 1,015u_0 - 300 = 5\ 485{,}50$ €.
(b) De même, on a $u_2 = 1,015u_1 - 300 = 5\ 267{,}78$ €.
2. (a) On complète le tableau grâce à la fonction « tableau de valeurs » de la calculatrice.

Valeur de u	5 700	5 485,50	5 267,78	5 046,80	4 822,50	4 594,84	4 363,76
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
$u > 4\ 500$ (vrai/faux)	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

(b) L'algorithme affiche la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n \leq 4\ 500$, c'est à dire 6.
Cela signifie en pratique que le capital restant à rembourser sera inférieur à 4 500 € à partir du 6ᵉ mois.
3. (a) On calcule :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 20\ 000\\
&= 1,015u_n - 300 - 20\ 000\\
&= 1,015u_n - 20\ 300\\
&= 1,015\left(u_n - \frac{20\ 300}{1,015}\right)\\
&= 1,015\left(u_n - 20\ 000\right)\\
&= 1,015v_n
\end{aligned}$$

(b) Commençons par établir la formule explicite de (v_n) qui est une suite géométrique de raison $1,015$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 20\ 000 = -14\ 300$. Pour tout n, on a $v_n = -14\ 300 \times 1,015^n$.
Or, $v_n = u_n - 20\ 000$, ce qui donne

$$u_n = v_n + 20\ 000 = -14\ 300 \times 1,015^n + 20\ 000$$

4. (a) Avril 2017 correspond au rang 12+3 = 15. On calcule donc $-14\ 300 \times 1,015^{15} + 20\ 000 \simeq 2\ 121{,}68$ €.
(b) Grâce à un tableau de valeurs réalisé à la calculatrice, on obtient $n = 23$.
(c) Le montant de la dernière mensualité est de $157,84$ €.
(d) Chaque mois il verse 300 € et le dernier mois il verse $157,84$ €.
Il aura donc versé en tout $22 \times 300 + 157,84 = 6\ 757{,}84$ €.

Exercice 4

1. On diminue le stock de 25%, ce qui revient à multiplier par $0,75$ puis on ajoute 3 000 au stock.
2. (a) On suit la même démarche qu'aux exercices précédents :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 12\ 000 \\ &= 0,75u_n + 3\ 000 - 12\ 000 \\ &= 0,75u_n - 9\ 000 \\ &= 0,75\left(u_n - \frac{9\ 000}{0,75}\right) \\ &= 0,75\left(u_n - 12\ 000\right) \\ &= 0,75v_n \end{aligned}$$

La suite est bien géométrique de raison $0,75$.
On calcule $v_0 = u_0 - 12\ 000 = 10\ 000 - 12\ 000 = -2\ 000$

(b) On a donc, pour tout n, $v_n = -2000 \times 0,75^n$.
Comme la raison est comprise strictement entre 0 et 1, la limite de (v_n) est 0.

(c) On sait que $v_n = u_n - 12\ 000$ donc $u_n = v_n + 12\ 000 = -2000 \times 0,75^n + 12\ 000$.

(d) D'après ce qui précède, la limite de (u_n) est 12 000. Ainsi, le parc tendra vers 12 000 voitures dans un grand nombre d'années.

3. (a)

Initialisation	U prend la valeur 10 000
	N prend la valeur 0
Traitement	Tant que $U < 11\ 950$
	N prend la valeur $N + 1$
	U prend la valeur $0,75U + 3000$
	Fin de tant que
Sortie	Afficher N

(b) On fait un tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice, on obtient $N = 13$.

(c) À notre niveau, nous ne savons pas résoudre cette inéquation par le calcul mais nous pourrons le faire dès que nous aurons étudié le logarithme !

Exercice 5

1. C'est un peu toujours la même chose ! Diminuer de 10% revient à multiplier par $0,9$ et augmenter de 250 revient à ajouter 250.
2. (a) Et c'est reparti :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2\ 500 \\ &= 0,9u_n + 250 - 2\ 500 \\ &= 0,9u_n - 2\ 250 \\ &= 0,9\left(u_n - \frac{2\ 250}{0,9}\right) \\ &= 0,9\left(u_n - 2\ 500\right) \\ &= 0,9v_n \end{aligned}$$

On calcule $v_0 = u_0 - 2\ 500 = 3\ 000 - 2\ 500 = 500$.

(b) On a $v_n = 500 \times 0,9^n$ et comme $v_n = u_n - 2\ 500$, on a $u_n = v_n + 2\ 500$, c'est à dire $u_n = 2\ 500 + 500 \times 0,9^n$.

3. Voilà une question qui nous change un peu !

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 500 \times 0,9^{n+1} + 2\ 500 - (500 \times 0,9^n + 2\ 500) \\
&= 500 \times 0,9^{n+1} + 2\ 500 - 500 \times 0,9^n - 2\ 500 \\
&= 500 \times 0,9^{n+1} - 500 \times 0,9^n \\
&= 500 \times 0,9^n\,(0,9 - 1) \ \ (\text{car } 0,9^{n+1} = 0,9^n \times 0,9) \\
&= 500 \times 0,9^n \times (-0,1) \\
&= -50 \times 0,9^n \ \ (\text{car } -0,1 \times 500 = -50)
\end{aligned}$$

Pour tout n, $0,9^n$ est positif. Comme -50 est négatif, on en déduit que $u_{n+1} - u_n$ est négatif, ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

4. On s'inspire des algorithmes des exercices précédents :

Initialisation	U prend la valeur 3 000
	N prend la valeur 0
Traitement	Tant que $U > 2\ 800$
	N prend la valeur $N + 1$
	U prend la valeur $0,9U + 250$
	Fin de tant que
Sortie	Afficher N

Exercice 6

$$A_n = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ car $0 < \frac{1}{3} < 1$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1-(1,1)^{n+1}}{1-1,1} \\ &= \frac{(1,1)^{n+1}-1}{1,1-1} \\ &= \frac{(1,1)^{n+1}-1}{0,1} \end{aligned}$$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} (1,1)^{n+1} = +\infty$ car $1 < 1,1$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = +\infty$$

$$C_n = \frac{1-(0,9)^{n+1}}{1-0,9}$$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,9)^{n+1} = 0$ car $0 < 0,9 < 1$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} C_n = \frac{1}{1-0,9} = 10$$

$$\begin{aligned} D_n &= -2 \times \left(1 + 1,1 + 1,1^2 + \cdots + 1,1^n\right) \\ &= -2 \times B_n \\ &= -2 \times \frac{1-(1,1)^{n+1}}{1-1,1} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} D_n = -\infty$$

$$\begin{aligned} E_n &= 0,8 \times \left(1 + 0,8 + \cdots + 0,8^{n-1}\right) \\ &= 0,8 \times \frac{1-(0,8)^n}{1-0,8} \end{aligned}$$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,8)^n = 0$ car $0 < 0,8 < 1$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} E_n = 0,8 \times \frac{1}{1-0,8} = 4$$

Planche n° 3: Résolutions de problèmes assistées par XCas

Pour obtenir `XCas`, on peut le télécharger ou bien l'utiliser en ligne à l'adresse : http://www.xcasenligne.fr/giac_online/demoGiacPhp.php
Ensuite, on passe les commandes à la machine exactement comme dans le menu de base de la calculatrice.

Commandes utiles

`resoudre(x^2+2*x-3=0)`	Résout l'équation $x^2+2x-3=0$
`factoriser(x^2+2*x-3)`	Factorise l'expression x^2+2x-3
`f(x):=x^2+2*x-3`	Définit la fonction f qui à x associe $f(x)=x^2+2x-3$
`df:=deriver(f)`	Définit la fonction df qui est la dérivée de f
`simplifier((x-1)*(x+3))`	Détermine la forme développée et réduite de $(x-1)(x+3)$

Partie A : Résolutions d'inéquations

Pour toutes les questions de cette partie, utilisez `XCas` pour vérifier vos calculs et vos résultats.
Soyez très vigilant dans la syntaxe, en particulier dans l'utilisation des parenthèses.

1. Résoudre $x^2-3x+3<x$.
2. On veut résoudre $\dfrac{x+1}{x-1}\geq x$
   (a) Montrer que l'inéquation $\dfrac{x+1}{x-1}\geq x$ est équivalente à $\dfrac{-x^2+2x+1}{x-1}\geq 0$.
   (b) En faisant un tableau de signes, déterminer les solutions de l'inéquation de départ.
3. En s'inspirant de la démarche de la question précédente, résoudre $\dfrac{1}{x^2}\geq 4$.
4. Résoudre $x^2-x\geq 2x+4$

Partie B : Études de fonctions

1. Soit la fonction définie pour tout x de $[0;\ 10]$ par $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.
   (a) Déterminer par le calcul les antécédents de $\dfrac{1}{2}$ par f. Vérifier le résultat à l'aide d'`XCas`.
   (b) Déterminer l'expression de $f'(x)$ puis établir le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f sur $[0;\ 10]$.
   (c) À l'aide d'`XCas`, donner l'expression factorisée de $f''(x)$. En déduire la convexité de la courbe de f sur $[0;\ 10]$.
2. On définit la fonction g pour tout x de $[-5;\ 5]$ par $g(x)=x^3-2x^2+4x-3$.
   (a) Expliquer comment obtenir, à l'aide d'`XCas`, le tableau de signes de g sur $[-5;\ 5]$.
   (b) De même, préciser la démarche qui permet de dresser le tableau de variations de g sur $[-5;\ 5]$ en s'aidant d'`XCas`. Donner le tableau de variations de g.
   (c) Faire de même pour déterminer la convexité de g sur $[-5;\ 5]$.

Planche n° 3 : Résolutions de problèmes assistées par XCas
Corrigé

Partie A : Résolutions d'inéquations

1. L'inéquation est équivalente à $x^2 - 4x + 3 < 0$.
   Il faut maintenant chercher le signe de l'expression trinômiale $x^2 - 4x + 3$.
   Son discriminant vaut, après calcul, 4. Les deux racines sont, après calcul, $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$.
   Cette expression est donc strictement négative pour x dans $]1;\ 3[$.
2. (a) Cela se fait en annulant le membre de droite et en réduisant le membre de gauche au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-1} \geq x &\iff \frac{x+1}{x-1} - x \geq 0 \\
&\iff \frac{x+1}{x-1} - \frac{x(x-1)}{x-1} \geq 0 \\
&\iff \frac{x+1-x(x-1)}{x-1} \geq 0 \\
&\iff \frac{x+1-x^2+x}{x-1} \geq 0 \\
&\iff \frac{-x^2+2x+1}{x-1} \geq 0
\end{aligned}$$

   (b) Là encore, on a déterminé un problème équivalent de recherche de signe. Il nous faut donc factoriser le numérateur du membre de gauche.
   C'est une expression trinômiale dont les racines sont, après calcul, $r_1 = -\sqrt{2}+1$ et $r_2 = \sqrt{2}+1$.
   Le signe du dénominateur $x - 1$ est, quant à lui, très simple.
   Finalement, on dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}+1$		1		$\sqrt{2}+1$		$+\infty$
$-x^2+2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-x^2+2x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

   On cherchait l'expression positive ou nulle, les solutions sont donc $]-\infty;\ -\sqrt{2}+1] \cup]1;\ \sqrt{2}+1]$.
3. On refait les mêmes opérations et on obtient une inéquation équivalente :
   $\dfrac{(1-2x)(1+2x)}{x^2} \geq 0$.
   On fait de même un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$(1-2x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(1+2x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(1-2x)(1+2x)}{x^2}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On obtient les solutions $\left[-\frac{1}{2};\ 0\right[\cup \left]0;\ \frac{1}{2}\right]$

4. L'inéquation de départ est équivalente à $x^2 - 3x - 4 \geq 0$. Les racines de la fonction trinômiale sont $r - 1 = -1$ et $r_2 = 4$. L'expression est donc positive ou nulle sur $]-\infty;\ -1] \cup [4;\ +\infty[$.

Partie B : Études de fonctions

Les commandes listées à la fin permettent de répondre à l'ensemble des questions de cette partie.

1. (a) On doit raisonner par équivalence sur l'équation :

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1}{2} &\iff 2(x+1) = x^2+1\\ &\iff 2x+2 = x^2+1\\ &\iff x^2+1-2x-2 = 0\\ &\iff x^2-2x-1 = 0\end{aligned}$$

Après calcul du discriminant et des racines, on obtient les solutions $-1+\sqrt{2}$ et $-1-\sqrt{2}$. Mais il faut éliminer $-1-\sqrt{2}$ qui n'est pas dans $[0;\ 10]$.

(b) Il faut utiliser la dérivée d'un quotient :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1\times(x^2+1) - 2x\times(x+1)}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

Le tableau de signes se fait toujours selon le même principe. Ici, on réduit à $[0;\ 10]$ puisque la fonction est définie sur cet intervalle :

x	0		$-1+\sqrt{2}$		10
$-x^2-2x+1$		$+$	0	$-$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{11}{101}$

(c) À l'aide du logiciel on obtient :

$$f''(x) = \frac{2(x-1)\left(x-\sqrt{3}+2\right)\left(x+\sqrt{3}+2\right)}{(x^2+1)^3}$$

Pour étudier la convexité, il faut dresser le tableau de signes de f''.

x	0		1		10
2		$+$		$+$	
$(x-1)$		$-$	0	$+$	
$\left(x-\sqrt{3}+2\right)$		$+$		$+$	
$\left(x+\sqrt{3}+2\right)$		$+$		$+$	
$(x^2+1)^3$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

La fonction est donc concave sur $[0;\ 1]$. Elle est convexe sur $[1;\ 10]$

2. (a) Il faut résoudre « $g(x)$ positif » avec `XCas`
On obtient ainsi le tableau de signes de g :

x	-5		1		5
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(b) Il faut chercher le tableau de signes de $g'(x)$. Après calcul, on obtient :

x	-5		5
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-198	$\nearrow$	92

(c) Grâce au logiciel, on détermine le signe de g''.

x	-5		$\frac{2}{3}$		5
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

La fonction est donc concave sur $\left[-5;\ \frac{2}{3}\right]$ puis convexe ensuite.

```
f(x):=(x+1)/(x^2+1)
resoudre(f(x)=1/2)
factoriser(deriver(f))
f(0)
simplifier(f(sqrt(2)-1))
f(10)
ddf:=factoriser(deriver(deriver(f)))
resoudre(ddf(x)>=0)
g(x):=x^3-2x^2+4x-3
resoudre(g(x)>=0)
resoudre(deriver(g(x))>=0)
g(-5)
g(5)
resoudre(deriver(deriver(g(x)))>=0)
```

Planche n^{o} 4: Probabilités conditionnelles

Exercice 1

On dispose des renseignements suivants à propos du baccalauréat session 2015 :

- 49 % des inscrits ont passé un baccalauréat général, 20 % un baccalauréat technologique et les autres un baccalauréat professionnel ;
- 91,5 % des candidats au baccalauréat général ont été reçus ainsi que 90,6 % des candidats au baccalauréat technologique.

Source : DEPP (juillet 2015)

On choisit au hasard un candidat au baccalauréat de la session 2015 et on considère les évènements suivants :

- G : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat général » ;
- T : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat technologique » ;
- S : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat professionnel » ;
- R : « Le candidat a été reçu ».

Pour tout évènement A, on note $P(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son évènement contraire.
De plus, si B est un autre évènement, on note $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

1. Préciser les probabilités $P(G), P(T), P_T(R)$ et $P_G(R)$.
2. Traduire la situation par un arbre pondéré. On indiquera les probabilités trouvées à la question précédente. Cet arbre pourra être complété par la suite.
3. Vérifier que la probabilité que le candidat choisi se soit présenté au baccalauréat technologique et l'ait obtenu est égale à 0,181 2.
4. Le ministère de l'Éducation Nationale a annoncé un taux global de réussite pour cette session de 87,8 % pour l'ensemble des candidats présentant l'un des baccalauréats.
   (a) Vérifier que la probabilité que le candidat choisi se soit présenté au baccalauréat professionnel et l'ait obtenu est égale à 0,248 45.
   (b) Sachant que le candidat s'est présenté au baccalauréat professionnel, déterminer la probabilité qu'il ait été reçu. On donnera une valeur approchée du résultat au millième.

Exercice 2

D'après une enquête menée auprès d'une population, on a constaté que :

- 60 % de la population sont des femmes ;
- 56 % des femmes travaillent à temps partiel ;
- 36 % de la population travaillent à temps partiel.

On interroge une personne dans la population. Elle affirme qu'elle travaille à temps partiel.
Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme ?

Exercice 3

Un centre de loisirs destiné aux jeunes de 11 ans à 18 ans compte 60 % de collégiens et 40 % de lycéens.
Le directeur a effectué une étude statistique sur la possession de téléphones portables. Cette étude a montré que 80 % des jeunes possèdent un téléphone portable et que, parmi les collégiens, 70 % en possèdent un.
On choisit au hasard un jeune du centre de loisirs et on s'intéresse aux évènements suivants :

— C : « le jeune choisi est un collégien » ;
— L : « le jeune choisi est un lycéen » ;
— T : « le jeune choisi possède un téléphone portable ».

Rappel des notations

Si A et B sont deux évènements, $p(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de A sachant que l'évènement B est réalisé. On note aussi $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

1. Donner les probabilités : $p(C)$, $p(L)$, $p(T)$, $p_C(T)$.
2. Faire un arbre de probabilités représentant la situation et commencer à le renseigner avec les données de l'énoncé.
3. Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien possédant un téléphone portable.
4. Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien sachant qu'il possède un téléphone portable.
5. (a) Calculer $p(T \cap L)$, en déduire $p_L(T)$.
   (b) Compléter l'arbre construit dans la question 2.

Exercice 4

On s'intéresse à l'ensemble des demandes de prêts immobiliers auprès de trois grandes banques.
Une étude montre que 42 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Karl, 35 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Lofa, alors que cette proportion est de 23 % pour la banque Miro.
Par ailleurs :

- 76 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Karl sont acceptées ;
- 65 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Lofa sont acceptées ;
- 82 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Miro sont acceptées.

On choisit au hasard une demande de prêt immobilier parmi celles déposées auprès des trois banques.
On considère les évènements suivants :

- K : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Karl » ;
- L : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Lofa » ;
- M : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Miro » ;
- A : « la demande de prêt est acceptée ».

On rappelle que pour tout évènement E, on note $P(E)$ sa probabilité et on désigne par E son événement contraire.

Dans tout l'exercice on donnera, si nécessaire, des valeurs approchées au millième des résultats.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité que la demande de prêt soit déposée auprès de la banque Karl et soit acceptée.
3. Montrer que $P(A) \approx 0,735$.
4. La demande de prêt est acceptée. Calculer la probabilité qu'elle ait été déposée à la banque Miro.

Planche n° 4 : Probabilités conditionnelles
Corrigé

Exercice 1

1. $P(G)$ correspond à la proportion de candidats passant le baccalauréat général : $\boxed{P(G) = \dfrac{49}{100} = 0,49}$

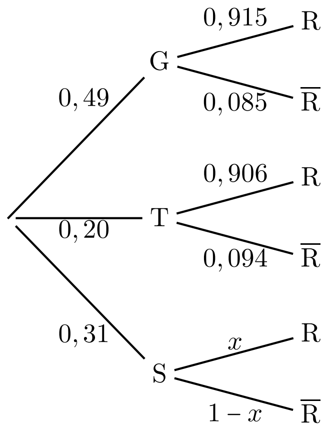
   $\boxed{P(T) = 0,20}$, c'est la proportion de candidats passant un baccalauréat technologique.

   $P_T(R)$ est la probabilité d'être reçu sachant qu'on a passé un baccalauréat technologique. C'est donc le taux de réussite pour les filières technologiques : $\boxed{P_T(R) = 0,906}$.

   De même, on lit $\boxed{P_G(R) = 0,915}$.

2. Sachant que la somme des probabilités des branches issues d'un nœud vaut 1, on obtient certaines des probabilités manquantes.

   À ce stade, on ne connaît pas le taux de réussite des baccalauréat professionnels. Ainsi, on notera $x = P_S(R)$.



3. On cherche $P(T \cap R)$ que l'on obtient par la formule

$$\boxed{P(T \cap R) = P(T) \times P_T(R) = 0,2 \times 0,906 = 0,1812}$$

4. (a) On cherche $P(S \cap R)$, sachant que l'on connaît $P(R)$, $P(T \cap R) = 0,1812$ et que l'on peut calculer $P(G \cap R) = P(G) \times P_G(R) = 0,49 \times 0,915 = 0,44835$.
   La formule des probabilités totales donne donc :

$$P(R) = P(G \cap R) + P(T \cap R) + P(S \cap R)$$

   Et on obtient ainsi

$$\boxed{P(S \cap R) = P(R) - P(T \cap R) - P(G \cap R) = 0,878 - 0,1812 - 0,44835 = 0,24845}$$

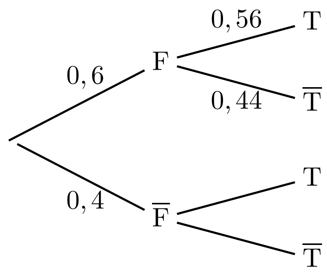
   (b) Ici, on cherche $\boxed{P_S(R) = \dfrac{P(S \cap R)}{P(S)} = \dfrac{0,24845}{0,31} \simeq 0,801}$.

Exercice 2

On va utiliser les notations :

- F : « Cette personne est une femme » ;
- T : « Cette personne travaille à temps partiel ».

L'arbre suivant résume la situation :



On cherche la probabilité que la personne soit un homme sachant qu'elle travaille à temps partiel $P_T\left(\overline{F}\right)$. Il nous faut donc déterminer $P\left(T \cap \overline{F}\right)$. Pour cela, on utilise la formule des probabilités totales.

$$P(T) = P\left(T \cap \overline{F}\right) + P\left(T \cap F\right)$$

Or, on peut calculer $P(T \cap F) = P(F) \times P_F(T) = 0,6 \times 0,56 = 0,336$. On obtient ainsi $P\left(T \cap \overline{F}\right) = P(T) - P\left(T \cap F\right) = 0,36 - 0,336 = 0,024$.

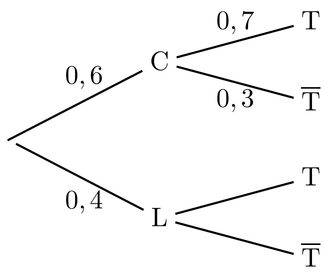
De plus, on vérifie facilement que $P\left(\overline{F}\right) = 0,4$ (c'est la proportion d'hommes dans la population).

Finalement :

$$\boxed{P_T\left(\overline{F}\right) = \frac{P\left(T \cap \overline{F}\right)}{P\left(T\right)} = \frac{0,024}{0,36} = \frac{1}{15} \simeq 0,066}$$

Exercice 3

1. Par lecture de l'énoncé $p(C) = 0,6$, $p(L) = 0,4$ et $p(T) = 0,8$.
   Enfin, $p_C(T)$ correspond à la proportion de collégiens possédant un portable, on lit $p_C(T) = 0,7$
2. En utilisant les données, les notations de l'énoncé et la loi portant sur la somme des probabilités issues d'un nœud, on dessine l'arbre :



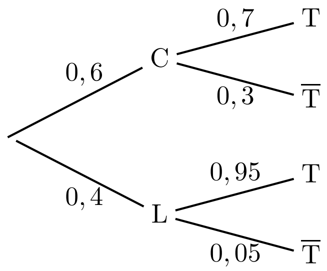
3. On calcule $\boxed{p\left(C \cap T\right) = p_C(T) \times p(C) = 0,6 \times 0,7 = 0,42}$.
4. On calcule $\boxed{p_T(C) = \dfrac{p\left(C \cap T\right)}{p(T)} = \dfrac{0,42}{0,8} = 0,525}$.
5. (a) On obtient $p(T \cap L)$ à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$p(T) = p\left(C \cap T\right) + p\left(L \cap T\right)$$

Ainsi :

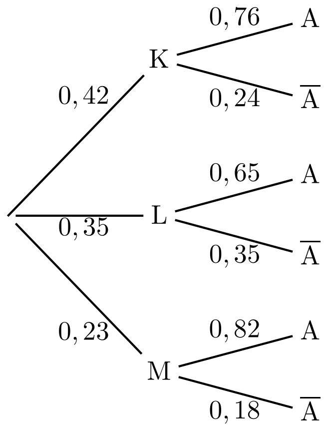
$$\boxed{p\left(L \cap T\right) = p(T) - p\left(C \cap T\right) = 0,8 - 0,42 = 0,38}$$

(b) Il faut pour cela déterminer $\boxed{p_L(T) = \dfrac{p\left(L \cap T\right)}{p(L)} = \dfrac{0,38}{0,4} = 0,95}$. Finalement, l'arbre est :



Exercice 4

1. À partir des données de l'énoncé et en utilisant la loi des probabilités issues d'un nœud, on obtient :



2. On utilise la formule $\boxed{P\left(K \cap A\right) = p(K) \times P_K(A) = 0,42 \times 0,76 \simeq 0,319}$
3. On utilise la formule des probabilités totales :

$$\boxed{P(A) = P\left(A \cap K\right) + P\left(L \cap K\right) + P\left(M \cap K\right) = 0,42 \times 0,76 + 0,35 \times 0,65 + 0,23 \times 0,82 \simeq 0,735}$$

4. On cherche $\boxed{P_A(M) = \dfrac{P\left(A \cap M\right)}{P(A)} = \dfrac{0,23 \times 0,82}{0,7353} \simeq 0,256}$

Planche n° 5: Convexité

Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Exercice 1

Partie A

La fonction f est définie pour tout réel x élément de l'intervalle $[1\,;\,7]$ par :

$$f(x) = 1,5x^3 - 9x^2 + 24x + 48.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa dérivée seconde sur $[1\,;\,7]$.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,7]$:
   (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Calculer $f''(x)$.
2. Déterminer sur quel intervalle la fonction f est convexe.

Partie B

Une entreprise fabrique et commercialise un article dont la production est comprise entre 1 000 et 7 000 articles par semaine.
On modélise le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie dans la partie A où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.
On note c la fonction définie sur $[1\,;\,7]$ représentant le coût moyen par article fabriqué, exprimé en euros. On a, par conséquent, pour tout x de $[1\,;\,7]$:

$$c(x) = \frac{f(x)}{x} = 1,5x^2 - 9x + 24 + \frac{48}{x}.$$

On admet que la fonction c est dérivable sur $[1\,;\,7]$. On note c' sa fonction dérivée.

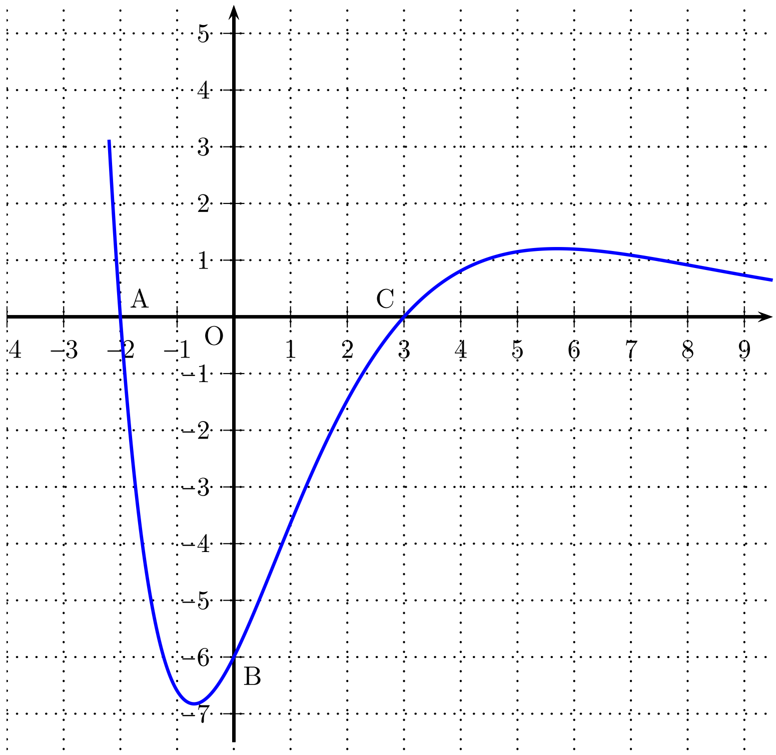
1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,7]$, on a :

$$c'(x) = \frac{3(x-4)\left(x^2+x+4\right)}{x^2}.$$

2. (a) Étudier les variations de la fonction c sur l'intervalle $[1\,;\,7]$.
   (b) Déterminer, en milliers, le nombre d'articles à fabriquer pour que le coût moyen par article soit minimal.

Exercice 2

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé.
Les points suivants appartiennent à la courbe : A$(-2\ ;\ 0)$; B$(0\ ;\ -6)$ et C$(3\ ;\ 0)$.



Courbe représentative de la fonction f''

Dans tout cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1. La courbe représentative de f admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur $[-2\ ;\ 3]$, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.

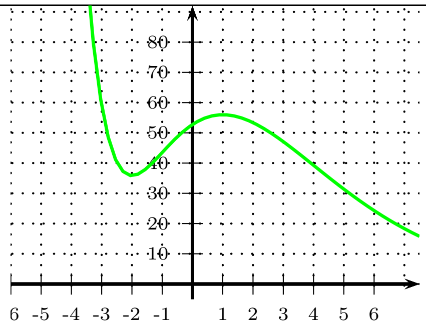
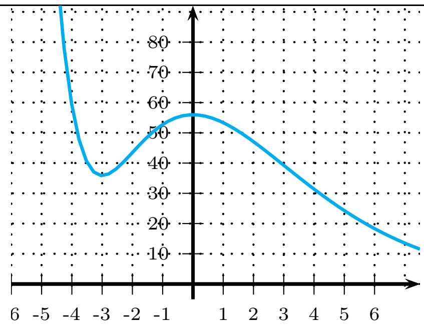
Courbe 1	Courbe 2
	

Planche n° 3 : Convexité
Corrigé

Exercice 1

Partie A

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[1\ ;\ 7]$:
   (a) $f'(x) = 1,5 \times 3x^2 - 9 \times 2x + 24 = 4,5x^2 - 18x + 24$
   (b) $f''(x) = 4,5 \times 2x - 18 = 9x - 18$
2. La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels sa dérivée première f' est croissante, c'est-à-dire sur lesquels sa dérivée seconde f'' est positive.
   $f''(x) \geq 0 \iff 9x - 18 \geq 0 \iff 9x \geq 18 \iff x \geq 2$
   La fonction f est convexe sur l'intervalle $[2\,;7]$.

Partie B

1. $c'(x) = 1,5 \times 2x - 9 + 0 + 48 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 3x - 9 - \dfrac{48}{x^2} = \dfrac{3x^3 - 9x^2 - 48}{x^2}$
   $\dfrac{3(x-4)\left(x^2+x+4\right)}{x^2} = \dfrac{3(x^3 + x^2 + 4x - 4x^2 - 4x - 16)}{x^2} = \dfrac{3(x^3 - 3x^2 - 16)}{x^2} = \dfrac{3x^3 - 9x^2 - 48}{x^2}$
   Donc, pour tout x de
   $$[1\,;7]$$
   , $c'(x) = \dfrac{3(x-4)\left(x^2+x+4\right)}{x^2}$
2. (a) On cherche le signe de $c'(x)$ sur l'intervalle $[1;\ 7]$.
   - signe de $x-4$: $x - 4 > 0$ pour $x > 4$ donc sur $[4;\ 7]$
   - signe de $x^2 + x + 4$: $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$ donc $x^2 + x + 4 > 0$ pour tout x

   $c(1) = 64,5$, $c(4) = 24$ et $c(7) \approx 41,4$
   D'où le tableau de variation de la fonction c sur $[1;\ 7]$:

x	1		4		7
$x-4$		$-$	0	$+$	
x^2+x+4		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	
$c'(x)$		$-$	0	$+$	
$c(x)$	64,5	↘	24	↗	41,4

   (b) Le minimum de la fonction c est atteint pour $x = 4$ donc pour 4 000 articles à fabriquer ; le coût moyen par article est alors de $24 \times 1\ 000$ soit 24 000 euros.

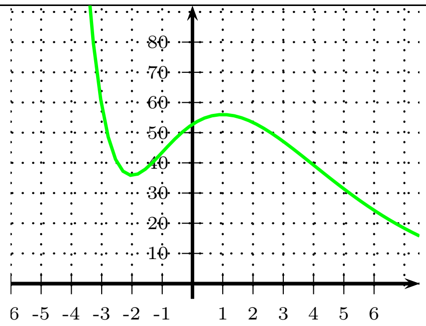
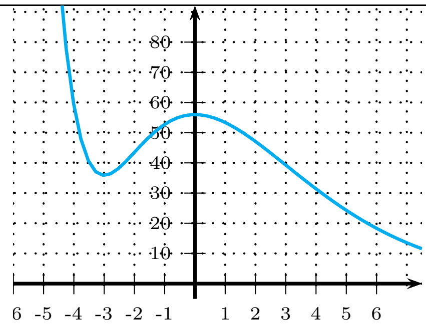
Exercice 2

1. La courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion si cette courbe traverse sa tangente, autrement dit si la dérivée seconde de f s'annule et change de signe.

   D'après sa courbe représentative, la fonction f'' s'annule et change de signe en $x = -2$ et $x = 3$; donc la courbe représentant la fonction f admet deux points d'inflexion, aux points d'abscisses -2 et 3.

2. Sur l'intervalle $[-2;\ 3]$, la courbe représentant la fonction f'' est située en dessous de l'axe des abscisses, donc $f'' \leq 0$. Cela veut dire que, sur cet intervalle, la fonction dérivée première f' est décroissante, et donc que la fonction f est concave.

3. On donne les deux courbes :

Courbe 1	Courbe 2
	

   La courbe 1 représente une fonction qui admet en $x = -2$ un minimum ; au point d'abscisse -2, la courbe ne traverse pas sa tangente, donc le point d'abscisse -2 n'est pas un point d'inflexion. Donc la courbe 1 ne représente pas la fonction f.

   La fonction f est représentée par la courbe 2.

Planche n° 6: Fonction exponentielle

Exercice 1

La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.

L'entreprise *BBE (Bio Bois Énergie)* fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités.
L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

- Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ par :

$$C(x) = 0,3x^2 - x + \mathrm{e}^{-x+5}$$

  où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.
- Dans l'entreprise *BBE* le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros.
  La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ par :

$$R(x) = 3x$$

  où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.
- On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

Partie A : Étude graphique

Sur le graphique situé en annexe, on donne $\mathcal{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O.
Dans cette partie A, répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.
2. (a) Déterminer les valeurs $C(6)$ et $R(6)$ puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.
   (b) Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ par :

$$g(x) = -0,6x + 4 + \mathrm{e}^{-x+5}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. (a) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,15]$.
   (b) En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1\,;\,15]$.

2. (a) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;\,15]$, en précisant les valeurs $g(1)$ et $g(15)$ arrondies à l'unité.
   (b) Le tableau de variation permet d'affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,15]$.
   Donner une valeur approchée de α à $0,1$ près.
   (c) Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,15]$.

Partie C : Application économique

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,15]$, on a :

$$D(x) = -0,3x^2 + 4x - \mathrm{e}^{-x+5}$$

2. On admet que la fonction D est dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ et on note D' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,15]$, on a $D'(x) = g(x)$, où g est la fonction étudiée dans la partie B.
3. En déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle $[1\,;\,15]$.
4. (a) Pour quelle quantité de granulés l'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal ?
   On donnera une valeur approchée du résultat à $0,1$ tonne près.
   (b) Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(x) = (2x - 5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20.$$

Partie A

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,10]$, $f'(x) = (-2x + 7)\mathrm{e}^{-x+4}$.
2. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$. Si nécessaire, arrondir au millième les valeurs présentes dans le tableau de variation.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,10]$ et déterminer un encadrement d'amplitude $0,01$ de α.

Partie B

Une entreprise fabrique entre 0 et 1 000 objets par semaine.
Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets est modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = (2x - 5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20.$$

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la partie A et en arrondissant les résultats à l'unité.

1. Quel est le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximum ?
   Quel est ce bénéfice maximal en euros ?
2. À partir de combien d'objets fabriqués et vendus l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice positif ?

Exercice 3

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[1{,}5\,;\,6]$ par :

$$f(x) = (25x - 32)\mathrm{e}^{-x}.$$

On a utilisé un logiciel pour déterminer, sur l'intervalle $[1{,}5\,;\,6]$, sa fonction dérivée f' et sa fonction dérivée seconde f''.
On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.
On a obtenu les résultats suivants qui pourront être utilisés sans justification dans tout l'exercice.

- $f'(x) = (57 - 25x)\mathrm{e}^{-x}$
- $f''(x) = (25x - 82)\mathrm{e}^{-x}$

1. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1{,}5\,;\,6]$.
   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1{,}5\,;\,6]$. *Les valeurs seront, si nécessaire, arrondies au centième.*
2. Montrer que, sur l'intervalle $[1{,}5\,;\,6]$, la courbe C admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.
3. Dans cette question, on s'intéresse à l'équation $f(x) = 1$.
   (a) Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[4\,;\,5]$.
   (b) On a écrit l'algorithme suivant permettant de déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[4\,;\,5]$.

```
Initialisation
a prend la valeur 4
b prend la valeur 5

Traitement
Tant que b − a > 0,1 faire
        y prend la valeur f((a+b)/2)
        Si y > 1 alors
                a prend la valeur (a+b)/2
        Sinon b prend la valeur (a+b)/2
Fin de Tant que
Sortie
Afficher (a+b)/2
```

   Exécuter l'algorithme précédent en complétant le tableau donné en annexe.
   (c) Donner une valeur approchée de α au dixième.

Annexe de l'exercice 3

	$\dfrac{a+b}{2}$	y à 10^{-3} près	a	b	$b-a$	Sortie
Initialisation			4	5	1	
1re boucle « Tant que »	4,5	0,894	4	4,5	0,5	
2e boucle « Tant que »						
3e boucle « Tant que »						
4e boucle « Tant que »						

Annexe de l'exercice 1

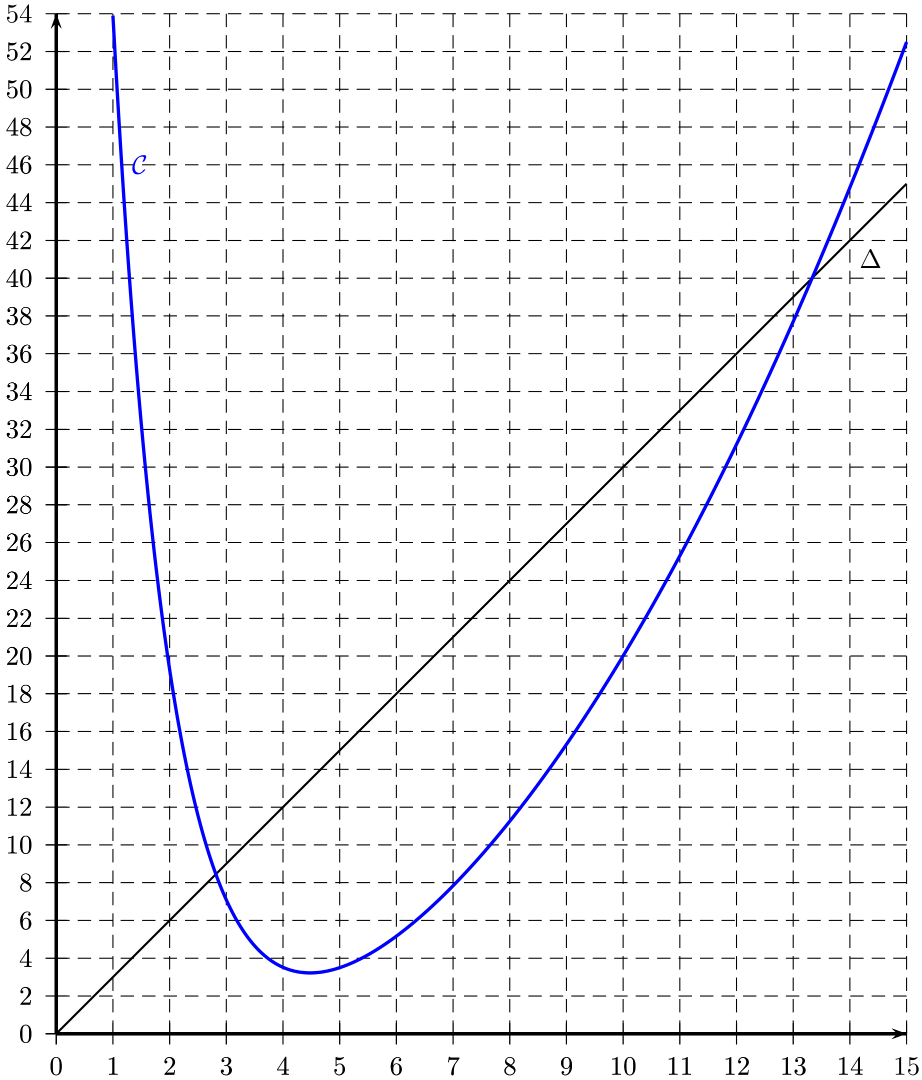


Planche n$^{\text{o}}$ 4 : Exponentielle
Corrigé

Exercice 1

Partie A : Étude graphique

1. Elle est égale à $4,5$ tonnes.
2. (a) $C(6) = 5$ et $R(6) = 18$ donc le bénéfice en centaines d'euro est $B(6) = 18 - 5 = 13$.
   Le résultat net pour une production de 6 tonnes est donc de 1 300 euros.

   (b) L'entreprise réalise un bénéfice quand la production x vérifie $C(x) < R(x)$. Graphiquement, cela se produit pour x compris entre $2,8$ et $13,3$ tonnes.

Partie B : Étude d'une fonction

1. (a) La fonction g est dérivable $[1\,;\,15]$ et $g'(x) = -0,6 - \mathrm{e}^{-x+5}$.

   (b) $\mathrm{e}^{-x+5} > 0$ quelle que soit la valeur de x donc $-\mathrm{e}^{-x+5} < 0$ et par suite, $g'(x) < 0$ comme somme de deux nombres négatifs.
   La fonction g est donc strictement décroissante sur $[1\,;\,15]$
2. (a) $g(1) \approx 58$ et $g(15) \approx -5$; on a donc le tableau de variation suivant :

x	1		α		15
$g'(x)$			$-$		
$g(x)$	58	$\searrow$	0	$\searrow$	-5

   (b) Le tableau de variation de g justifie que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1\,;\,15]$;

   $\left.\begin{array}{l} g(6) \approx 0,77 > 0 \\ g(7) \approx -0,06 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [6\,;\,7]$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} g(6,9) \approx 0,01 > 0 \\ g(7,0) \approx -0,06 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [6,9\,;\,7]$

   Donc $\alpha \approx 6,9$ à 0,1 près.

   (c) On en déduit donc le tableau de signe suivant :

x	1		α		15
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie C : Application économique

1. $D(x) = R(x) - C(x) = 3x - \left(0,3x^2 - x + \mathrm{e}^{-x+5}\right) = -0,3x^2 + 4x - \mathrm{e}^{-x+5}$
2. $D'(x) = -0,3 \times 2x + 4 + \mathrm{e}^{-x+5} = g(x)$
3. $D(1) \approx -50,9$, $D(\alpha) \approx 13,17$ et $D(15) \approx -7,5$;
   on aura donc le tableau de variation de la fonction D suivant :

x	1		α		15
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$D(x)$			$13,17$		
		↗		↘	
	$-50,9$				$-7,5$

4. (a) L'entreprise rendra son bénéfice maximal pour une production de α tonnes soit environ $6,9$ tonnes
   (b) Le bénéfice réalisé sera alors de 1 317 euros.

Exercice 2

Partie A

1. $f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x+4} + (2x-5) \times (-1)\mathrm{e}^{-x+4} + 0 = (-2x+7)\mathrm{e}^{-x+4}$
2. Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x+4} > 9$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x+7$ qui s'annule et change de signe pour $x = 3,5$.
   On calcule :
   $f(0) = -5\mathrm{e}^4 + 20 \approx -252,991$; $f(3,5) = 2\mathrm{e}^{0,5} + 20 \approx 23,297$ et $f(10) = 15\mathrm{e}^{-6} + 20 \approx 20,037$
   D'où le tableau de variation de la fonction f :

x	0		$3,5$		10
$-2x+7$		$+$	0	$-$	
e^{-x+4}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			$23,297$		
		↗		↘	
	$-252,991$				$20,037$

3. On complète le tableau de variation de la fonction f :

x	0	α	$3,5$	10
$f(x)$			$23,297$	
		0		
	$-252,991$			$20,037$

   On peut en déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[0\,;\,10]$ et que cette solution est dans $[0\,;\,3,5]$.

$$\left.\begin{array}{lcl} f(1) & \approx & -40,3 < 0 \\ f(2) & \approx & 12,6 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [1\,;\,2] \qquad \left.\begin{array}{lcl} f(1,5) & \approx & -4,4 < 0 \\ f(1,6) & \approx & 0,16 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [1,5\,;\,1,6]$$

$$\left.\begin{array}{lcl} f(1,59) & \approx & -0,26 < 0 \\ f(1,60) & \approx & 0,16 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \in [1,59\,;\,1,60]$$

Partie B

Une entreprise fabrique entre 0 et 1 000 objets par semaine.
Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets est modélisé par la fonction f définie sur $[0\ ;\ 10]$ par : $f(x) = (2x-5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20$.

1. Le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximum correspond à $x = 3,5$ centaines d'objets donc 350 objets.
   $f(3,5) \approx 23,297$ donc le bénéfice maximal réalisé est de 23 297 €.
2. L'entreprise réalise un bénéfice quand il vend au moins x centaines d'objets avec $f(x) > 0$.
   D'après le tableau de variation de la fonction f, il faut pour cela que $x > \alpha$.
   Or $\alpha \in [1,59\,;\,1,60]$ donc il faut vendre au moins 160 objets pour réaliser un bénéfice.

Exercice 3

1. (a) On sait que $f'(x) = (57-25x)\mathrm{e}^{-x}$ et que $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout x ; donc $f'(x)$ est du signe de $57-25x$:

x	$1,5$		$\frac{57}{25}$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

   (b) $f(1,5) = 5,5\mathrm{e}^{-1,5} \approx 1,23$; $f\left(\frac{57}{25}\right) = 25\mathrm{e}^{-\frac{57}{25}} \approx 2,56$ et $f(6) = 118\mathrm{e}^{-6} \approx 0,29$
   D'où le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1,5\,;\,6]$:

x	$1,5$		$\frac{57}{25}$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$1,23$	$\nearrow$	$2,56$	$\searrow$	$0,29$

2. Un point d'inflexion est un point où la courbe représentant la fonction traverse sa tangente ; la courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse x_0 si et seulement si la dérivée seconde de la fonction s'annule et change de signe en x_0.
   On sait que $f''(x) = (25x-82)\mathrm{e}^{-x}$. Pour tout x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $25x - 82$ qui s'annule et change de signe pour $x = \dfrac{82}{25}$.
   Sur l'intervalle $[1,5\,;\,6]$, la courbe C admet donc un unique point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{82}{25}$.
3. Dans cette question, on s'intéresse à l'équation $f(x) = 1$.
   (a) On complète le tableau de variation de la fonction f :

x	$1,5$		$\frac{57}{25}$		α		6
$f(x)$	$1,23$	$\nearrow$	$2,56$	$\searrow$	1	$\searrow$	$0,29$

D'après le tableau de variation de f, on peut dire que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[1,5\,;\,6]$ et que α apprtient à l'intervalle $\left[\frac{57}{25}\,;\,6\right]$.

Or $f(4) \approx 1,25 > 1$ et $f(5) \approx 0,63 < 1$, donc $4 < \alpha < 5$.

L'équation $f(x) = 1$ admet donc une solution unique α sur l'intervalle $[4\,;\,5]$.

(b) On a écrit l'algorithme suivant permettant de déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[4\ ;\ 5]$:

```
Initialisation
a prend la valeur 4
b prend la valeur 5
Traitement
Tant que b − a > 0,1 faire
        y prend la valeur f((a+b)/2).
        Si y > 1 alors
                a prend la valeur (a+b)/2
        Sinon b prend la valeur (a+b)/2
Fin de Tant que
Sortie
Afficher (a+b)/2
```

Il s'agit d'une recherche de valeurs approchées de solutions d'équation par dichotomie.

On exécute l'algorithme et on complète le tableau :

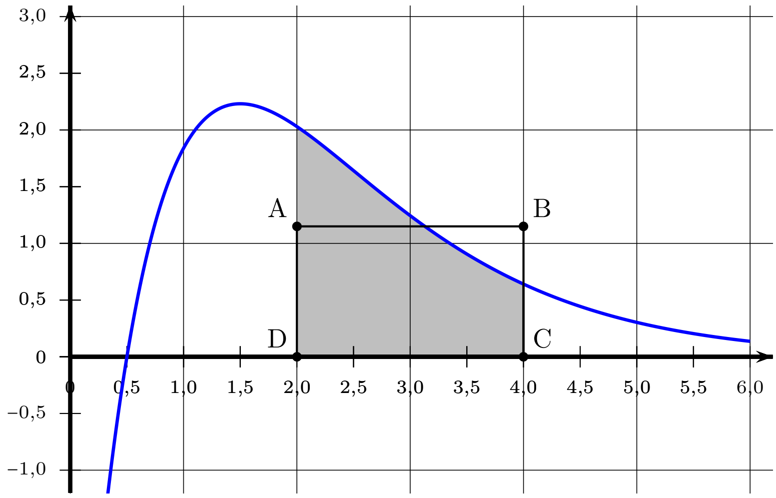
	$\dfrac{a+b}{2}$	y à 10^{-3} près	a	b	$b-a$	Sortie
Initialisation			4	5	1	
1re boucle « Tant que »	4,5	0,894	4	4,5	0,5	
2e boucle « Tant que »	4,25	1,059	4,25	4,5	0,25	Non
3e boucle « Tant que »	4,375	0,974	4,25	4,375	0,125	Non
4e boucle « Tant que »	4,3125	1,016	4,3125	4,375	0,0625	Oui

(c) D'après les calculs précédents :
$f(4,3125) \approx 1,016 > 1$ et $f(4,375) \approx 0,974 < 1$ donc $4,3125 < \alpha < 4,375$.
On peut donc dire que $4,3$ est une valeur approchée de α au dixième.
Le solveur d'une calculatrice donne $4,336$ *comme valeur approchée de* α.

Planche n° 7: Intégration

Exercice 1

La courbe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$.
ABCD est un rectangle, le point D a pour coordonnées $(2;\ 0)$ et le point C a pour coordonnées $(4;\ 0)$.



Partie A

Dans cette partie A, les réponses seront données à partir d'une lecture graphique.

1. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$.
2. Avec la précision permise par le graphique, donner une valeur approchée du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0;\ 6]$.
3. Quel semble être le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2;\ 6]$? Justifier.
4. Pour quelle(s) raison(s) peut-on penser que la courbe admet un point d'inflexion ?
5. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

La fonction f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ par

$$f(x) = (10x - 5)\mathrm{e}^{-x}.$$

Un logiciel de calcul formel a donné les résultats suivants (on ne demande pas de les justifier) :

$$f'(x) = (-10x + 15)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad f''(x) = (10x - 25)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Dresser le tableau de variation de f en précisant la valeur de l'extremum et les valeurs aux bornes de l'ensemble de définition.
2. Étudier la convexité de f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.

3. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ par $F(x) = (-10x - 5)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.
4. En déduire la valeur exacte puis une valeur approchée au centième de $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
5. On souhaiterait que l'aire du rectangle ABCD soit égale à l'aire du domaine grisé sur la figure. Déterminer, à $0,01$ près, la hauteur AD de ce rectangle.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[3\,;\,13]$ par :

$$f(x) = -2x + 20 - \mathrm{e}^{-2x+10}.$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que la fonction dérivée f', de la fonction f, définie pour tout x de l'intervalle $[3\,;\,13]$, a pour expression :

$$f'(x) = 2\left(-1 + \mathrm{e}^{-2x+10}\right).$$

2. (a) Résoudre dans l'intervalle $[3\,;\,13]$ l'inéquation : $f'(x) \geqslant 0$.
   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[3\,;\,13]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Les valeurs du tableau seront, si besoin, arrondies à 10^{-3}.
   (c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

Partie B : Application

Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 300 et 1 300. On suppose que toute la production est commercialisée.
Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle $[3\,;\,13]$ par la fonction f.
En utilisant la partie A, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer le nombre de toboggans que l'usine doit produire pour obtenir un bénéfice maximal et donner ce bénéfice, arrondi à l'euro.
2. Calculer le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise entre 300 et 1 300 toboggans. Arrondir le résultat à l'euro.

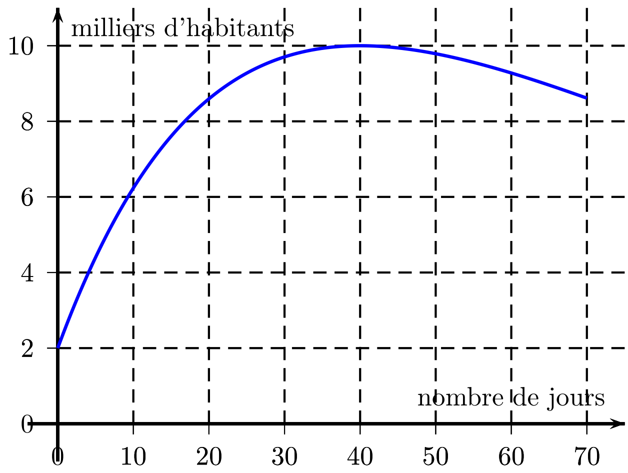
Partie C : Rentabilité

Pour être rentable, l'usine doit avoir un bénéfice positif.
Déterminer le nombre minimum et le nombre maximum de toboggans que l'usine doit fabriquer en un mois pour qu'elle soit rentable. Justifier la réponse.

Exercice 3

L'évolution de la population d'une station balnéaire pour l'été 2015 a été modélisée par une fonction f, définie sur l'intervalle $[0\,;\,70]$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1er juillet, $f(x)$ désigne la population en milliers d'habitants.
Ainsi $x = 30$ correspond au 31 juillet et $f(30)$ représente la population qu'il est prévu d'accueillir le 31 juillet.
On estime qu'un habitant utilisera chaque jour entre 45 et 55 litres d'eau par jour.



Partie A

Dans cette partie, les réponses sont à fournir par lecture graphique

1. (a) Estimer le nombre maximal d'habitants présents dans la station balnéaire selon ce modèle durant l'été 2015 et préciser à quelle date ce maximum serait atteint.
   (b) La commune est en capacité de fournir 600 000 litres d'eau par jour, est-ce suffisant ?
2. Estimer le nombre de jours durant lesquels le nombre d'habitants de la station balnéaire devrait rester supérieur à 80 % du nombre maximal prévu.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,70]$ par

$$f(x) = 2 + 0,2x\mathrm{e}^{-0,025x+1}.$$

1. Calculer $f(9)$ puis vérifier que la consommation d'eau le 10 juillet serait, selon ce modèle, au plus de 324 890 litres.
2. (a) Démontrer que $f'(x) = (0,2 - 0,005x)\mathrm{e}^{-0,025x+1}$ où f' est la fonction dérivée de f.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,70]$.
   (c) En déduire la date de la consommation d'eau maximale.

Partie C

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,70]$ par

$$g(x) = 55f(x) = 110 + 11x\mathrm{e}^{-0,025x+1}.$$

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1er juillet, $g(x)$ représente alors la consommation maximale d'eau prévue ce jour là et exprimée en m^3.
Soit la fonction G définie sur l'intervalle $[0\,;\,70]$ par

$$G(x) = 110x - (440x + 17\ 600)\mathrm{e}^{-0,025x+1}.$$

On admet que la fonction G est une primitive de la fonction g.
La somme $S = g(10) + g(11) + g(12) + \cdots + g(20)$ représente la consommation maximale d'eau du 10e au 20e jour exprimée en m^3.

1. En l'illustrant sur la courbe $\mathcal{C}_g$ de l'**annexe** à rendre avec la copie, donner une interprétation graphique en termes d'aires de la somme S.
2. En déduire une valeur approximative de cette quantité d'eau consommée du 10e au 20e jour.

ANNEXE

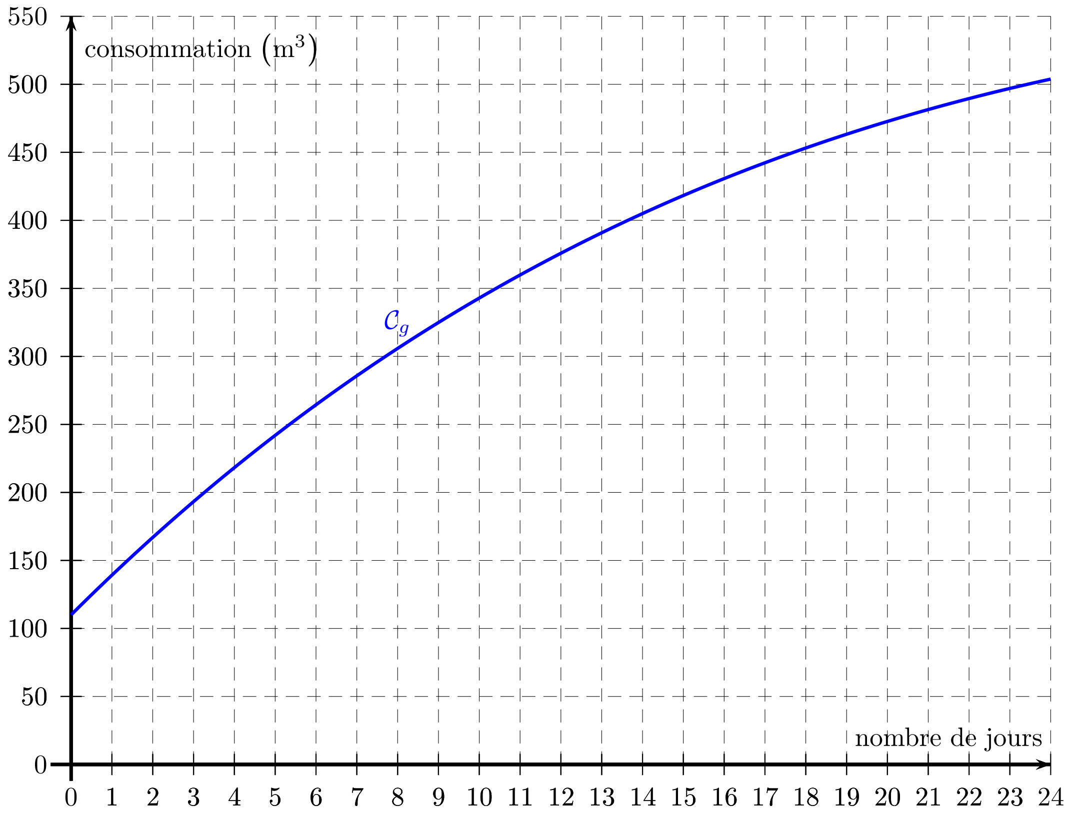


Planche n° 6 : Intégration
Corrigé

Exercice 1

Partie A

1. Les solutions sont les nombres de $]0,5;\ 6]$.
2. Le maximum semble être de $2,2$ atteint en $x = 1,5$.
3. f semble strictement décroissante sur cet intervalle donc sa dérivée doit être strictement négative.
4. La courbe change de concavité. Elle est concave sur $[0;\ 3,5]$ puis devient convexe sur $[3,5;\ 6]$.
5. On obtient l'encadrement en comptant les carreaux d'aire 1 :

$$\boxed{4 \leq \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leq 5}$$

Partie B

1. On doit tout d'abord déterminer le signe de f'.
   Or e^{-x} est positif pour tout x et $-10x + 15$ est positif pour $-10x > -15$, soit pour $x < \dfrac{-15}{-10} = 1,5$.
   À la calculatrice, on détermine $f(1,5)$, $f(0)$ et $f(6)$. Finalement, on dresse le tableau de variations de f :

x	0		1.5		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-5	$\nearrow$	2.23	$\searrow$	0.14

2. On montre assez facilement que $f''(x) > 0 \iff x > 2,5$ donc la fonction est concave sur $[0;\ 2,5]$ et convexe ensuite.
3. On dérive F :

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -10\mathrm{e}^{-x} + (-10x - 5) \times (-\mathrm{e}^{-x})\\
&= \mathrm{e}^{-x}\left[-10 + (-1) \times (-10x - 5)\right]\\
&= \mathrm{e}^{-x}\left[-10 + 10x + 5\right]\\
&= \mathrm{e}^{-x}(10x - 5)\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

   F est donc bien une primitive de f.

4. On sait que :

$$\begin{aligned}\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x &= F(4) - F(2)\\ &= (-40-5)\mathrm{e}^{-4} - (-20-5)\mathrm{e}^{-2}\\ &= -45\mathrm{e}^{-4} + 25\mathrm{e}^{-2}\\ &\simeq 2,56\end{aligned}$$

5. Il s'agit de déterminer la valeur moyenne de f sur $[1;\ 3]$. En effet, la hauteur AD de ce rectangle vérifie :
$AD \times DC = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$, soit $AD = \dfrac{1}{DC}\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. Comme $DC = 2$, on en déduit :

$$\boxed{AD = \frac{1}{2}\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \simeq 1,28}$$

Exercice 2

Partie A : Étude de la fonction *f*

1. Pour tout x de $[3\ ;\ 13]$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= -2 - (-2)\times \mathrm{e}^{-2x+10}\\ &= -2 + 2\mathrm{e}^{-2x+10}\\ &= 2\left(-1 + \mathrm{e}^{-2x+10}\right)\end{aligned}$$

2.

> N'ayant pas traité le chapitre sur le logarithme, cette question était un peu délicate car elle impliquait d'utiliser le sens de variation de l'exponentielle.

(a)

$$\begin{aligned}f'(x) \geq 0 &\iff -1 + \mathrm{e}^{-2x+10}\\ &\iff \mathrm{e}^{-2x+10} \geq 1\\ &\iff -2x + 10 \geq 0\\ &\iff 10 \geq 2x\\ &\iff 5 \geq x\end{aligned}$$

(b) On utilise ce qui vient d'être établit.

x	3		5		13
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	−40.598	↗	9.000	↘	−6.000

(c) Il faut déterminer une primitive de f.
Or une primitive de $x \mapsto 2x$ est $x \mapsto x^2$, une primitive de $x \mapsto 20$ est $x \mapsto 20x$ et une primitive de $x \mapsto -2\mathrm{e}^{-2x+10}$ est $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x+10}$. On réécrit donc, pour tout x,
$f(x) = -2x + 20 + \frac{1}{2}\left(-2\mathrm{e}^{-2x+10}\right)$.
Une primitive de f est donc $F : x \mapsto -x^2 + 20x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+10}$.
Finalement, on a :

$$\begin{aligned}\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x &= F(13) - F(3)\\ &= -13^2 + 20\times 13 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\times 13+10} - \left[-3^2 + 20\times 3 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\times 3+10}\right]\\ &= 40 + \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-16} - \mathrm{e}^{4}\right)\\ &\simeq 12,701\end{aligned}$$

Partie B : Application

1. Elle doit produire 500 toboggans et son bénéfice est alors de 9 000 €.
2. On doit utiliser la valeur moyenne de f sur $[3;\ 13]$:
$\frac{1}{13-3}\left(\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$.
On obtient un bénéfice moyen de 1 270 €.

Partie C : Rentabilité

Il faut résoudre $f(x) \geq 0$.
Or on connaît le tableau de variations de f et, par application du théorème des valeurs intermédiaires, on sait qu'il y a deux antécédents de 0 par f.
Il convient donc de résoudre $f(x) = 0$ en utilisant une méthode de balayage avec une précision de 10^{-2} puisque x représente des centaines.
On obtient les deux solutions $x_1 \simeq 3,74$ et $x_1 \simeq 9,99$.
L'usine doit donc fabriquer entre 374 et 999 toboggans.

Exercice 3

Partie A

1. (a) Le nombre maximal semble être de 10 000, le 40$^{\mathrm{e}}$ jour, c'est à dire le 10 août.
   (b) On calcule $10\ 000 \times 55 = 550\ 000 < 600\ 000$ donc la capacité semble suffisante.
2. Cela revient à résoudre $f(x) \geq 8$.
Graphiquement, on lit que cela se produit pendant environ $70 - 18 = 52$ jours.

Partie B

1. On obtient $f(9) \simeq 5,907$, soit 5907 habitants environ le 10 juillet qui devraient consommer au maximum $5907 \times 55 = 324\,885$ litres d'eau.
2. (a) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0,2x \times (-0,025)\mathrm{e}^{-0,025x+1} + 0,2\mathrm{e}^{-0,025x+1} \\ &= \mathrm{e}^{-0,025x+1}(-0,005x + 0,2) \end{aligned}$$

   (b) L'exponentielle est à valeurs positives. Il convient donc de déterminer le signe de $(-0,005x + 0,2)$. On résout donc
   $(-0,005x + 0,2) > 0 \iff 0,2 > 0,005x \iff \dfrac{0,2}{0,005} > x \iff 40 > x.$
   $f'(x)$ est donc positive sur $[0;\ 40]$ et négative ensuite.

   (c) La date de consommation maximale est donc bien le 10 août, comme établi dans la partie A.

Partie C

1. Les 11 rectangles de bases $[10;\ 11]$, $[11;\ 12]$, $\cdots$, $[20;\ 21]$ et de hauteurs respectives $g(10)$, $g(11)$, $\cdots$, $g(20)$ représentent un domaine d'aire totale $1 \times g(10) + 1 \times g(11) + \cdots + 1 \times g(20) = S$. On a grisé ce domaine sur l'annexe.
2. L'aire de ce domaine vaut environ :

$$\boxed{\int_{10}^{21} g = G(21) - G(10) \simeq 4625\ m^3}$$

ANNEXE