Cours de Mathématiques de Terminale ES

Pierre-Alexandre Fournié

2017

Chapitre 1

Continuité

1.1 Rappels

1.1.1 Droites

Quelques rappels sur les équations de droites qui nous seront utiles.

Théorème : Équation de droite
Soient A et B 2 points distincts d'un plan muni d'un repère $(O; I; J)$. L'équation de la droite (AB) s'écrit :
(Cas n° 1) $x = x_A$ *lorsque* $x_A = x_B$
(Cas n° 2) $y = mx + p$ *lorsque* $x_A \neq x_B$*, avec*

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
$$p = y_A - mx_A$$

Proposition : Équation de droite dont on connaît un point et le coefficient directeur
Soit m un nombre fixé et $A(x_A;\ y_A)$ un point.
La droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur m a pour équation

$$\boxed{y = m(x - x_A) + y_A}$$

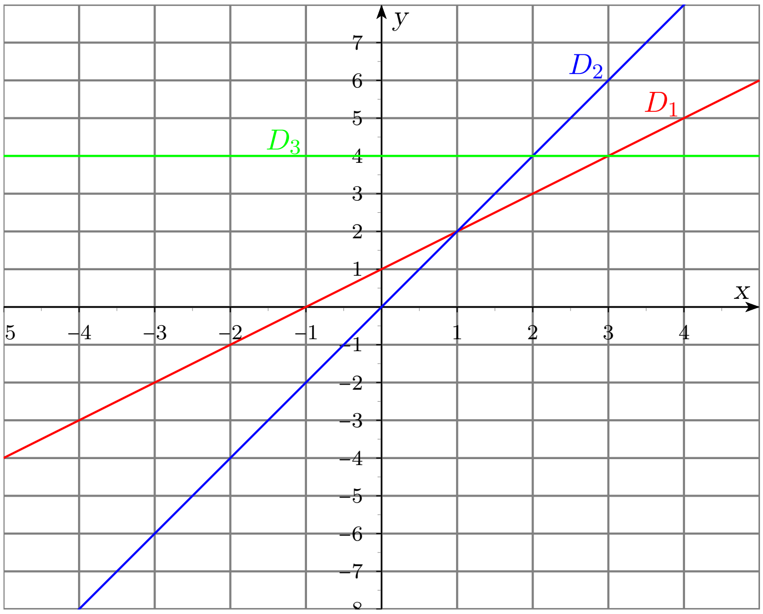
Exercice 0

On considère les points $A(-1;\ 2)$ $B(1;\ 1)$ $C(3;\ -3)$ $D(6;\ 0)$

1. *Dans un repère sur votre feuille, placer ces quatre points.*
2. *Déterminer les équations des droites (AB) et (CD).*
3. *Par lecture graphique, quelles semblent être les coordonnées de l'intersection de (AB) et (CD) ?*
4. *Vérifier votre conjecture par un calcul.*

✎ Exercice 1

Par lecture graphique, déterminer les équations des trois droites tracées ci-après.



1.1.2 Fonctions trinômiales, études de signes et inéquations

Proposition : Signe d'une fonction trinômiale

Soient a, b et c trois nombres fixés avec $a \neq 0$.
Soit une fonction f qui à tout x associe $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On calcule $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ puis on distingue trois cas :

(cas n° 1) *Si $\Delta < 0$, $f(x)$ est toujours du signe de a.*

(cas n° 2) *Si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe opposé à a pour x compris entre r_1 et r_2 et est du signe de a ailleurs, les valeurs de r_1 et r_2 étant :*

$$\boxed{\begin{cases} r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}}$$

Dans ce cas, on dit que r_1 et r_2 sont les racines *de f.*

(cas n° 3) *Si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq r$ et s'annule pour $x = r$ avec :*

$$\boxed{r = \frac{-b}{2a}}$$

Dans ce cas, on dit que r est la racine double *de f.*

✎ Exercice 2

Établir les tableaux de signes des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2 - 5x + 6 \\ B(x) &= -x^2 + 4x - 4 \\ C(x) &= x^2 + 2x - 15 \\ D(x) &= 0,2(2x-5)(x-1) \end{aligned}$$

✎ *Exercice 3*

Résoudre les équations et les inéquations proposées :

a) $(x-4)(x+3)=0$

b) $-3(x-2)(x-5)<0$

c) $2x^2-6x \geq -4$

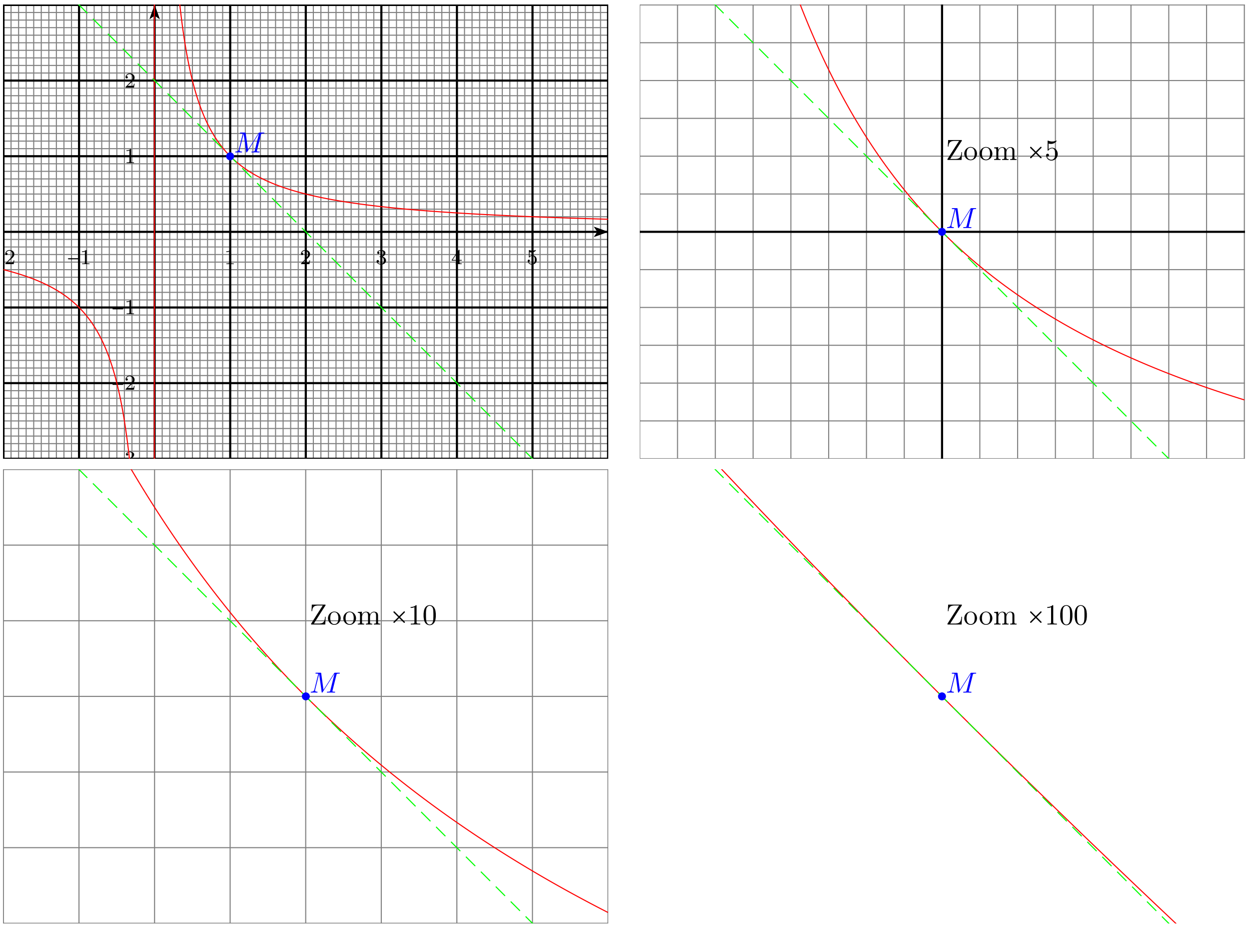
d) $\dfrac{(x-6)(x^2+2x+12)}{x^2}<0$

> Résoudre une inéquation dont l'un des membres est nul revient à déterminer le signe du membre restant. On peut dans ce cas dresser un tableau de signes si l'expression restante est déjà factorisée ou, lorsque c'est possible, utiliser les propriétés sur les fonctions trinômiales.

1.1.3 Dérivation

1.1.3.1 Tangente : définition purement graphique

On considère une courbe $\mathcal{C}$ tracée dans un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ et M un point de la courbe $\mathcal{C}$.
Sous certaines conditions, lorsque l'on agrandit l'échelle autour du point M, on s'aperçoit que la courbe $\mathcal{C}$ est très bien approchée par une droite.
On appelle *tangente* en M à la courbe $\mathcal{C}$ cette droite. Si l'on agrandit suffisamment l'échelle, on peut même confondre la courbe avec la tangente, comme le montre les zooms consécutifs faits autour du point M de coordonnées $(1;1)$. On a tracé en pointillés cette tangente.



1.1.3.2 Lien entre nombre dérivé et tangente

Proposition : Dérivation et tangente
Soit une fonction f de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et soit m un nombre.
Le nombre dérivé de f en a, lorsqu'il existe, est le nombre $f'(a)$ correspondant au coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

Pour lire graphiquement le nombre dérivé, il faut donc lire le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.

Proposition : Équation de la tangente à la courbe d'une fonction f au point d'abscisse a
Soit une fonction f de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et soit a un nombre du domaine de définition de f.
On suppose que f est dérivable en a.
Alors l'équation de la tangente au point d'abscisse a est

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

Exercice 4

Soit une fonction f dont la courbe est notée $\mathcal{C}_f$.
On suppose que $f(2) = 1$ et que $f'(2) = 3$. On note T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

a) *Le point $A(1;\ 2)$ est sur la courbe $\mathcal{C}_f$.*
b) *Le point $M(2;\ 1)$ appartient à T.*
c) *Le coefficient directeur de T est 1.*
d) *L'équation de T est $y = 3x - 6$*

1.1.3.3 Fonction dérivée et formulaire de dérivation

Définition : Fonction dérivée
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
La fonction dérivée de f est la fonction f' qui à tout x de I associe $f'(x)$.

Proposition : Formulaire de dérivation
Soit n un nombre entier naturel, a et b sont deux nombres réels fixés.

Nom de la fonction	*Domaine de définition*	*Domaine de dérivabilité*	$f(x)$	$f'(x)$
Constante	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a	0
Affine	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$ax+b$	a
Carré	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	x^2	$2x$
Cube	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$
Puissance	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}
Inverse	$\mathbb{R}-\{0\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
Racine	$[0;\ +\infty[$	$]0;\ +\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Proposition : Opérations sur les fonctions et dérivation

Soit I un intervalle, soit a un nombre fixé et soient u et v deux fonctions dérivables sur I.
Alors, pour tout x de I, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(u+v)'(x) &= u'(x)+v'(x)\\
(au)'(x) &= au'(x)\\
(uv)'(x) &= u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\\
\left(\frac{1}{u}\right)'(x) &= \frac{-u'(x)}{u(x)^2}\\
\left(\frac{u}{v}\right)'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}
\end{aligned}$$

✎ **Exercice 5**

En utilisant le formulaire ainsi que la propriété précédente portant sur les opérations, déterminer les dérivées des fonctions suivantes.

$$\begin{aligned}
c(x) &= 3x+4\\
d(x) &= x^3-x^2\\
e(x) &= \frac{3}{x}\\
f(x) &= \frac{4}{2+x}\\
g(x) &= \frac{x+1}{x-1}
\end{aligned}$$

1.1.3.4 Dérivée et sens de variation

Théorème : Dérivation et sens de variation

Une fonction f est croissante sur un intervalle I si et seulement si sa dérivée est positive sur I.
Une fonction f est décroissante sur un intervalle I si et seulement si sa dérivée est négative sur I.
Une fonction f admet un extrêmum local en a si et seulement si sa dérivée s'annule en changeant de signe en a.

Pour étudier le sens de variation d'une fonction, il faut donc étudier le signe de sa dérivée. En pratique, on établira donc le tableau de signes de la dérivée sur une première ligne puis le tableau de variations de la fonction sur une seconde ligne.

Exercice 6

Une entreprise, qui fabrique et vend des ordinateurs sur commande, modélise le bénéfice en euros pour x ordinateurs fabriqués et vendus en une journée, par la fonction :

$$f(x) = x^3 - 60x^2 + 900x - 500$$

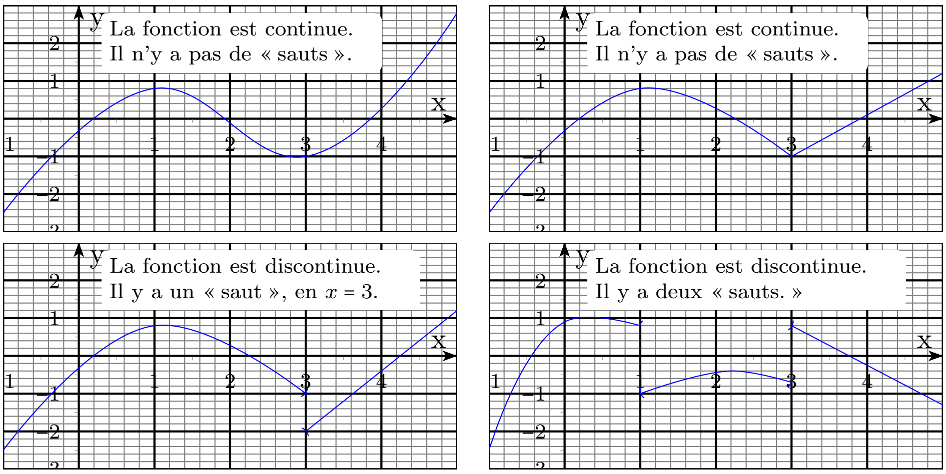
L'entreprise ne pouvant construire plus de 30 ordinateurs par jour, on aura $0 \leq x \leq 30$.

1. *Déterminer le bénéfice pour 4 puis pour 10 ordinateurs.*
2. *Calculer* $f'(x)$, *où* f' *désigne la fonction dérivée de* f.
3. *Dresser, après avoir étudié le signe de* f' *, le tableau de variations de* f.
4. *En déduire combien d'ordinateurs l'entreprise doit fabriquer et vendre chaque jour pour avoir un bénéfice maximal. Donner ce bénéfice.*

1.2 Continuité

1.2.1 Définition

On dira qu'une fonction f est continue sur un intervalle I lorsque sa courbe ne s'interrompt pas lorsque l'on parcourt les abscisses correspondant à I.
Plus bas, on a représenté quatre exemples de courbes de fonctions toutes définies sur $[-1;\ 5]$ permettant d'illustrer cette définition.



Toutes les fonctions étudiées jusqu'à présent sont continues sur leur ensemble de définition. L'étude des fonctions discontinues ne figure pas au programme du lycée.

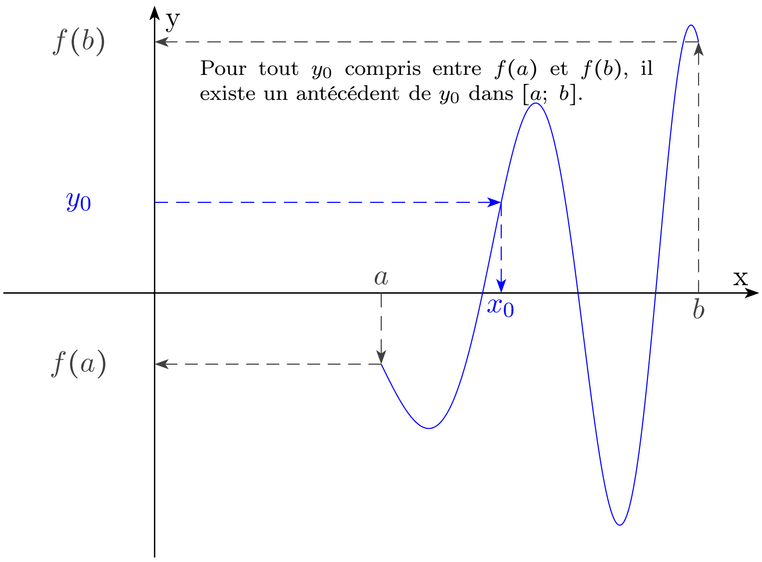
1.2.2 Le théorème des valeurs intermédiaires

L'une des conséquences importantes de la continuité s'appelle le théorème des valeurs intermédiaires. Il peut se traduire par l'image suivante très simple : « Si l'on se déplace de Paris à Johannesburg sans utiliser de télé-transportation alors à un moment ou un autre on traverse l'équateur. »

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires

Soient a et b deux nombres tels que $a < b$ et soit une fonction f définie sur l'intervalle $[a;\ b]$.
Si f est continue alors, pour tout nombre y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un nombre x_0 appartenant à $[a;\ b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.
Si de plus la fonction est strictement croissante ou bien strictement décroissante sur $[a;\ b]$ alors l'antécédent de y_0 est unique.

On illustre ce théorème.



Quelques exercices pour exploiter ce théorème.

Exercice 7

On considère la fonction $f : x \mapsto x^5$.

1. *Calculer $f(1)$ et $f(2)$.*
2. *En déduire qu'il existe un antécédent de 2 par f dans l'intervalle $[1;2]$.*

Exercice 8

On considère la fonction $f : x \mapsto x^4 - 3x^3 + x - 1$.

1. *Calculer $f(1)$ et $f(3)$.*
2. *En déduire qu'il existe un antécédent de 0 par f dans l'intervalle $[1;3]$.*
3. *Existe-t-il un antécédent de -5 sur cet intervalle ?*

Pour aborder les exercices de ce chapitre, il est utile de savoir tracer la courbe d'une fonction ou bien de calculer des tableaux de valeurs. Pour cela, on commence par définir la fonction dans le menu `f(x)` .
Dans un second temps, il faut définir la fenêtre du graphique dans le menu `fenêtre` ainsi que les paramètres de la table dans `2nde` `fenêtre` .
En allant dans `graphe` , on peut observer la courbe. Enfin, dans `2nde` `graphe` , on peut lire le tableau de valeurs.
Il faudra parfois commencer par lire la table de valeurs pour pouvoir régler correctement la fenêtre du graphique, en particulier les nombres `Ymin` et `Ymax`.

Les problèmes de terminale ES mettant en œuvre le théorème des valeurs intermédiaires exploitent souvent des tableaux de variations. Les exercices suivants en sont une illustration.

> Quand on dresse le tableau de variations d'une fonction la flèche ↗ signifie « continue et strictement croissante » sur l'intervalle en question.
> De même, la flèche ↘ signifie « continue et strictement décroissante » sur l'intervalle en question.

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $[-2;\ +\infty[$ dont le tableau de variations est

x	-2		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$	5	↘	-2	↗	3	↘	2	↗	

Déterminer le nombre d'antécédents de 1 par f.

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $]-\infty;2]$ dont le tableau de variations est

x	$-\infty$		-1		0		2
$f(x)$		↘	1	↗	3	↘	-1

1. *Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution notée α.*
2. *Dresser le tableau de signes de f.*

Exercice 11

Soit la fonction f qui a tout réel x associe $f(x) = x^3 - 3x$.

1. *Déterminer, pour tout réel x, $f'(x)$.*
2. *Dresser le tableau de signes de f' puis le tableau de variations de f.*
3. (a) *Calculer $f(-2)$ et $f(2)$.*
   (b) *En déduire que l'équation $f(x) = 1$ possède trois solutions : une solution α appartenant à l'intervalle $[-2;\ -1]$, une solution β appartenant à l'intervalle $[-1;\ 1]$ et une solution γ appartenant à l'intervalle $[1;\ 2]$.*
   (c) *Donner une approximation de γ au centième.*

Chapitre 2

Suites numériques

2.1 Rappels sur les taux d'évolutions

Définition : Coefficient multiplicateur, taux d'évolution

Soient V_1 et V_2 deux valeurs positives avec $V_1 \neq 0$.
Le coefficient multiplicateur de V_1 à V_2 est le nombre :

$$\boxed{C_{12} = \frac{V_2}{V_1}}$$

Le taux d'évolution de V_1 à V_2 est le nombre :

$$\boxed{t_{12} = \frac{V_2 - V_1}{V_1}}$$

Le coefficient multiplicateur et le taux d'évolution sont reliés par la formule :

$$\boxed{C_{12} = 1 + t_{12}}$$

Proposition : Évolutions successives, évolutions réciproques

Soient V_1, V_2 et V_3 trois valeurs positives avec $V_1 \neq 0$ et $V_2 \neq 0$. Le coefficient multiplicateur de V_1 à V_3 se calcule en fonction des coefficients multiplicateurs de V_1 à V_2 et de V_2 à V_3 :

$$\boxed{C_{13} = \frac{V_3}{V_1} = C_{12}C_{23}}$$

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque de V_2 à V_1 est le nombre :

$$\boxed{C_{21} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{C_{12}}}$$

Lorsqu'on calcule des évolutions successives ou des évolutions réciproques on repasse obligatoirement par les coefficients multiplicateurs.
Dans un second temps, on convertit les coefficients multiplicateurs en taux d'évolutions.

Entraînez-vous !

Exercice 0

On donnera les taux en pourcentages arrondis à $0,1\%$ et les coefficients arrondis à $0,001$

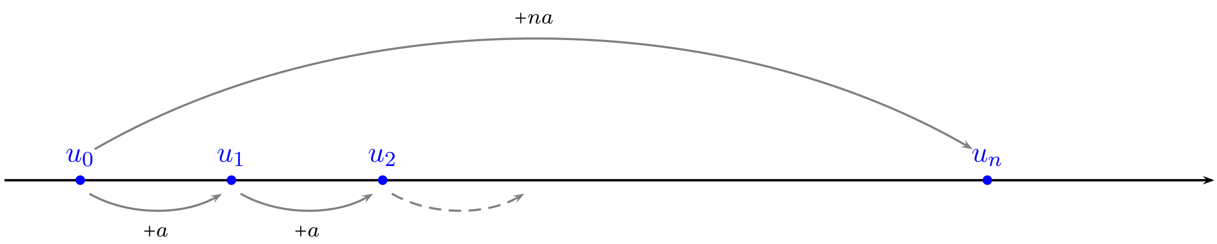
1. *Un prix passe de 152 325 à 163 812, déterminer le taux d'évolution.*
2. *Après une augmentation de $2,5\%$, le prix d'une denrée est de 2532€/t. Quel était le prix initial de la denrée ?*
3. *Dans une ville, en 2005, le prix moyen des appartement était de 4250€$/m^2$. Ce prix a successivement subi des variations annuelles de $+5\%$ puis $+7\%$ et enfin -10%.*
   (a) *Quel est le prix moyen des appartements en 2008 ?*
   (b) *Quel est le taux d'évolution global entre 2005 et 2008 ?*
   (c) *Quel est le coefficient multiplicateur du prix entre 2005 et 2008 ?*
4. *Le prix TTC d'une denrée est de 199€. Quel est son prix HT, sachant que la TVA est de 20% ?*

2.2 Suites

2.2.1 Définitions et premières propriétés

Définition : Suite arithmétique

On dit qu'une suite u est arithmétique lorsqu'il existe un nombre fixé a tel que pour tout n, $u_{n+1} = u_n + a$. a s'appelle la raison de u.



Proposition : Formule explicite d'une suite arithmétique

Soit une suite u arithmétique de raison a. Alors pour tout n :

$$\boxed{u_n = an + u_0}$$

Si la suite commence à u_p, on a également la formule :

$$\boxed{u_n = a(n-p) + u_p}$$

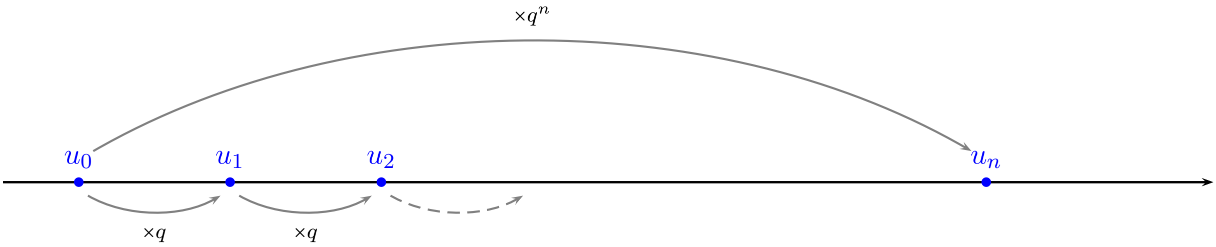
Proposition : Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit une suite u arithmétique de raison a. Alors, u est :

- *strictement croissante lorsque $a > 0$*
- *strictement décroissante lorsque $a < 0$*
- *constante lorsque $a = 0$*

Définition : Suite géométrique

On dit qu'une suite u est géométrique lorsqu'il existe un nombre fixé q tel que pour tout n, $u_{n+1} = qu_n$.
q s'appelle la raison de u.



Proposition : Formule explicite d'une suite géométrique

Soit une suite u géométrique de raison q. Alors pour tout n :

$$\boxed{u_n = u_0 q^n}$$

Si la suite commence à u_p, on a également la formule :

$$\boxed{u_n = u_p q^{n-p}}$$

Proposition : Sens de variation d'une suite géométrique à termes positifs

Soit q un nombre strictement positif. Alors la suite de terme général q^n est :

- *strictement croissante lorsque* $q > 1$
- *strictement décroissante lorsque* $0 < q < 1$
- *constante lorsque* $q = 1$

Une suite u telle que, pour passer de u_n à u_{n+1}, on augmente de $t\%$ est en fait une suite *géométrique* de raison $1 + \frac{t}{100}$.
Par exemple, si on passe de u_n à u_{n+1} en diminuant de 2%, la suite u est géométrique de raison $1 - \frac{2}{100} = 0,98$.

Pour déterminer le tableau de valeurs d'un suite, on procède de la manière suivante.

Il faut aller dans `mode` puis sélectionner `Suit` . Ensuite, on écrit la définition de la suite dans `f(x)` .
`nMin` correspond au premier rang.
`u(n)` permet d'écrire la formule de récurrence (u_n en fonction de u_{n-1}) ou bien la formule explicite de la suite (u_n en fonction de n).
On obtient u, v, w à l'aide des combinaisons `2nde` `7` ou `8` ou `9` .
`u(nMin)` correspond au premier terme de la suite.
Ensuite on règle les paramètres de la table `2nde` + `fenêtre` avec un pas et un début de table qui sont des entiers positifs.
Enfin, on visualise les valeurs dans `2nde` + `graphe` .

Entraînez-vous !

✎ ***Exercice 1***

On donnera les résultats arrondis à $0,001$

1. *Dans les cas suivants déterminer* u_5 *:*
   (a) u *est une suite arithmétique de raison* 3 *telle que* $u_6 = 253$
   (b) u *est une suite géométrique de raison* 3 *telle que* $u_6 = 16$
   (c) u *est une suite arithmétique de raison* 12 *et de premier terme* $u_1 = 5$
   (d) u *est une suite géométrique de raison* $1,5$ *et de premier terme* $u_0 = 125$
2. v *est une suite géométrique de raison* $1,05$ *et de premier terme* $v_0 = 1000$.
   (a) *Quel est le sens de variation de* v *?*
   (b) *Déterminer, pour tout entier* n*, la formule donnant* v_n.
   (c) *À l'aide de la calculatrice déterminer le plus petit entier* n *tel que* v_n *dépasse* 3000.

✎ ***Exercice 2***

En 2012, les émissions françaises de CO_2 *étaient de 340 millions de tonnes.*
On estime qu'entre 2011 et 2012 ces émissions ont baissé de 3 % et que cette tendance s'est poursuivie les années suivantes.
On note M_n *les émissions de gaz à effet de serre l'année* $2012 + n$.

1. *Quelle est la nature de la suite* M *? Quelle est sa raison ?*
2. *Préciser la formule explicite permettant d'obtenir, pour tout entier* n*, la valeur de* M_n.
3. *On cherche à connaître l'année à partir de laquelle les émissions de gaz à effet de serre passeront sous le seuil des 200 millions de tonne.*
   (a) *Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il fournisse la réponse à cette question.*

Variables :	m *est un réel* k *est un entier*
Entrée :	m *prend la valeur* 340 k *prend la valeur* 0
Traitement :	*Tant que* m .... *200 :* m *prend la valeur de* .... k *prend la valeur de* .... *Fin de tant que*
Sortie :	*Afficher* 2012+ ....

   (b) *En implémentant l'algorithme dans la* `TI` *ou bien par un tableau de valeur, répondre à cette question.*

2.2.2 Somme et limite de suites géométriques

2.2.2.1 Somme des termes d'une suite géométrique

La proposition suivante fournit une formule pour calculer la somme des termes d'une suite géométrique.

Proposition : Somme des termes d'une suite géométrique

Soit q *un réel différent de* 1*. Alors, pour tout entier* n*, on a :*

$$\boxed{1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Un petit exercice pour voir des applications de cette formule :

Exercice 3

Appliquer la formule de la somme des termes d'une suite géométrique pour obtenir une valeur exacte des nombres suivants. n désigne un entier.

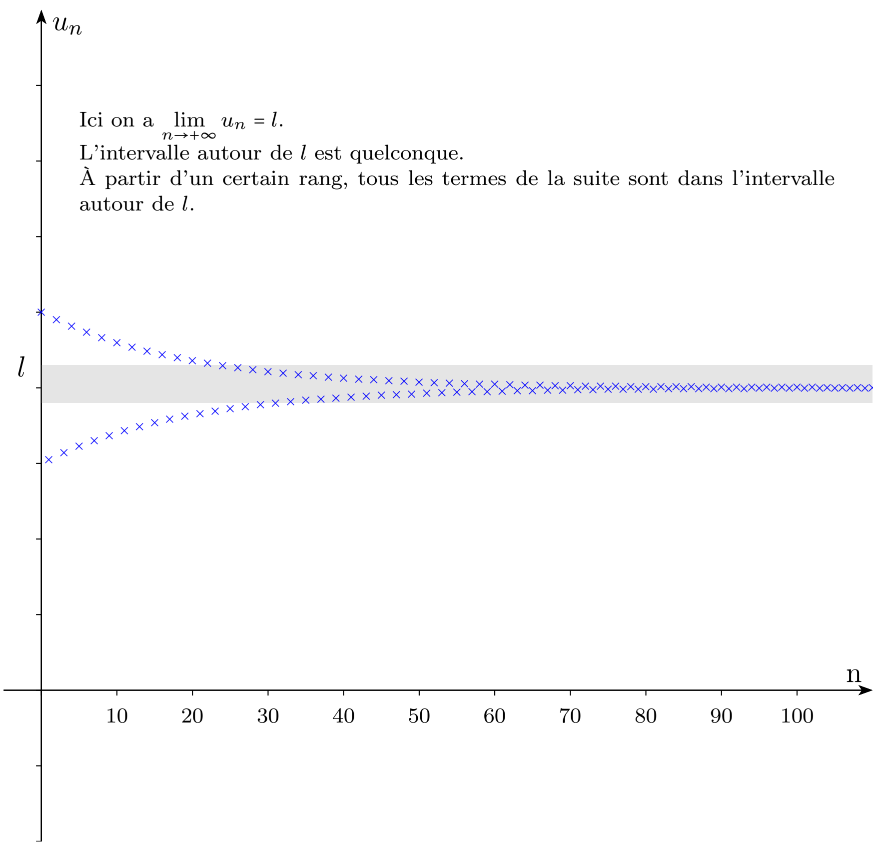
$$A = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{10}$$
$$B = 1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^{8}$$
$$C = 3 + 6 + 12 + 24 + 3 \times 2^{4} + \cdot + 3 \times 2^{10}$$
$$D = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

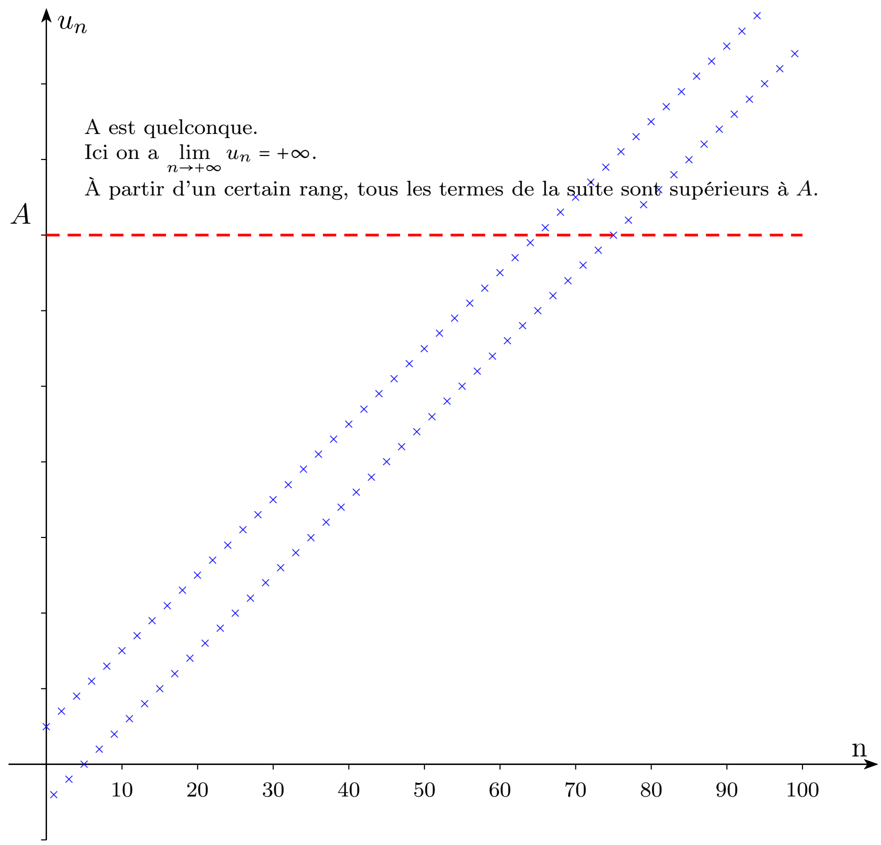
2.2.2.2 Limites de suites géométriques

On s'intéresse à une suite u_n.

Dans certains cas, il arrive que les termes u_n se rapprochent indéfiniment d'un nombre l donné lorsque n devient infiniment grand. On dira alors que la suite u a pour limite l.
On le notera ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

De même, il peut se présenter le cas où les termes u_n deviennent indéfiniment grands ou bien indéfiniment petits lorsque n devient infiniment grand. On dira alors que la suite a pour limite $+\infty$ (plus l'infini) ou bien $-\infty$ (moins l'infini).
On le notera ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
On a illustré ces deux cas par des figures.





Un résultat permet de prévoir très simplement le comportement des suites géométriques :

Proposition : Limite d'une suite géométrique de raison strictement positive

Soit $q > 0$ un nombre. On s'intéresse à la limite de la suite de terme général q^n.
Il peut se présenter trois cas :

(Cas n° 1) Si $q > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

(Cas n° 2) Si $q < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

(Cas n° 3) Si $q = 1$ alors la suite de terme général q^n est constante et égale à 1.

Un petit exercice pour s'entraîner.

Exercice 4

Donner la formule explicite puis déterminer les limites des suites :

a) *u est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison égale à 2.*

b) *v est une suite géométrique de premier terme $u_1 = -2$ et de raison égale à 3.*

c) *w est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et de raison égale à $\dfrac{3}{5}$.*

d) *s est une suite géométrique de premier terme $u_0 = -0,1$ et de raison égale à $\dfrac{5}{3}$.*

e) *t est une suite définie pour tout n par $t_n = 4 - 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.*

2.2.3 Suites arithmético-géométriques

Définition : Suites arithmético géométriques

On dit qu'une suite u est une suite arithmético-géométrique lorsqu'il existe deux nombres a et b tels que, pour tout n :

$$\boxed{u_{n+1} = au_n + b}$$

On étudie habituellement une telle suite à l'aide d'une suite auxiliaire comme le montre l'exercice type suivant adapté du baccalauréat.

✎ ***Exercice 5***

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville.
Chaque année, 12,5 % de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent.
En 2012, la ville comptait 40 000 habitants.
On note U_n le nombre d'habitants de la ville en l'année 2012 + n.
On a donc $U_0 = 40\ 000$.
On admet que la suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = 0,875 \times U_n + 1\ 200$.
On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 9\ 600$.

1. *Déterminer la valeur de U_1.*
2. *Montrer que la suite (V_n) est géométrique. Préciser sa raison.*
3. (a) *Déterminer la formule explicite de la suite (V_n).*
   (b) *En déduire la formule explicite de la suite (U_n).*
4. (a) *Déterminer la limite de la suite (V_n).*
   (b) *En déduire la limite de la suite (U_n)*

Dans l'exercice précédent, la suite (V_n) est la suite auxiliaire de la suite arithmético-géométrique (U_n). Le plan d'un tel exercice est toujours le même :

1. On prouve que (V_n) est géométrique pour pouvoir en déduire la formule explicite de (U_n).
2. On détermine la limite de (V_n) pour pouvoir en déduire la limite de (U_n).

Chapitre 3

Convexité

3.1 Définition graphique

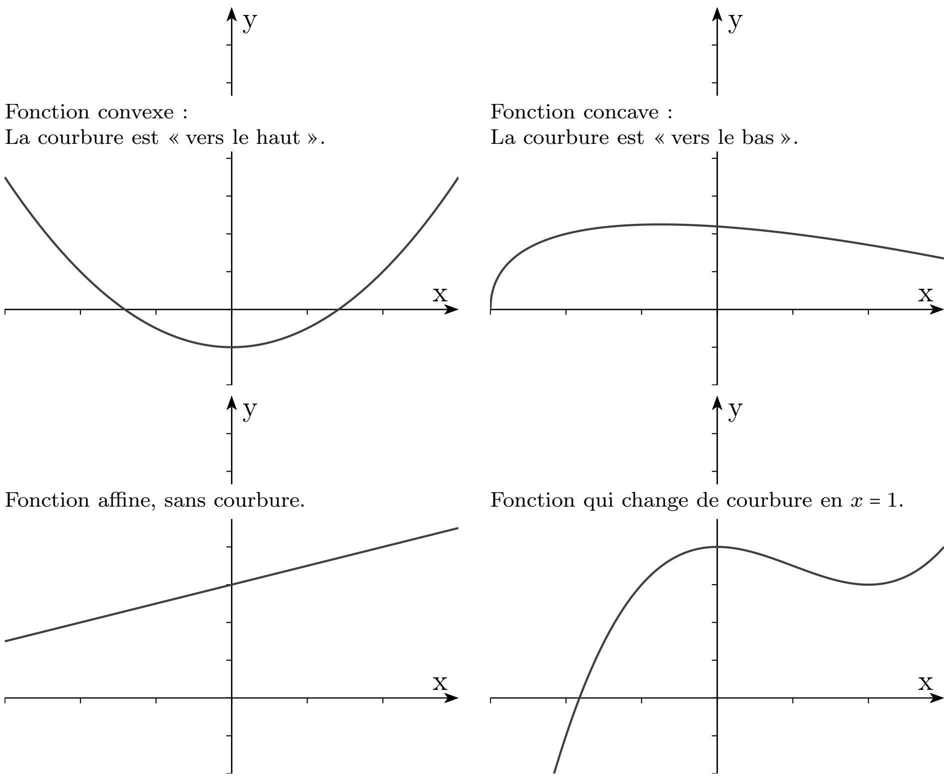
3.1.1 Reconnaître une fonction convexe ou concave

> Tout ce qui suit est énoncé à l'aide de mots du langage courant, ce qui n'est pas très rigoureux. Néanmoins, il est important en mathématiques aussi de savoir utiliser son intuition avant de se lancer dans des calculs ou dans des démonstrations périlleuses.

On dit qu'une fonction est *convexe* sur un intervalle lorsque sa courbe restreinte à cet intervalle est « incurvée vers le haut ».

De même, on dit qu'une fonction est *concave* sur un intervalle lorsque sa courbe restreinte à cet intervalle est « incurvée vers le bas ».

On illustre ces deux définitions intuitives.



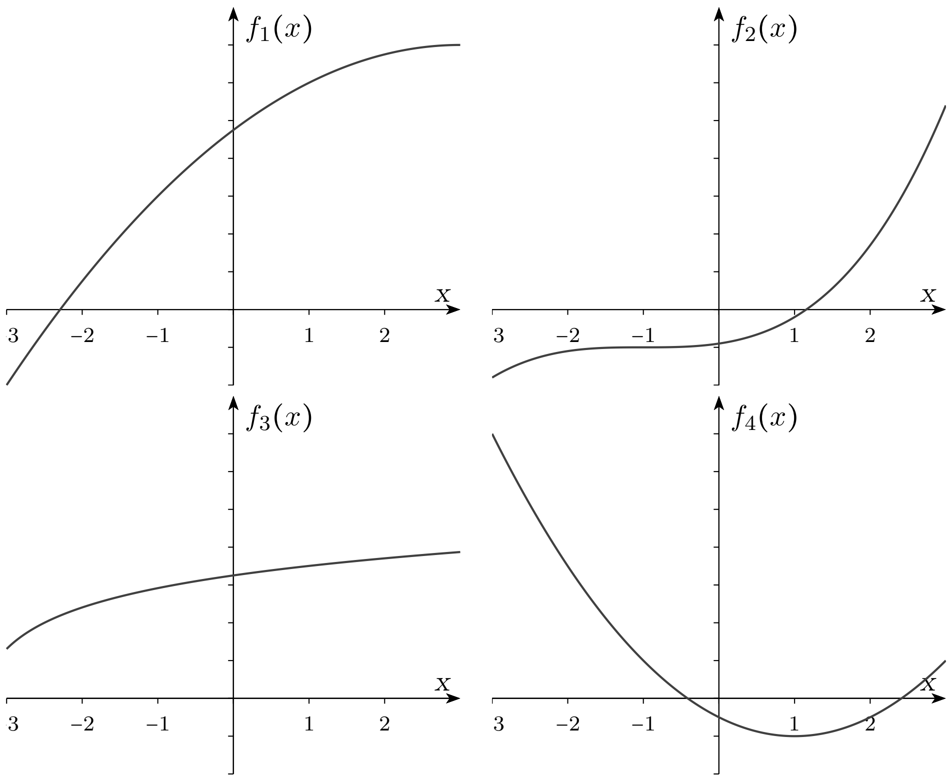
> Un moyen mnémotechnique pour différencier convexe et concave se trouve dans une lecture abusive du mot concave : tourné « vers la cave », c'est-à-dire « vers le bas ».

Le contraire de convexe n'est pas concave. Une fonction peut en effet être ni convexe, ni concave sur un intervalle donné. C'est le cas par exemple de la dernière fonction de l'illustration précédente.

Un petit exercice pour s'entraîner à reconnaître graphiquement la convexité.

Exercice 0

f_1, f_2, f_3 et f_4 sont quatre fonctions définies sur l'intervalle $[-3;\ 3]$ et dont on a tracé les courbes ci-après.
Préciser pour chacune de ces fonctions si elle est convexe, concave ou ni l'un ni l'autre sur son ensemble de définition.



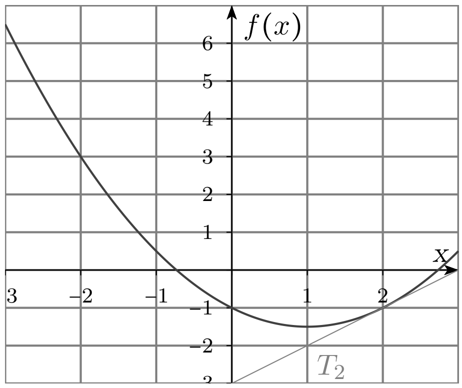
3.1.2 Définition à l'aide des tangentes

À notre niveau, on utilise les tangentes pour définir la convexité.
Avant d'aller plus loin, il nous faut donc réviser cette notion.

Exercice 1

On a tracé plus bas la courbe d'une fonction f définie sur $[-3;\ 3]$.
De même, on a également tracé la tangente au point d'abscisse 2, droite notée T_2.
Sans faire aucun calcul, répondre aux questions suivantes :

1. (a) *Lire la valeur de $f(2)$.*
   (b) *Résoudre graphiquement $f(x) \geq -1$.*
2. (a) *À quoi correspond $f'(2)$? Lire sa valeur.*
   (b) *Déterminer l'équation de T_2.*
   (c) *Tracer approximativement la tangente au point d'abscisse -2. En déduire une valeur approximative de $f'(-2)$.*
3. *Déterminer le tableau de signes de f' sur $[-3;\ 3]$.*

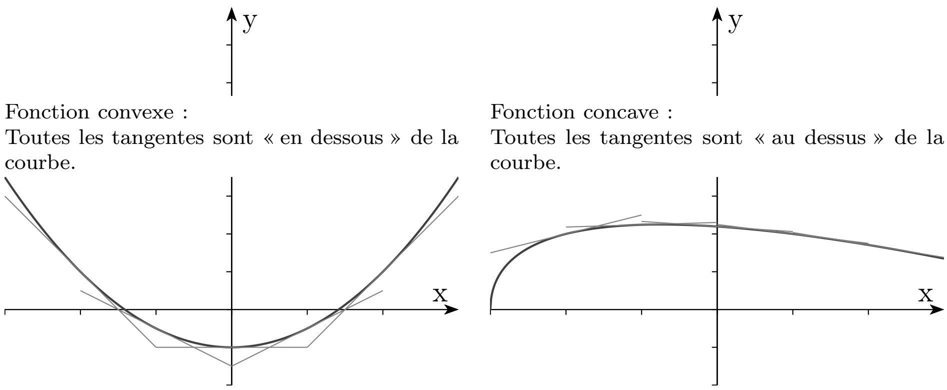


Définition : Convexité, concavité d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction définie et dérivable sur un interva lle I.

On dit que f est convexe *sur I lorsque la courbe de f est « au dessus » de toutes ses tangentes sur l'intervalle I.*

On dit que f est concave *sur I lorsque la courbe de f est « en dessous » de toutes ses tangentes sur l'intervalle I.*



On peut tout à fait définir géométriquement la convexité pour des fonctions non dérivables ! Cela se fait à l'aide de la notion de corde, non inscrite au programme.

3.1.3 Application de la convexité à la recherche d'extrema

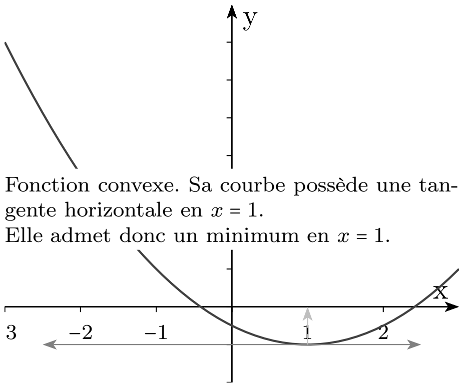
Proposition : Extrema et convexité

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit a un nombre de I.

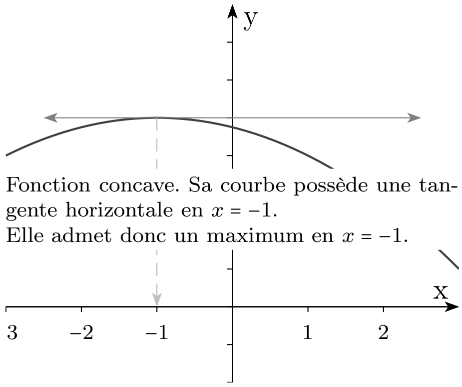
Si f est convexe sur I et si $f'(a) = 0$ alors f admet un unique minimum en a.

Si f est concave sur I et si $f'(a) = 0$ alors f admet un unique maximum en a.

On illustre les deux cas de ce théorème.



Fonction convexe. Sa courbe possède une tangente horizontale en $x = 1$.
Elle admet donc un minimum en $x = 1$.



Fonction concave. Sa courbe possède une tangente horizontale en $x = -1$.
Elle admet donc un maximum en $x = -1$.

3.2 Propriétés des fonctions convexes

3.2.1 Sens de variation de la dérivée et convexité

Proposition : Fonction convexe et sens de variation de sa dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
f est convexe si et seulement si sa dérivée f' est croissante.
f est concave si et seulement si sa dérivée f' est décroissante.

Ici, il faut se souvenir que le nombre dérivé de f en a correspond au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a. Ainsi, la proposition qui précède établit un lien entre l'évolution des coefficients directeurs des tangentes et la convexité !

En pratique, si on reprend la première figure du paragraphe 3.1.2, qui correspond à une fonction convexe, on constate que les coefficients directeurs des tangentes augmentent à mesure que l'on se déplace vers des abscisses de plus en plus grandes.
De même, sur la seconde figure, qui correspond à une fonction concave, on observe bien que les tangentes ont des coefficients directeurs qui diminuent à mesure que l'on avance sur l'axe des abscisses.

3.2.2 Notion de dérivée seconde et lien avec la convexité

Définition : Dérivée seconde

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit a un nombre de I.
Lorsque f' admet un nombre dérivé en a, on désignera ce nombre par $f''(a)$.
Si, pour tout x de I, $f''(x)$ existe alors on peut définir la fonction dérivée seconde de f *qui à tout nombre x de I, associe le nombre $f''(x)$. On note f'' la fonction dérivée seconde de f.*

Exercice 2

Déterminer les dérivées secondes des fonctions suivantes.

Pour tout nombre x,	$f_1(x) = x - 5$
Pour tout nombre x,	$f_2(x) = 3x^2 + 4x - 12$
Pour tout nombre $x \neq 0$,	$f_3(x) = \dfrac{1}{x}$
Pour tout nombre x,	$f_4(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 5$

Proposition : Convexité et signe de f''
Soit f une fonction définie et dérivable deux fois sur un intervalle I.
f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I.
f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I.

✎ ***Exercice 3***

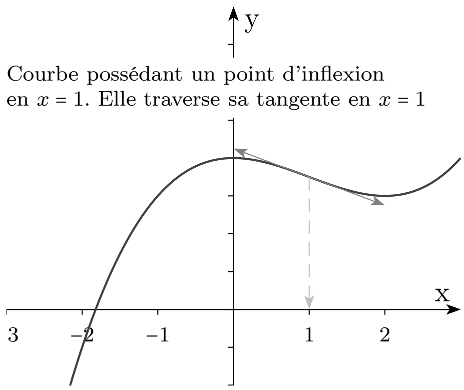
Prouver que la fonction carré, *qui à tout nombre x associe x^2, est convexe.*
On pourra poser, pour tout x, $c(x) = x^2$ et déterminer l'expression de $c''(x)$.

✎ ***Exercice 4***

Prouver que la fonction cube, *qui à tout nombre x associe x^3, est concave sur $]-\infty;\ 0]$ et convexe sur $[0;\ +\infty[$.*
On pourra poser, pour tout x, $k(x) = x^3$, déterminer l'expression de $k''(x)$ puis étudier le signe de $k''(x)$ en fonction de x.

Enfin, on définit la notion de point d'inflexion.

Définition : Point d'inflexion
Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I et a un nombre de I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f tracée dans un repère $(O;\ I;\ J)$.
On dit que $\mathcal{C}_f$ possède un point d'inflexion en a lorsque $\mathcal{C}_f$ « traverse » sa tangente au point d'abscisse a.



Un point d'inflexion correspond à un lieu de changement de courbure. Sur l'illustration précédente, avant l'abscisse $x = 1$ la courbe est concave et au delà de $x = 1$ elle devient convexe.

On peut repérer un point d'inflexion en analysant le signe de la dérivée seconde.

Proposition : Point d'inflexion et dérivée seconde
Soit une fonction f définie et dérivable deux fois sur un intervalle I et a un nombre de I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f tracée dans un repère $(O;\ I;\ J)$.
Si $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = a$ alors $\mathcal{C}_f$ possède un point d'inflexion en a.

✎ Exercice 5

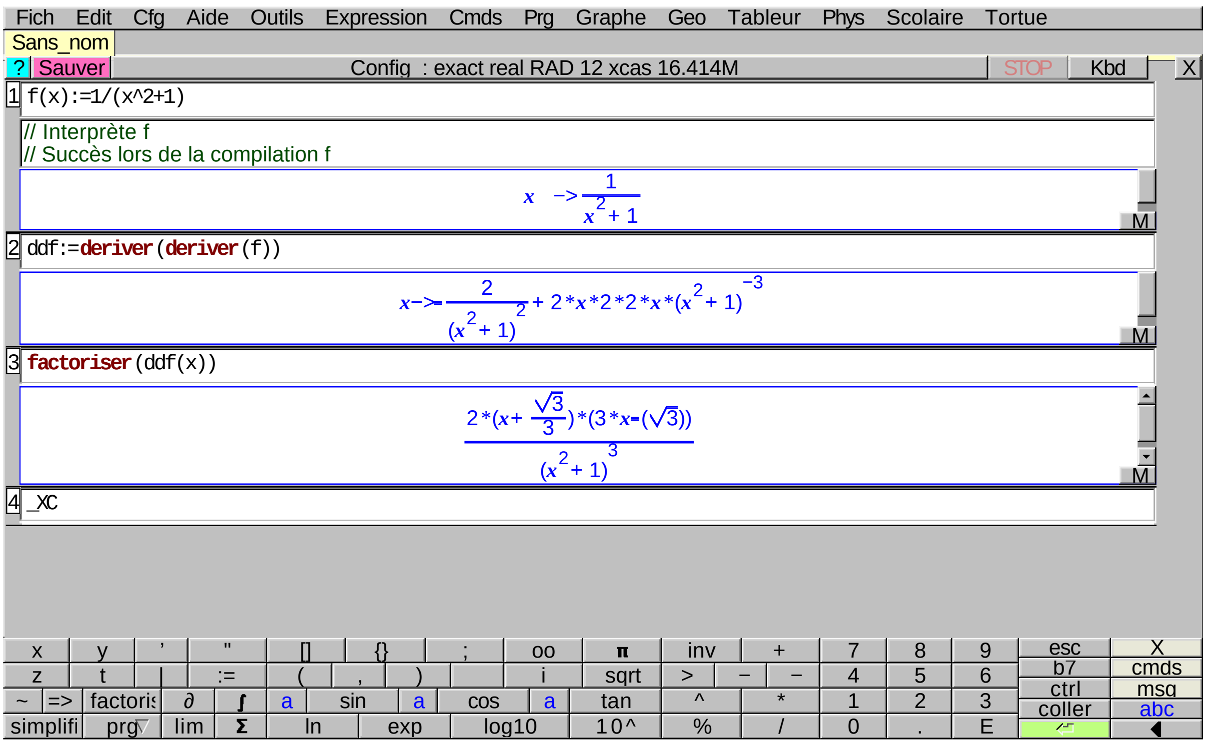
Soit la fonction f définie pour tout x par $f(x) = 0,1x^3 + 0,3x^2 + 0,5x - 3$.

1. *En traçant la courbe de f sur $[-3;\ 3]$ à l'écran de la calculatrice, dire si, sur l'intervalle $[-3;\ 3]$, la fonction est convexe, concave ou bien change de convexité.*
2. *Toujours en utilisant la lecture à l'écran de la calculatrice, déterminer les coordonnées approximatives du point d'inflexion puis compléter la phrase suivante :*
   Entre $x = -3$ et $x =$ .... , la courbe de f est courbée vers le .... donc la fonction est .... sur l'intervalle $[-3;$ ....$]$.
   Puis, entre $x =$ .... et $x = 3$, la courbe de f est courbée vers le .... donc la fonction est .... sur l'intervalle $[$.........$;\ 3]$.
   La courbe possède un point d'inflexion en $x =$ ....
3. (a) *Déterminer, pour tout x, l'expression de $f''(x)$.*
   (b) *En déduire le tableau de signes de f''.*
   (c) *Déterminer les coordonnées exactes du point d'inflexion de la courbe de f. Vérifier que le résultat est proche de la conjecture réalisée à l'aide de la calculatrice.*

✎ Exercice 6

On souhaite étudier la convexité de la fonction g qui, à tout nombre x, associe $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

1. *Tracer la courbe de cette fonction pour des abscisses comprises entre -10 et 10. Conjecturer le nombre de points d'inflexion.*
2. *La copie d'écran suivante provient du logiciel* `XCas` *:*



   (a) *Quelle est l'expression factorisée de $g''(x)$?*
   (b) *Étudier le signe de g'' puis en déduire la convexité de g.*
   (c) *Préciser le nombre de points d'inflexion ainsi que leurs abscisses.*

3.2.3 Convexité et opérations

Proposition : Opérations sur les fonctions convexes

Soient f et g deux fonctions convexes. Soit λ un nombre non nul.
Alors :

- $f + g$ *est une fonction convexe*
- λf *est une fonction* $\begin{cases} \textit{convexe si } \lambda > 0 \\ \textit{concave si } \lambda < 0 \end{cases}$

Il existe une seconde version de cette proposition que l'on peut réécrire en échangeant les mots *convexe* et *concave*.

Chapitre 4

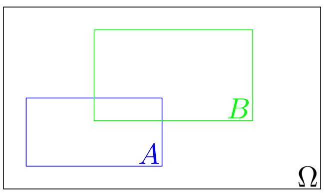
Probabilités conditionnelles

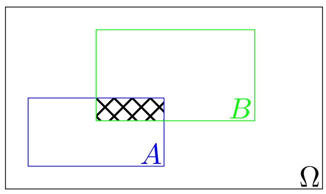
4.1 Rappels

4.1.1 Opérations sur les évènements

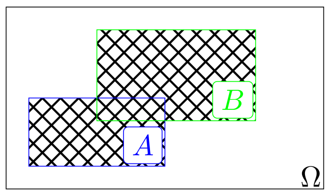
Définition : Opérations sur les évènements

Soient A et B deux évènements.
La réunion *de A et B est l'évènement noté $A \cup B$, formé des issues appartenant à A ou à B.*
*L'*intersection *de A et B est l'évènement noté $A \cap B$, formé des issues appartenant à A et à B.*
Le contraire *de A est l'évènement noté $\overline{A}$, formé des issues n'appartenant pas à A.*





$A \cap B$



$A \cup B$

Proposition : Probabilité de la réunion et du contraire

Soient A et B deux évènements. On a :

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \text{ et } \boxed{P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)}$$

Deux exercices pour s'entraîner.

Exercice 0

Vous vous apprêtez à découvrir votre cadeau d'anniversaire. On considère les évènements suivants de cette expérience aléatoire :

E : *mon cadeau est un vélo*
F : *mon cadeau est rouge*

On suppose que $P(E) = 0,12$ et $P(F) = 0,14$ et $P(E \cap F) = 0,06$.

1. *Décrire chacun des évènements suivants par une phrase : $\overline{F}, E \cap F, E \cup \overline{F}$.*
2. *Déterminer la probabilité que mon cadeau soit un vélo ou soit rouge.*
3. *En déduire la probabilité que ce cadeau ne soit ni un vélo, ni de couleur rouge.*

Exercice 1

On cherche à évaluer un test de dépistage d'une maladie infectieuse.

On procède à l'évaluation sur une population de 5000 *individus parmi lesquels on compte* 800 *malades avérés.*

On soumet les individus au test de dépistage. Les résultats sont résumés dans le tableau à double entrée suivant

		MALADE		
		OUI	*NON*	*TOTAL*
RÉSULTAT DU TEST	*POSITIF*	*793*	*12*	
	NEGATIF			
	TOTAL	*800*		*5000*

1. *Compléter les cases du tableau.*
2. *On choisit au hasard un individu dans la population de référence. Quelle est la probabilité*
   (a) *qu'il soit malade et testé positivement ?*
   (b) *qu'il soit sain et testé positivement ?*

4.1.2 Comment lire un arbre ?

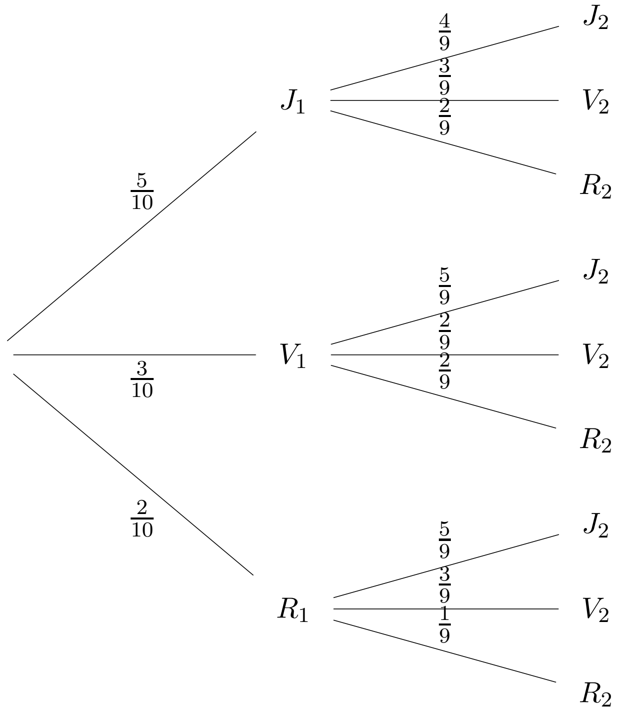
On considère une urne qui contient les boules suivantes :

- 5 boules jaunes
- 3 boules vertes
- 2 boules rouges

On tire 2 boules **sans remise** et on s'intéresse à la couleur des 2 boules.

Pour modéliser la succession des deux tirages, on réalise un arbre qui se lit de la manière suivante :

1. Le premier niveau d'embranchement correspond au premier tirage, il y a donc trois branches correspondant aux trois issues du premier tirage : J_1, V_1 et R_1.
2. Le second niveau d'embranchement correspond à la combinaison du premier tirage et du second tirage. De chaque nœud du premier niveau partent 3 branches correspondant aux 3 issues du second tirage : J_2, V_2 et R_2
3. Les terminaisons de l'arbre correspond aux 9 issues possibles pour la combinaison des 2 tirages.
4. Enfin, on place au niveau de chaque branche la probabilité de l'issue.



Les principales propriétés d'un arbre concernent les probabilités :

— Partant d'un nœud, la somme des probabilités vaut 1.
  Par exemple, partant du nœud V_1, on a bien $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{9}{9}=1$.

— Pour obtenir la probabilité d'une terminaison de l'arbre, on multiplie les probabilités des branches conduisant à cette terminaison.
  Par exemple, la probabilité de $R_1 \cap J_2$ vaut $P\left(R_1 \cap J_2\right)=\frac{2}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{10}{90}$.

✎ ***Exercice 2***

Un questionnaire à choix multiple comporte 3 questions. Pour chaque question 4 choix sont proposés et seul l'un d'entre eux est correct.
Un candidat coche, à chaque question, l'un des choix au hasard. On supposera que chacun des choix bénéficie de la même probabilité.

1. *En précisant soigneusement l'hypothèse utilisée, donner la probabilité de répondre juste à une question en particulier.*
2. *Réaliser un arbre correspondant à la succession des 3 questions en ne considérant que les deux issues $\left\{J,\overline{J}\right\}$ où J signifie « le candidat a répondu juste ».*
3. *Donner la probabilité des évènements suivants :*
   (a) *Le candidat a eu 3 bonnes réponses.*
   (b) *Le candidat a eu 2 bonnes réponses.*
   (c) *Le candidat n'a eu aucune bonne réponse.*
   (d) *Le candidat a eu au moins une bonne réponse.*

✎ ***Exercice 3***

Dans un lycée en Californie, 80% des élèves jouent au golf.
Parmi les élèves qui jouent au golf, 75% possèdent leur propre terrain.
Parmi les élèves qui ne jouent pas au golf, 5% possèdent malgré tout un terrain de golf.
On choisit un élève au hasard. On note G l'évènement « cet élève joue au golf » et T l'évènement « cet élève possède un terrain de golf ».

1. *Faire un arbre qui résume la situation.*
2. (a) *Déterminer la probabilité de l'évènement $G \cap T$.*
   (b) *Déterminer la probabilité de l'évènement $\overline{G} \cap T$.*
3. *Remplir le tableau de contingence :*

	G	$\overline{G}$	*Total*
T			
$\overline{T}$			
Total	$0,8$		$1,0$

4.2 Probabilités conditionnelles

4.2.1 Définition à partir d'un arbre

La *probabilité conditionnelle* d'un évènement F, sachant un évènement E est la probabilité de F calculée à partir d'une situation où E est déjà réalisé. On la note $P_E(F)$.
Par exemple, la probabilité de choisir au hasard un élève à lunettes dans la classe *sachant que* l'élève est une fille est en fait la probabilité de choisir un élève à lunettes *parmi* les filles.

Quand on lit les probabilités dans un arbre, on lit en fait des probabilités conditionnelles. Si on reprend l'exemple développé précédemment, partant du nœud J_1, la probabilité d'obtenir J_2 est de $\frac{4}{9}$. C'est en fait la probabilité de J_2 *sachant* J_1. On a ainsi $P_{J_1}(J_2)=\frac{4}{9}$.

4.2.2 Définition par une formule

Définition : Probabilité conditionnelle

Soient E et F deux évènements avec $P(F) \neq 0$.
On définit la probabilité de F sachant E par :

$$\boxed{P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}} \text{ ce qui s'écrit aussi } \boxed{P(E \cap F) = P_E(F)\,P(E)}$$

4.2.3 Formule des probabilités totales

La formule des probabilités totales prend tout son sens dans le cas où l'expérience peut être représentée par un arbre.

Nous reprendrons donc l'exemple développé tout au long de ce formulaire.
Supposons que l'on veuille calculer la probabilité de J_2. En fait J_2 est réalisé par trois chemins dans l'arbre : $J_1 \cap J_2$, $V_1 \cap J_2$, $R_1 \cap J_2$. La probabilité de J_2 est donc :

$$\boxed{\begin{aligned} P(J_2) &= P(J_1 \cap J_2) + P(V_1 \cap J_2) + P(R_1 \cap J_2) \\ &= P(J_1) \times P_{J_1}(J_2) + P(V_1) \times P_{V_1}(J_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(J_2) \end{aligned}}$$

La formule encadrée plus haut s'appelle la formule des *probabilités totales*. Elle revient à faire la somme des chemins qui constituent un évènement.

On dit que J_1, V_1 et R_1 réalisent une partition de l'univers.
Une partition peut se définir comme un ensemble d'évènement incompatibles deux à deux et dont l'union forme l'univers tout entier. Ce terme n'est pas officiellement à votre programme cependant.

Exercice 4

Dans un lycée, en classe de terminale, 80% des élèves obtiennent le baccalauréat.
Parmi les admis, 43,75% sont des filles.
Parmi les recalés, 25% sont des filles.
On choisit un élève de terminale au hasard à l'issue du baccalauréat.
On note A l'évènement « l'élève est admis » et F l'évènement « c'est une fille ».

1. *Décrire avec une phrase les évènements $\overline{A} \cap F$, $A \cup \overline{F}$.*
2. *Par simple lecture de l'énoncé, déterminer $P(A)$, $P\left(\overline{A}\right)$, $P_A(F)$, $P_{\overline{A}}(F)$.*
3. *En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer $P(F)$ puis en déduire $P\left(\overline{F}\right)$.*
4. *Déterminer $P_F(A)$ et $P_{\overline{F}}(A)$. En déduire qui des garçons ou des filles a le mieux réussi le baccalauréat.*

Exercice 5

On reprend les données de l'exercice 1 concernant le test de dépistage.
On choisit au hasard un individu dans la population de référence. On note M l'évènement « cette personne est malade » et T l'évènement « cette personne est testée positivement »
On s'intéresse aux deux types d'erreur dans un tel test :

1. *Déterminer $P_M\left(\overline{T}\right)$.*
2. *Déterminer $P_{\overline{M}}(T)$.*

4.3 Loi binomiale

4.3.1 Comment reconnaître une variable qui suit une loi binomiale ?

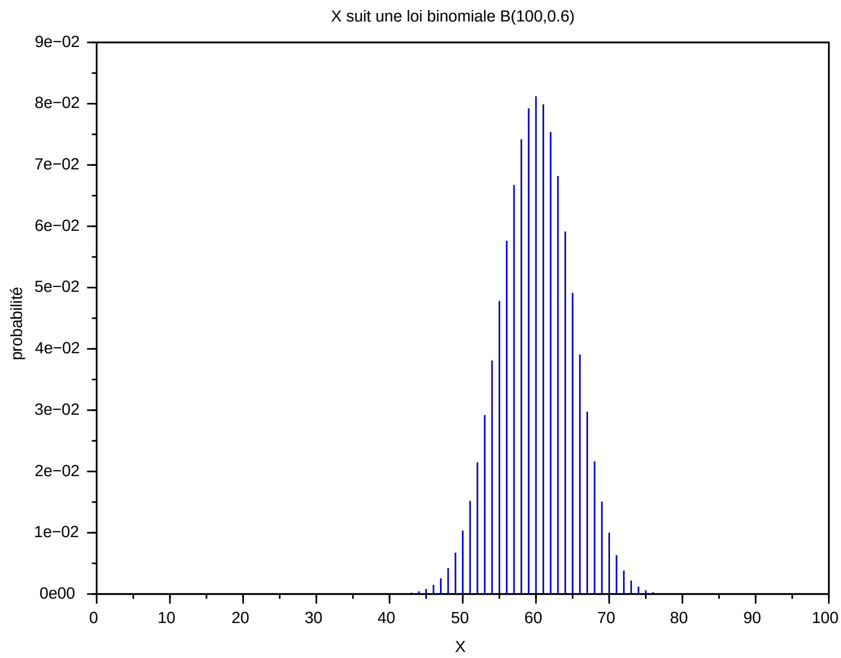
Il est important de savoir détecter les cas où l'on peut appliquer les résultats concernant la loi binomiale.

On définit ainsi une *épreuve de Bernoulli* de paramètre p comme étant une expérience à deux issues, l'une étant par convention appelée *succès* et l'autre *échec*. p correspond à la probabilité de succès.
Par exemple le lancer d'une pièce est une épreuve de Bernoulli.

Dans un second temps, on définit un *schéma de Bernoulli* de paramètres n, p comme une succession indépendante de n épreuves de Bernoulli. Le critère d'indépendance est vérifié lorsque la probabilité de succès lors de l'une des épreuves ne dépend pas de ce qu'il s'est produit avant.

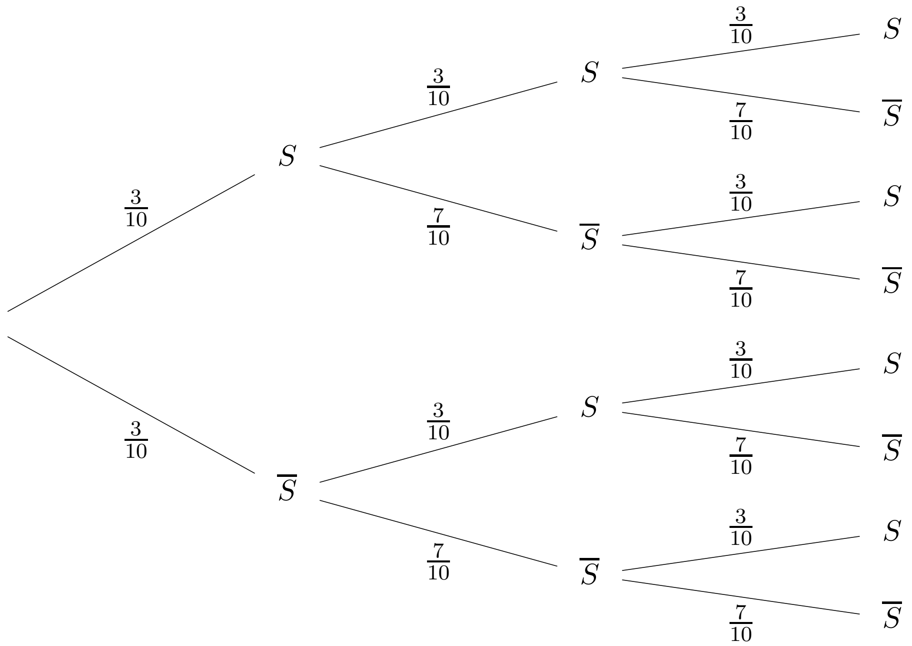
Sous ces conditions, on dira que la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n, p suit une *loi binomiale* de paramètres n, p. On le notera $\boxed{X \sim \mathcal{B}(n;\ p)}$; le symbole ~ signifiant « suit une loi » et le symbole $\mathcal{B}(n;\ p)$ signifiant « binomiale de paramètres n, p. »
Par exemple, le nombre de piles obtenus lors de 100 lancers d'une pièce équilibrée suit une loi binomiale de paramètres $100\,;\ 0,5$.

Sur le graphique plus bas, on a représenté les probabilités des différentes valeurs de X, pour X qui suit une loi binomiale de paramètres 100, $0,6$.



Quand le nombre de répétitions n'est pas trop élevé, on peut représenter l'expérience avec un arbre.

Par exemple, considérons l'expérience suivante :
On tire avec remise 3 boules dans une urne qui contient 3 boules noires pour 10 boules en tout et on s'intéresse au nombre X de fois où l'on a obtenu une boule noire. On peut représenter cette expérience avec l'arbre ci-après.



Dans le cas d'une série de tirages dans une urne, il y a indépendance des tirages si l'on remet la boule tirée à chaque fois.

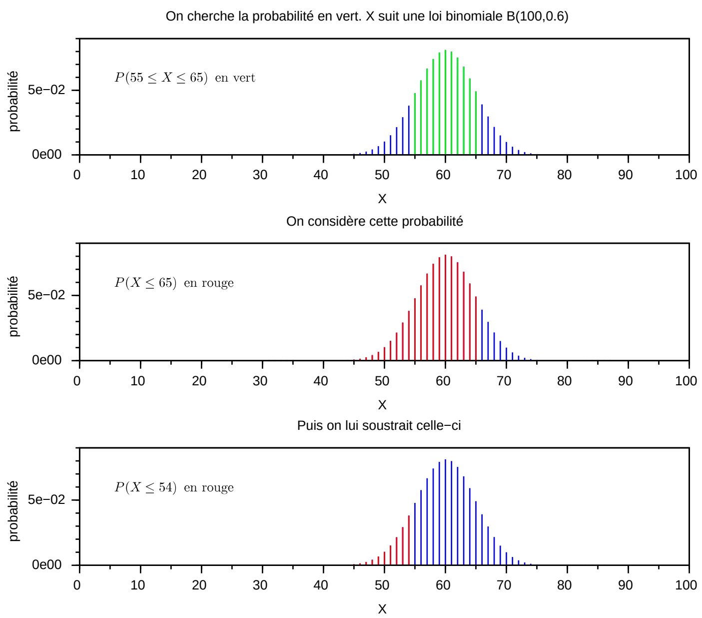
4.3.2 Utilisation de la calculatrice

Dans le cas où X suit une loi binomiale, on utilisera la calculatrice pour déterminer les probabilités de X.

Pour obtenir $P(X = 4)$ avec X qui suit une loi binomiale pour 15 répétitions et avec une probabilité de succès de 0,6, on tape :
`binomFdp(15,0.6,4)` . On obtient `binomFdp` dans le menu `2nde` `var` puis `DISTRIB` et enfin `A:` `binomFdp`.
Pour obtenir $P(X \leq 6)$ avec X qui suit une loi binomiale pour 20 répétitions et avec une probabilité de succès de 0,5, on tape :
`binomFRép(20,0.5,6)` .

En pratique, on peut être amené à déterminer des probabilités d'appartenance à un intervalle. Dans ce cas, on se ramènera toujours à des calculs portant sur la fonction de répartition.

Supposons par exemple que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,6$ et que l'on veut calculer la probabilité $P(55 \leq X \leq 65)$. On procède par soustraction d'aires.



Ce raisonnement graphique nous permet d'en déduire que :
$P(55 \leq X \leq 65) = P(\leq 65) - P(\leq 54)$.

> Pour obtenir $P(55 \leq X \leq 65)$ avec X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,6$, on tape :
> `binomFRép(100,0.6,65) - binomFRép(100,0.6,54)` .

Exercice 6

On tire 100 fois à pile ou face et on note X le nombre de piles obtenus.

1. *Pourquoi peut-on dire que X suit une loi binomiale ? Préciser les valeurs des deux paramètres de cette loi.*
2. (a) *À l'aide de la calculatrice, déterminer $P(X \leq 60)$ puis $P(X \leq 39)$.*
   (b) *En déduire $P(40 \leq X \leq 60)$. Traduire en français cette probabilité.*

4.3.3 Espérance de la loi binomiale

On reprend les mêmes hypothèses et on suppose que X suit une loi binomiale de paramètres n, p.
On appelle espérance de X le nombre

$$\boxed{E(X) = np}$$

> L'espérance représente la valeur moyenne de X si on refait un grand nombre de fois l'expérience.

Reprenons l'expérience de l'urne contenant 3 boules noires pour 10 boules. Si on applique la formule, on obtient $E(X) = 3 \times \dfrac{3}{10} = 0,9$.
Cela signifie qu'on obtient en moyenne $0,9$ boules noires si on en pioche 3 avec remise un grand nombre de fois.

Exercice 7

Une urne contient 4 boules noires et 9 boules blanches. On propose le jeu suivant :

- *Le joueur procède à 5 tirages avec remise.*
- *Il gagne 10 € par boule noire obtenue et perd 1,2 € par boule blanche obtenue.*
  Par exemple, s'il a obtenu 2 boules noires sur la partie, il a gagné
  $2 \times 10 - 3 \times 1,2 = 16,4$ €.

On note N le nombre de boules noires obtenues sur une partie.

1. *Quelle est la loi suivie par N ?*
2. *Déterminer l'espérance de N.*
3. ♣ *En déduire le gain moyen par partie.*

Chapitre 5

Fonctions exponentielles

5.1 Rappels sur les puissances étudiées au collège, exponentielle base a

5.1.1 Calculs sur les puissances

Définition : Puissance entière d'un nombre

Soit a un nombre réel et n un nombre entier naturel (positif), on définit « a puissance n » par :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

Dans tout ce cours, il est important de retenir la définition simple de la puissance afin de pouvoir retrouver facilement les formules exposées plus loin.

Exercice 0

Dans tout cet exercice, a et b désignent des nombres réels non nuls et n est un entier.
Simplifier, lorsque c'est possible les nombres suivants :

$$A = a^3 \times a^4$$
$$B = a^2 + a^3$$
$$C = a^5 \times b^5$$
$$D = a^{10} \times b^{12}$$
$$E = \frac{a^{10}}{a^7}$$
$$F = \frac{a^{10}}{b^{10}}$$

Définition : Puissances de 0, d'entiers négatifs, de fractions

Soit a un nombre réel positif et n un nombre entier naturel (positif).
On pose, par convention, $a^0 = 1$.
On note $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. On a ainsi $a^n \times a^{-n} = a^n \times \dfrac{1}{a^n} = 1$.
On appelle racine n-ième de a le nombre $a^{1/n}$. C'est l'unique nombre positif qui vérifie $\left(a^{1/n}\right)^n = a$.

(Exemple 0) La racine carrée de a est ainsi le nombre $a^{1/2}$.

À la calculatrice, on obtient la puissance d'un nombre à l'aide de $\boxed{\hat{}}$. Par exemple, la commande `2^3` renvoie 2^3, soit 8. Il faut être très vigilant avec les parenthèses. Si l'on souhaite calculer $2^{1/3}$, il faut taper `2^(1/3)`. En effet la commande `2^1/3` renvoie $\dfrac{2^1}{3}$ en raison des priorités des opérations.

Exercice 1

a et b désignent deux nombres strictement positifs.
Simplifier, lorsque c'est possible les nombres suivants :

$$G = \left(a^5\right)^3$$
$$H = \left(\sqrt{a}\right)^8$$
$$I = \left(\frac{1}{a}\right)^{-3}$$
$$J = \left(a^{-3}\right)^2$$
$$K = a^{-3} \times b^{-3}$$
$$L = a^{-3} \times a^7$$

5.1.2 Fonction exponentielle base a : définitions et premières propriétés

Définition : Fonction exponentielle base a

Soit $a > 0$ un nombre. On admettra qu'il existe une fonction f telle que pour tout nombre x, $f(x) = a^x$.
On dira que f est la fonction exponentielle base *a.*

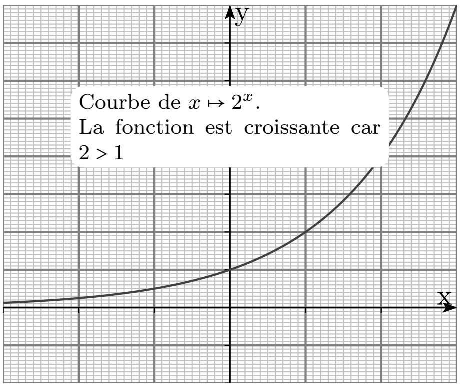
Cette fonction « prolonge » la notion de puissance aux nombres réels en ce sens que a^2 désigne vraiment $a \times a$ et que a^{-3} correspond exactement à $\dfrac{1}{a \times a \times a}$.
On admettra ainsi que l'on peut également manipuler $a^{1,2}$ ou bien $a^{\sqrt{2}}$.

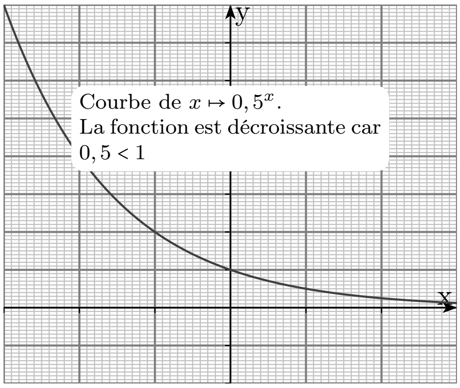
Proposition : Sens de variation et signe de l'exponentielle base a

Soit a un nombre strictement positif.
La fonction exponentielle base a est
- *strictement croissante lorsque $a > 1$*
- *strictement décroissante lorsque $0 < a < 1$*
- *constante lorsque $a = 1$*

Par ailleurs, pour tout nombre a strictement positif et pour tout nombre x, $a^x > 0$.
Dit autrement, la fonction exponentielle base a prend des valeurs strictement positives.

La règle qui s'applique ici est la même que pour les suites géométriques à termes positifs : c'est la position de la raison par rapport à 1 qui nous donne le sens de variation de la suite.





✎ *Exercice 2*

En utilisant ce qui précède, comparer, lorsque c'est possible, les nombres suivants sans utiliser la calculatrice :

a) 12^4 *et* $12^{-0,5}$.
b) $1,2^{0,5}$ *et* $1,2^{-1}$.
c) $0,8^{0,5}$ *et* $0,8^{-1}$.
d) 12^4 *et* $12^{-0,5}$.
e) $-3 \times 1,2^3$ *et* $-3 \times 1,2^{2,8}$
f) $\sqrt{1,2^3}$ *et* $\sqrt{1,2^{2,8}}$

Proposition : Opérations sur les exponentiels

Soient a et b deux nombres strictement positifs. Soient x et y deux nombres réels. On a :

$$a^x a^y = a^{x+y}$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$
$$(a^x)^y = a^{xy}$$
$$a^x b^x = (ab)^x$$
$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

✎ *Exercice 3*

a et b désignent deux nombres strictement positifs.
x et y sont deux nombres quelconques.

1. *Simplifier :*

$$A = a^x \times b^x$$
$$B = \left(\frac{1}{a^{-x}}\right)^2$$
$$C = a^x \times a^{-x}$$
$$D = a^x \times a^{-2x} \times (a^x)^2$$
$$E = \frac{a^x \times a^y}{a^{-2y}}$$
$$F = \frac{a^x + a^x}{3a^y}$$

2. *Développer*

$$G = a^x \left(a^{2x} + 2a^{-x}\right)$$
$$H = (a^x + b^x)^2$$
$$I = a^x \left(a^{2x} + b^x\right)$$
$$J = a^x \left(a^x + a^y\right)$$
$$K = \frac{a^x + a^y}{a^{-2y}}$$
$$L = \frac{a^{2x} + a^x}{3a^{-x}}$$

Proposition : Convexité de la fonction exponentielle base a
Pour tout nombre $a > 0$ la fonction exponentielle base a est convexe sur $\mathbb{R}$.

5.2 Fonction exponentielle

La fonction exponentielle « tout court » est un cas particulier de fonction exponentielle base a.
On admettra que, pour tout $a > 0$ la fonction exponentielle base a est dérivable sur $\mathbb{R}$ afin de pouvoir énoncer la proposition / définition suivante.

Proposition : Définition et propriété fondamentale de la fonction exponentielle
Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
De plus, la fonction f ainsi définie est en fait une fonction exponentielle base e avec $\mathrm{e} \simeq 2,72$.
Ainsi, pour tout x, on notera e^x l'image de x par cette fonction.

On obtient la valeur approchée de e^3 en tapant `e^(3)` à la calculatrice.
`e^(` s'obtient à l'aide de `2nde` `ln`. Ainsi, pour obtenir la valeur approchée de e^3 la séquence de touche est `2nde` `ln` `3` `)`.

Corollaire : Signe, sens de variation et convexité de la fonction exponentielle
La fonction exponentielle est strictement positive, strictement croissante et convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit la fonction f qui à tout x associe $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

1. *Déterminer pour tout x l'expression de $f'(x)$ puis celle de $f''(x)$.*
2. *On cherche à déterminer le tableau de signes de f'.*
   a) *Quel est, pour tout x, le signe de $f''(x)$? En déduire le sens de variation de f'.*
   b) *Résoudre $f'(x) = 0$.*
   c) *Déduire des deux réponses précédentes le tableau de signes de f'.*
3. *Donner des valeurs approchées à deux décimales de $f(-2)$ et $f(5)$.*
4. *Dresser sur l'intervalle $[-2;\ 5]$ le tableau de variations de f.*
5. a) *Montrer que 2 admet deux antécédents par f sur $[-2;\ 5]$.*
   b) *Donner une approximation à deux décimales de l'antécédent positif de 2.*

Proposition : Dérivée d'une fonction $\mathrm{e}^{\mathrm{u(x)}}$
Soit une fonction u définie et dérivable sur un intervalle I.
On considère la fonction g définie pour tout x de I par $g(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$.
Alors la fonction g a pour dérivée $g'(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$.

✎ *Exercice 5*

Dériver les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{llcl}
\text{Pour tout } x, & f(x) & = & \mathrm{e}^{3x-4} \\
\text{Pour tout } x, & g(x) & = & \mathrm{e}^{x^2} \\
\text{Pour tout } x, & h(x) & = & x\mathrm{e}^{x} \\
\text{Pour tout } x, & s(x) & = & x\mathrm{e}^{2x} \\
\text{Pour tout } x, & t(x) & = & \dfrac{\mathrm{e}^{2x-4}}{x^1+1}
\end{array}$$

✎ *Exercice 6*

Soit la fonction f définie pour tout x par $f(x) = (2x-5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20$.

1. a) *Déterminer la dérivée de la fonction $x \mapsto 2x-5$*
   b) *Déterminer la dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x+4}$*
   c) *En utilisant la formule de la dérivée d'un produit, en déduire que $f'(x) = (-2x+7)\mathrm{e}^{-x+4}$.*
2. *Étudier le signe de f' sur $[0;\ 10]$ puis en déduire le tableau de variations de f sur ce même intervalle. On arrondira les valeurs au millième.*
3. *Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0;\ 10]$. On déterminera un encadrement de α avec une précision de $0,01$.*
4. *Finalement, dresser le tableau de signes de f.*

✎ *Exercice 7*

Soit la fonction f définie sur $[-4;\ 3]$ par $f(x) = -2 + (x+4)\mathrm{e}^{-x}$.

1. *Justifier que, pour tout x de $[-4;\ 3]$, $f'(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$. En déduire le tableau de variations de f sur $[-4;\ 3]$.*
2. *Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α_1 et α_2 sur $[-4;\ 3]$ puis donner les valeurs approchées par défaut à la deuxième décimale de α_1 et α_2.*
3. *En déduire le tableau de signes de f.*

Chapitre 6

Intégration

6.1 Primitives

6.1.1 Définition

Définition : Primitive d'une fonction continue
Soit une fonction f continue, définie sur un intervalle J.
Alors il existe au moins une fonction F telle que, pour tout x de J, $F'(x) = f(x)$. On dit que F est une primitive *de f.*

Déterminer une primitive d'une fonction est l'opération réciproque de la dérivation. En pratique, pour calculer des primitives, il faut donc utiliser le formulaire de dérivation.

On peut chercher dans certains cas particuliers des primitives de fonctions.

Exercice 0

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction (définie sur $\mathbb{R}$).

a) $f : x \mapsto 1$

b) $g : x \mapsto 2x$

c) $h : x \mapsto \mathrm{e}^x$

6.1.2 Premières propriétés

On parle d'une primitive d'une fonction. En effet, pour une fonction donnée, il existe une infinité de primitives comme le prouve la proposition plus bas.

Proposition : Les primitives sont définies à une constante près
Soit f une fonction continue, définie sur un intervalle I et soit F une primitive de f.
$\tilde{F}$ désigne enfin une fonction définie sur I. Alors :

$\tilde{F}$ est une primitive de f si et seulement si $\tilde{F} - F$ est constante sur I.

En particulier, toutes les fonctions de la forme $F + k$ où k est une constante sont des primitives de f.

Proposition : Linéarité de la primitive
Soient f et g deux fonctions continues, définies sur un intervalle I. Soit λ un nombre fixé.
Soient F et G des primitives de f et g.
Alors la fonction $F + G$ est une primitive de $f + g$ et la fonction λF est une primitive de λf.

En pratique, cela signifie qu'on peut appliquer les mêmes règles que pour la dérivation concernant les produits par une constante et les sommes de fonctions.

6.1.3 Calculs de primitives

Pour calculer des primitives, il faut connaître parfaitement ses formules de dérivation.

Exercice 1

Soit la fonction f qui à tout x associe $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
Prouver que la fonction F qui, à tout x, associe $F(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ est une primitive de f.

Exercice 2

Soit la fonction g qui à tout x associe $g(x) = x^2$.
Prouver que la fonction G qui, à tout x, associe $G(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ est une primitive de g.

Exercice 3

Cet exercice fait référence aux deux exercices précédents.
Soit la fonction h qui à tout x associe $h(x) = x\mathrm{e}^x + 6x^2$.

1. *Vérifier que, pour tout x, $h(x) = f(x) + 6g(x)$.*
2. *En déduire une primitive de h.*
   Indication: Utiliser les résultats des deux exercices précédents.

Exercice 4

Pour chacune des fonctions de la liste, sur son ensemble I de définition, déterminer une primitive.

a) $f : x \mapsto 1 + 2x + 3x^2$, $I = \mathbb{R}$

b) $g : x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$, $I = \mathbb{R}$
   Indication: Noter que $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right) \times 3\mathrm{e}^{3x}$

c) $h : x \mapsto x^n$, $I = \mathbb{R}$, *avec* $n \in \mathbb{N}^*$
   Indication: Noter que $h(x) = \left(\dfrac{1}{n+1}\right) \times (n+1)x^n$

d) $r : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I =]0;\ +\infty[$
   Indication: S'inspirer des deux indications précédentes !

e) $s : x \mapsto x^3 + x^2 - 1$

Finalement, pour déterminer des primitives de fonction, on pourra utiliser le petit formulaire ci-après.

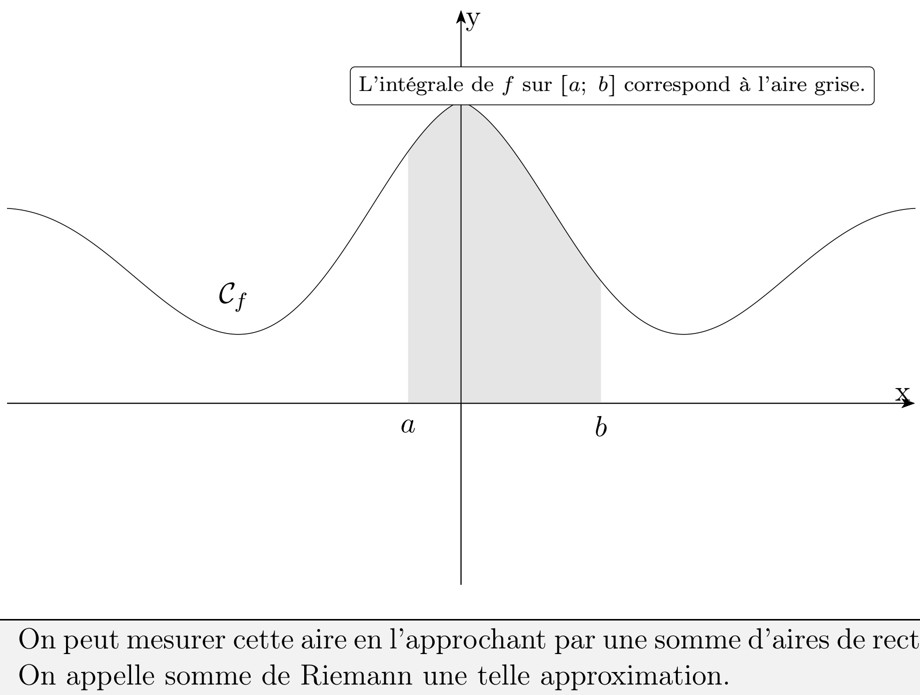
Proposition : Formulaire temporaire pour calculer des primitives
a désigne un nombre fixé ; n représente un entier ; u et v sont des fonctions définies et continues sur un intervalle I dont U et V sont des primitives.
On suppose enfin que u est dérivable sur I.

Domaine de définition	$f(x)$	$F(x)$
$\mathbb{R}$	a	ax
$\mathbb{R}$	x	$\dfrac{x^2}{2}$
$\mathbb{R}$	x^2	$\dfrac{x^3}{3}$
$\mathbb{R}$	x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
I	$a \times u(x)$	$a \times U(x)$
I	$u(x) + v(x)$	$U(x) + V(x)$
I	$u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)}$

6.2 Intégrale

6.2.1 Définition purement géométrique

On retiendra la définition « physique » car c'est la plus importante. L'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle $[a;\ b]$, c'est l'aire de la surface délimitée par la courbe de la fonction, l'axe et l'abscisse, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



On peut mesurer cette aire en l'approchant par une somme d'aires de rectangles.
On appelle somme de Riemann une telle approximation.
C'est par l'approximation de Riemann que l'on définit en théorie l'intégrale mais cela n'est pas au programme de terminale ES.

Définition : Intégrale d'une fonction entre a et b quand $a \leq b$

Soit $[a;\ b]$ un intervalle et f une fonction définie et continue sur $[a;\ b]$.
L'intégrale de f entre a et b correspond à l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$, la droite d'équation $x = b$ et la courbe de f avec les conventions de signe suivantes :

1. *Quand la fonction est positive, l'aire est comptabilisée positivement ;*
2. *dans le cas contraire, l'aire est comptabilisée négativement.*

On note $\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$ *ou parfois plus simplement* $\int_a^b f$ *ce nombre.*

Sous les mêmes hypothèses, on peut également définir l'intégrale entre b et a.

Définition : Intégrale d'une fonction entre b et a quand $a \leq b$

On reprend les hypothèses de la définition précédente. On définit $\int_b^a f$ *par*

$$\boxed{\int_b^a f = -\int_a^b f}$$

Exercice 5

En traçant les courbes des fonctions correspondantes dans un repère, déterminer :

a) $\int_0^1 1\,\mathrm{d}x$

b) $\int_1^0 1\,\mathrm{d}x$

c) $\int_0^1 -1\,\mathrm{d}x$

d) $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$

e) $\int_0^1 -x\,\mathrm{d}x$

f) $\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{d}x$

Indication: On rappelle que l'aire d'un triangle est $\dfrac{\textit{Base} \times \textit{Hauteur}}{2}$

La `TI` permet d'obtenir des valeurs d'intégrales.

Pour obtenir $\int_0^3 \left(x^3 - 2x\right)\mathrm{d}x$ à la calculatrice, il faut taper `intégrFonct(X^3-2*X,X,0,1)` . `intégrFonct` se trouve dans le menu `math` puis `Math` .

6.2.2 Calcul d'intégrales à l'aide de primitives

Le théorème qui suit n'est pas vraiment à retenir. En revanche, son corollaire lui doit être connu.

Théorème : Primitives définies par une intégrale, théorème fondamental de l'analyse

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I. Soit $a \in I$ un nombre.
On considère la fonction :

$$F: \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Alors F est la primitive de f qui s'annule en a.

En pratique, on utilisera plutôt le corollaire suivant pour calculer des intégrales.

Corollaire : Lien entre primitives et intégrales

Soit une fonction f continue sur un intervalle $[a;\ b]$ et soit F une primitive de f.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

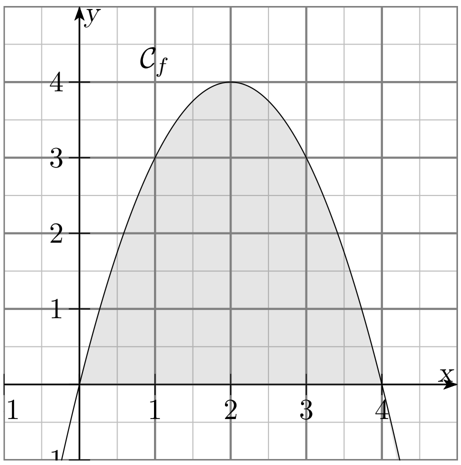
L'exercice qui suit donne une application de ce corollaire.

✎ ***Exercice 6***

Soit la fonction f définie pour tout x par $f(x) = -(x-2)^2 + 4$ dont on a tracé la courbe $\mathcal{C}_f$ plus bas. On s'intéresse à l'aire du domaine grisé, délimité par les droites d'équation $x = 0$, $x = 4$, l'axe des abscisses et $\mathcal{C}_f$.

1. *En comptant les carreaux, donner un encadrement de l'aire recherchée, à 0,25 près.*
2. *Montrer que, pour tout x, $f(x) = -x^2 + 4x$.*
3. (a) *En déduire qu'une primitive F de f est $F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 2x^2$*

   (b) *Finalement, calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. On pourra vérifier la validité de l'encadrement trouvé à la première question.*



6.2.3 Propriétés de l'intégrale

La propriété suivante s'appelle la *linéarité*. On la retrouve dans un grand nombre d'opérations mathématiques.

Proposition : Linéarité de l'intégration

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient a et b deux nombres de I et λ un réel quelconque. On a :

$$\boxed{\begin{aligned} \int_a^b (f+g) &= \int_a^b f + \int_a^b g \\ \int_a^b (\lambda f) &= \lambda \int_a^b f \end{aligned}}$$

L'égalité suivante s'appelle *relation de Chasles* et elle reflète la même idée que la relation de Chasles sur les vecteurs : « Si je vais de Paris à Toulouse puis de Toulouse à Francfort alors je suis parti de Paris et je suis arrivé à Francfort. »

Proposition : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a, b et c trois nombres de I. On a :

$$\boxed{\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f}$$

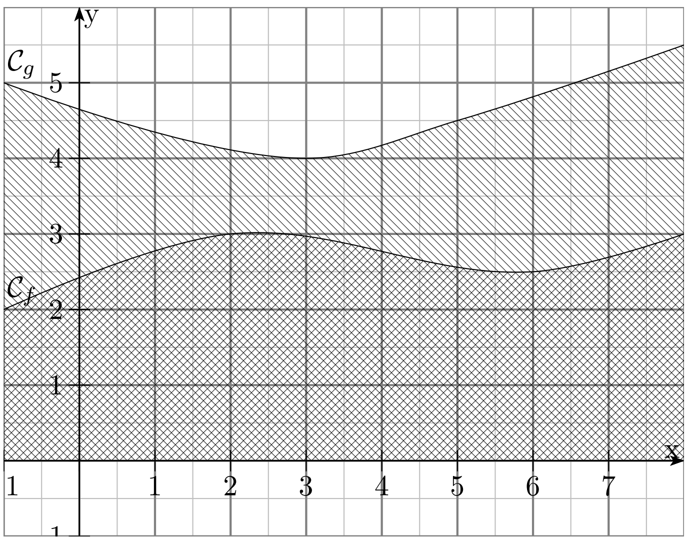
Enfin, cette dernière propriété s'appelle la *positivité*.

Proposition : Positivité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;\ b]$.

Si, pour tout x de $[a;\ b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

On illustre cette proposition.



En pratique cela signifie qu'on peut intégrer des inégalités entre fonctions. Cela sera très utile pour encadrer des intégrales. On peut également calculer l'aire délimitée par les deux courbes de fonctions par soustraction.

Définition : Aire comprise entre deux courbes

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;\ b]$.
On suppose que, pour tout x de $[a;\ b]$, $f(x) \leq g(x)$.
Alors l'aire délimitée par

- *la courbe de f ;*
- *la courbe de g ;*
- *les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$*

vaut

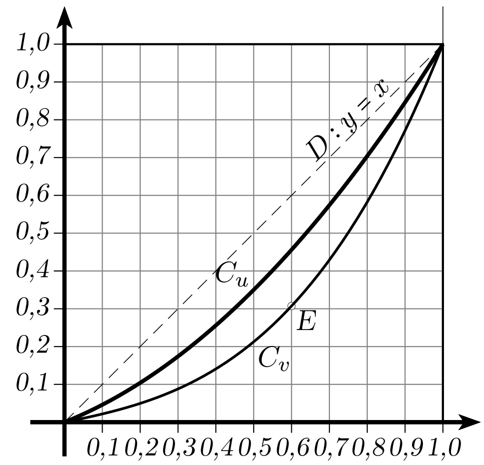
$$\boxed{\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x}$$

Une application sociologique de ce petit calcul concerne le coefficient de Gini [1]. Nous allons le traiter sous forme d'exercice tiré du baccalauréat.

Exercice 7

Un cabinet d'audit a été chargé d'étudier la répartition des salaires dans deux filiales d'une entreprise, appelées A et B. Pour l'étude, les salaires sont classés par ordre croissant.

Le cabinet d'audit a modélisé la répartition de salaires par la fonction u pour la filiale A et par la fonction v pour la filiale B.
Les fonctions u et v sont définies sur l'intervalle $[0;\ 1]$ par :
$u(x) = 0,6x^2 + 0,4x$ *et*
$v(x) = 0,7x^3 + 0,1x^2 + 0,2x$.
On a tracé ci-contre les courbes représentatives C_u et C_v des fonctions u et v.



Lorsque x représente un pourcentage de salariés, $u(x)$ et $v(x)$ représentent le pourcentage de la masse salariale que se partagent ces salariés dans leurs filiales respectives.
Par exemple, pour la courbe C_v, le point $E\,(0,60;\ 0,3072)$ signifie que 60 % des salariés ayant les plus bas salaires de l'entreprise B se partagent 30,72 % de la masse salariale.

1. *Calculer le pourcentage de la masse salariale que se répartissent les 50 % des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires.*
2. *Pour les 50 % des salariés ayant les plus bas salaires, laquelle des filiales, A ou B, distribue la plus grande part de la masse salariale ?*
3. *Quelle filiale parait avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire ?*
4. *Pour mesurer ces inégalités de salaires, on définit le coefficient de Gini associé à une fonction f modélisant la répartition des salaires par $c_f = 2\mathcal{D}_f$ où $\mathcal{D}_f$ est l'aire délimitée par la droite D d'équation $y = x$, la courbe de la fonction f et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1$.*

   (a) *Montrer que, pour tout x de $[0;\ 1]$, $x - u(x) = -0,6x^2 + 0,6x$.*

1. C'est un coefficient qui mesure de l'inégalité dans la répartition des revenus ou des salaires.

Soit la fonction d_u, définie tout x de $[0;\ 1]$ par $d_u(x) = -0,6x^2 + 0,6x$.

(b) *Calculer une primitive D_u de d_u.*

(c) *En déduire la valeur exacte du coefficient de Gini associé à la fonction u :*
$c_u = 2\int_0^1 d_u(x)\,\mathrm{d}x$

5. *Justifier graphiquement l'inégalité $c_u \leq c_v$.*

6.2.4 Valeur moyenne

On définit la valeur moyenne d'une fonction par un calcul d'intégrale.

Proposition : Valeur moyenne, Égalité de la moyenne

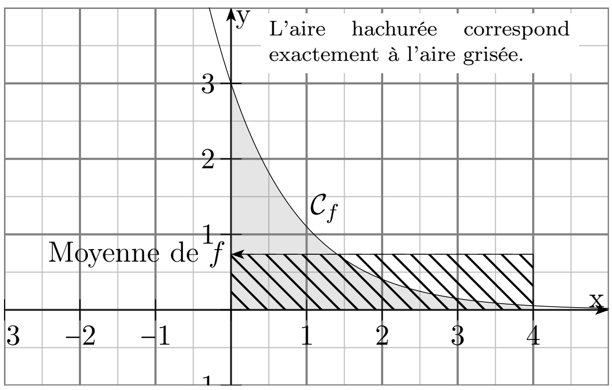
Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a;\ b]$ non réduit à un point.
La valeur moyenne *de f sur $[a;\ b]$ est le nombre :*

$$\boxed{\left(\frac{1}{b-a}\right)\int_a^b f}$$

De plus, il existe un nombre $x_0 \in [a;\ b]$ tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(x_0)$$

Une illustration de ce résultat.



L'exercice qui suit est tiré du baccalauréat.

Exercice 8

Une usine fabrique et commercialise des toboggans. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 300 et 1 300. On suppose que toute la production est commercialisée.
Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de toboggans est modélisé sur l'intervalle $[3;\ 13]$ par la fonction f définie par

$$f(x) = -2x + 20 - \mathrm{e}^{-2x+10}.$$

1. *Montrer que la fonction F définie sur $[3;\ 13]$ par $F(x) = -x^2 + 20x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x+10}$ est une primitive de f.*
2. *En déduire la valeur de $\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x$. Arrondir au millième.*
3. *Finalement, calculer le bénéfice moyen pour une production mensuelle comprise entre 300 et 1 300 toboggans. Arrondir le résultat à l'euro.*

Chapitre 7

Fonction logarithme

7.1 Définition du logarithme, équation fonctionnelle

7.1.1 Existence

Définition : Logarithme népérien

Soit $y > 0$ un nombre. On appelle logarithme népérien de y et on note $\ln(y)$ l'unique antécédent de y par exponentielle.
Plus généralement, $\ln$ *désignera la fonction suivante.*

$$\ln : \begin{array}{lll}]0;\ +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & x \quad / \, \mathrm{e}^x = y \end{array}$$

Par définition, pour tout $y > 0$, on a $\mathrm{e}^{\ln(y)} = y$. De même, pour tout x, $\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$.
Comme $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = \mathrm{e}$, on a les valeurs remarquables :

$$\begin{array}{lll} \ln(1) & = & 0 \\ \ln(\mathrm{e}) & = & 1 \end{array}$$

7.1.2 Équation fonctionnelle

Pour aborder cette partie, il faut se rafraîchir la mémoire sur la fonction exponentielle.

Exercice 0

Dans cet exercice, x et y désignent des nombres réels. n désigne un nombre entier.

Lorsque c'est possible, transformer les nombres pour les mettre sous la forme $a\mathrm{e}^b$ où a et b sont des réels.

$$A = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$$
$$B = 2\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$$
$$C = \frac{3}{\mathrm{e}^x}$$
$$D = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y}$$
$$E = \left(\mathrm{e}^x\right)^n$$

On a établi précédemment qu'exponentielle « transforme des sommes en produits ». On peut en déduire tout naturellement que le logarithme transforme les produits en sommes.

Proposition : Équation fonctionnelle du logarithme

Soient a et b deux réels strictement positifs et n un entier :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \ln(ab) & = & \ln(a)+\ln(b) \\ \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) & = & -\ln(a) \\ \ln\left(a^n\right) & = & n\ln(a) \end{array}}$$

✎ ***Exercice 1***

Lorsque c'est possible, mettre les expressions suivantes sous la forme $a\ln(b)$ où a et b sont des nombres entiers.

$$\begin{aligned} A &= \ln(2)\ln(3) \\ B &= \ln(2^3) \\ C &= \ln(2)+\ln(3) \\ D &= \ln\left(\frac{1}{3^n}\right) \qquad (\textit{avec } n \textit{ entier}) \\ E &= \ln(3)+n\ln(3) \qquad (\textit{avec } n \textit{ entier}) \end{aligned}$$

✎ ***Exercice 2***

En utilisant éventuellement les équations fonctionnelles des fonctions logarithme et exponentielle, résoudre les équations suivantes en donnant les solutions sous forme exacte et de manière approchée à 10^{-3} près.

a) $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{e^{3x}} = \dfrac{1}{2}$

c) $\ln(x)+\ln(3)=5$

d) $\mathrm{e}^{x^2}=4$

e) $\ln(x^2)-\ln(x)=-5$

f) ♣ *Donner une approximation à 10^{-2} des solutions de* $\mathrm{e}^x = x+2$.

7.2 Propriétés du logarithme

7.2.1 Sens de variation

Proposition : Sens de variation

La fonction logarithme est strictement croissante sur son ensemble de définition.

✎ ***Exercice 3***

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\ln(x) - \ln(2) \leq 4$

b) $4e^x < 3$

c) $4e^x < -3$

d) $e^x + e^{2x} \geq 3$

e) $\dfrac{e^x}{e^x + e^{2x}} \geq 3$

f) $e^{x^2+2x} > 4$

7.2.2 Continuité et dérivation

Proposition : Continuité

La fonction logarithme est continue sur son ensemble de définition.

Proposition : Dérivée de la fonction logarithme

La fonction logarithme est dérivable et pour tout $x > 0$ on a

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

✎ ***Exercice 4***

1. *Dériver les fonctions suivantes, définies sur $]0;\ +\infty[$*
   a) *Pour tout $x > 0$, $f(x) = \ln(x) + e^{3x}$.*
   b) *Pour tout $x > 0$, $g(x) = \ln(x^2)$.*
   c) *Pour tout $x > 0$, $h(x) = \ln(3x)$.*
   d) *Pour tout $x > 0$, $p(x) = x\ln(x)$.*
   e) *Pour tout $x > 0$, $q(x) = (x^2 - 1)\ln(x)$.*
   f) *Pour tout $x > 0$, $r(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.*
2. *Après avoir étudié le signe de leurs dérivées, dresser les tableaux de variations des fonctions p, q et r sur $]0;\ +\infty[$.*

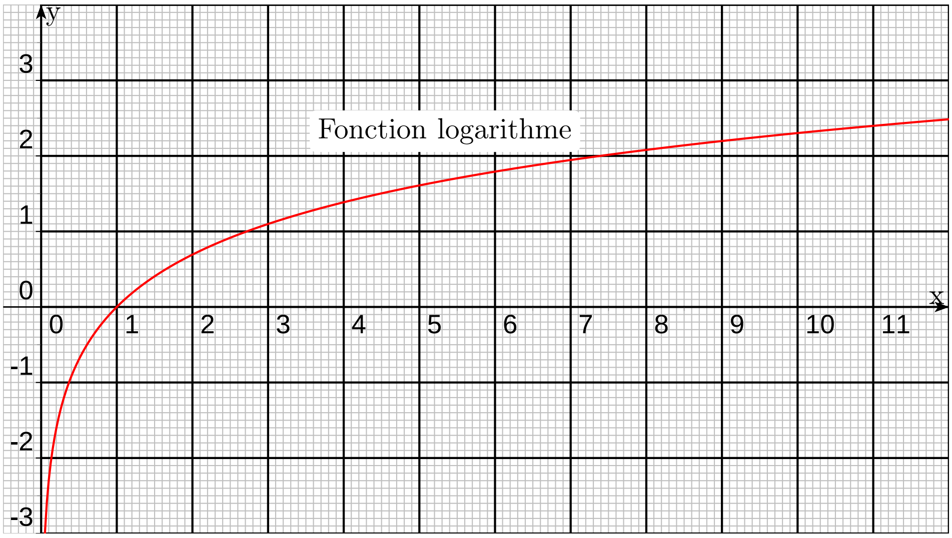
✎ ***Exercice 5***

On note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction logarithme. On cherche à étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à l'une de ses tangentes.

On fixe $a > 0$ un nombre et T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.
On note f_a la fonction dont T_a est la courbe représentative.

1. *Pour tout $x > 0$ déterminer $f_a(x)$.*
2. *Étudier le sens de variation de la fonction*
   $\Delta_a(x) = f_a(x) - \ln(x)$. Conclure quant à la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T_a.

7.2.3 Courbe de la fonction logarithme



Chapitre 8

Lois à densité

8.1 Généralités sur les lois à densité, la loi uniforme

8.1.1 Quelques exercices de révision

Pour bien comprendre les notions abordées ici, il est important de réviser le chapitre sur les probabilités conditionnelles, page 25. Les exercices suivants permettent de faire le point sur les connaissances.

Exercice 0

Un texte contient 15 *erreurs. Lors d'une relecture, on considère que chaque erreur a* 80% *de chances d'être corrigée.*

1. *En expliquant votre démarche, déterminer la probabilité qu'il reste deux erreurs ou moins après la première relecture.*
2. ♣ *Déterminer également la probabilité qu'il reste deux erreurs ou moins après la seconde relecture.*

Exercice 1

À chaque tir, un archer atteint sa cible avec une probabilité égale à $0,4$*, indépendante des tirs précédents.*

1. *On suppose que l'archer a tiré dix fois.*
   (a) *Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne sa cible deux fois ou moins.*
   (b) *En déduire la probabilité pour qu'il atteigne sa cible au moins trois fois.*
2. *On suppose que l'archer tente sa chance tant qu'il n'a pas atteint sa cible. On appelle* T *le nombre d'essais nécessaires.*
   (a) *Quelle est la probabilité pour que l'archer rate sa cible deux fois de suite ? Et dix fois de suite ?*
   (b) *Conjecturer la formule permettant d'obtenir la probabilité pour que l'archer rate sa cible* n *fois de suite.*
   (c) *Décrire par une phrase l'évènement* $T > n$.
   (d) *En utilisant tout ce qui précède, déterminer le plus petit entier tel que* $P(T > n) \leq 0,01$.

Exercice 2

Un QCM comporte 20 questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est juste. Chaque réponse juste rapporte un point et il y a un demi-point de pénalité pour une réponse fausse.

Un candidat répond au hasard à chaque question. On note X le nombre de réponses correctes obtenues.

1. *Quelle est la loi suivie par X ?*
2. (a) *Donner en fonction de X le nombre de réponses fausses.*
   (b) *En déduire en fonction de X le nombre de points obtenus.*
3. *Finalement, déterminer le nombre de points que peut espérer le candidat. Commenter.*

8.1.2 Fonction de densité et fonction de répartition

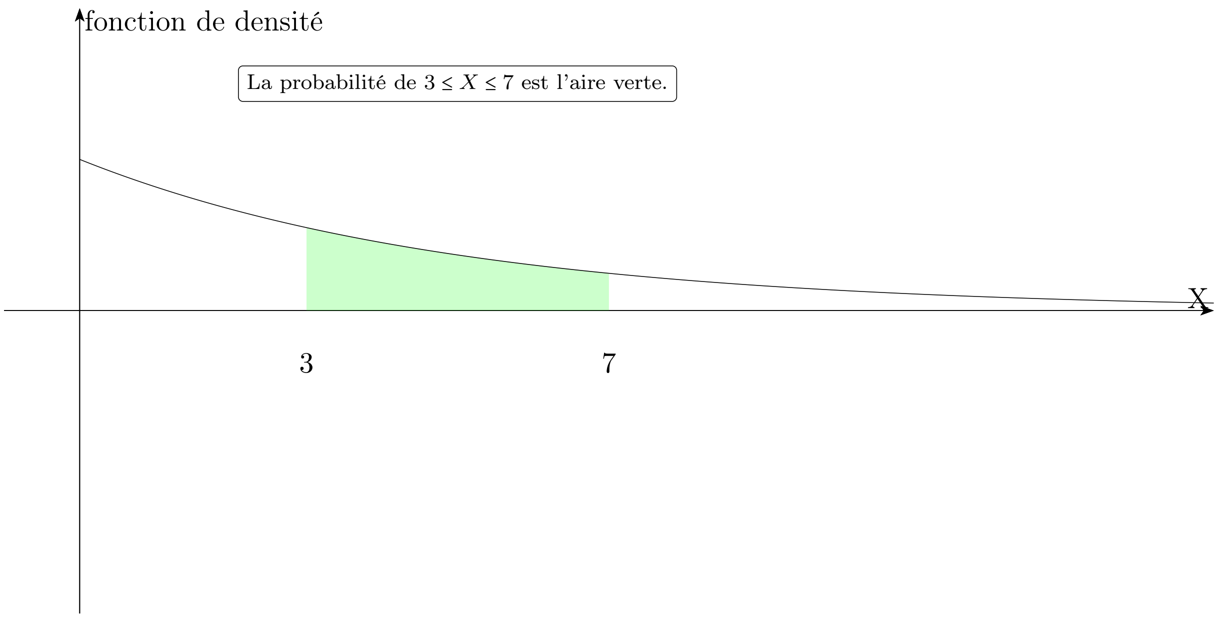
Certaines expériences aléatoires ont des nombres infinis d'issues et l'on peut associer des nombres réels à ces expériences.

Par exemple, les conditions météorologiques de demain à Colombes sont typiquement une expérience aléatoire dont le nombre d'issues est infini. À cette expérience aléatoire on peut associer par exemple la température, qui est un nombre réel. On dira alors que la température T qu'il fera demain à Colombes est une variable aléatoire réelle.

Il est quasiment impossible que, demain, il fasse exactement 18 ° avec une précision infinie. En revanche, la probabilité que T soit dans l'intervalle $[18;\ 19]$ n'est pas nulle. Ainsi, pour ce genre de variable, on s'intéressera aux probabilités d'appartenir à un certain intervalle.

Jusqu'à présent, on a traité de variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs. Il existe également des variables aléatoires dont les valeurs peuvent être n'importe quel nombre réel d'un intervalle.
On les qualifiera de *variables aléatoires continues*.

Dans ce cas on ne définira plus la probabilité d'une valeur en particulier mais plutôt celle d'un intervalle de valeurs $[a;\ b]$.
Pour caractériser une telle loi, on utilisera une *fonction de densité* : c'est une fonction f dont l'intégrale entre a et b correspond à la probabilité d'appartenir à l'intervalle $[a;\ b]$



Les caractéristiques de la loi étudiée dépendent donc de la « forme » de la courbe de densité.
Ainsi, plus la densité est grande et plus les valeurs correspondantes sont probables.

Une fonction de densité f définit complètement la loi de probabilité d'une variable continue, de même qu'un tableau de probabilité définit complètement la loi de probabilité d'une variable prenant un nombre fini de valeurs.
Finalement, on donne la définition.

Définition : Fonction de densité
Soit une variable aléatoire continue X prenant ses valeurs dans un intervalle J et une fonction f positive et continue sur J.
On dit que f est la fonction de densité de X lorsque pour tous nombres a et b de J tels que $a \leq b$, on a :

$$\boxed{P(X \in [a;\ b]) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Dans le cas où X admet une fonction de densité, on dit que X suit une loi à densité.

On va étudier un exemple simple qui figure au programme : la loi uniforme.

Définition : Loi uniforme
Soient $a < b$ deux nombres.
On dit qu'un variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;\ b]$ lorsque sa fonction de densité est définie et constante sur $[a;\ b]$.

(Remarque 0) En pratique, cela signifie que X prend ses valeurs dans $[a;\ b]$ uniquement.

Le meilleur moyen de bien comprendre ce qu'est une loi uniforme est d'imaginer un évènement pouvant survenir à n'importe quel moment, avec la même probabilité, dans un intervalle de temps donné.

Cet exercice donne un exemple concret de loi uniforme.

✎ ***Exercice 3***

Un bus est censé passer entre 8h et 9h. On suppose que l'heure de passage suit une loi uniforme.

1. *(a) Quelle est la probabilité qu'il passe entre 8h et 8h30 ?*
   (b) Quelle est la probabilité qu'il passe entre 8h et 8h15 ?
2. *Si on suppose que le bus passe tous les jours de manière aléatoire avec les mêmes hypothèses, conjecturer l'heure moyenne de passage du bus.*
3. *♣ Conjecturer une formule permettant de déterminer la probabilité que le bus passe entre 8h et x minutes et 8h et y mn, avec $x < y$ deux nombres compris entre 0 et 60.*

La proposition qui suit donne l'expression de la fonction de densité pour une loi uniforme.

Proposition : Fonction de densité d'une loi uniforme
Soient $a < b$ deux nombres.
Soit une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a;\ b]$.
Alors la fonction de densité de X est la fonction constante k définie pour tout t de $[a;\ b]$ par

$$\boxed{k(t) = \frac{1}{b-a}}$$

On prouve cette proposition à travers l'exercice qui suit.

✎ ***Exercice 4***

Soit une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur un intervalle $[a;\ b]$. On note k la fonction constante de densité de X.

1. *Rappeler l'expression d'une primitive de la fonction constante k.*
2. *Que vaut $P(X \in [a;\ b]) = \int_a^b k$?*
3. *En déduire l'équation vérifiée par k puis résoudre cette équation.*

8.1.3 Calcul de l'espérance dans le cas d'une loi à densité

Définition : Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi à densité

Soit une variable aléatoire continue X ayant une densité f définie sur un intervalle $[a;\ b]$.
L'espérance de X est le nombre

$$\boxed{E(X) = \int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t}$$

On calcule l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.

Proposition : Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme

Soit une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur un intervalle $[a;\ b]$.
L'espérance de X est le nombre

$$\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}}$$

✎ ***Exercice 5***

En reprenant les hypothèses de l'un des exercices précédents, calculer l'espérance de l'heure de passage du bus et vérifier la conjecture émise.

8.2 Loi normale et application à la fluctuation

8.2.1 Définition graphique

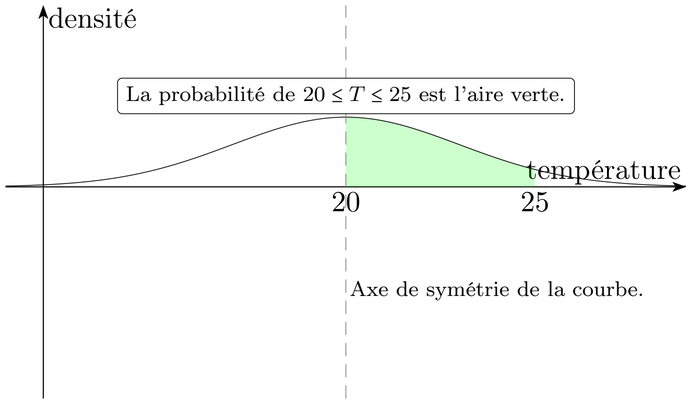
En physique, en économie, en biologie, on retrouve de nombreuses variables aléatoires qui suivent une loi qu'on appelle *normale*. Une loi normale est définie par deux paramètres :

— la moyenne que l'on note souvent μ (mu) :
  Elle représente la valeur moyenne observée si l'on pouvait répéter l'expérience un nombre infini de fois

— l'écart-type que l'on note σ (sigma) :
  Il représente les écarts possibles entre les valeurs observées et la moyenne. Plus l'écart-type est grand et plus les valeurs peuvent être éloignées de la moyenne.

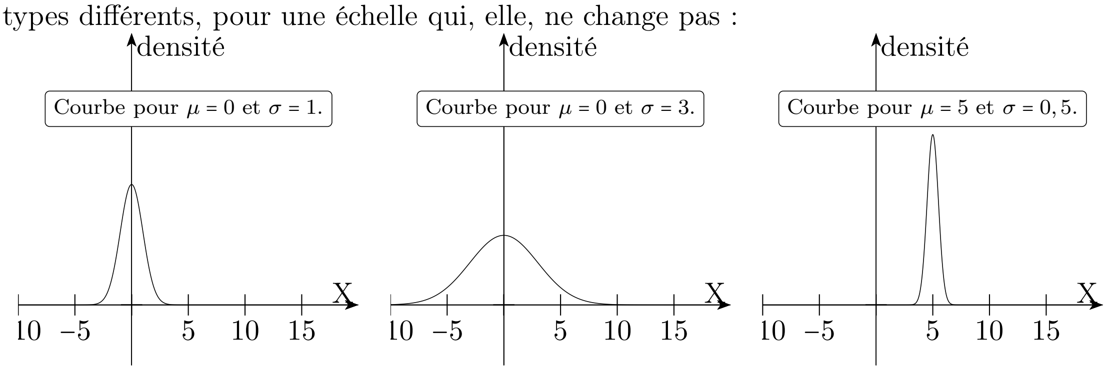
Cette loi est définie par une courbe en cloche et l'on mesure la probabilité d'appartenir à un intervalle en calculant l'aire sous la courbe.

Par exemple, si l'on suppose que la température à Colombes demain suit une loi normale de moyenne $\mu = 20$ et d'écart-type $\sigma = 3$, on obtiendra la probabilité que la température soit comprise entre 20 et 25 degrés en calculant l'aire verte représentée plus bas.



Il est important de connaître certaines propriétés de la courbe d'une fonction de densité de loi normale :
- La fonction a son maximum lorsque la variable vaut μ.
- La droite d'équation $x = \mu$ est un axe de symétrie de la courbe.
- Plus l'écart-type est grand et plus la courbe est « étalée ».

Pour illustrer cette remarque, nous avons représenté 3 courbes en cloche avec des moyennes et des écarts types différents, pour une échelle qui, elle, ne change pas :

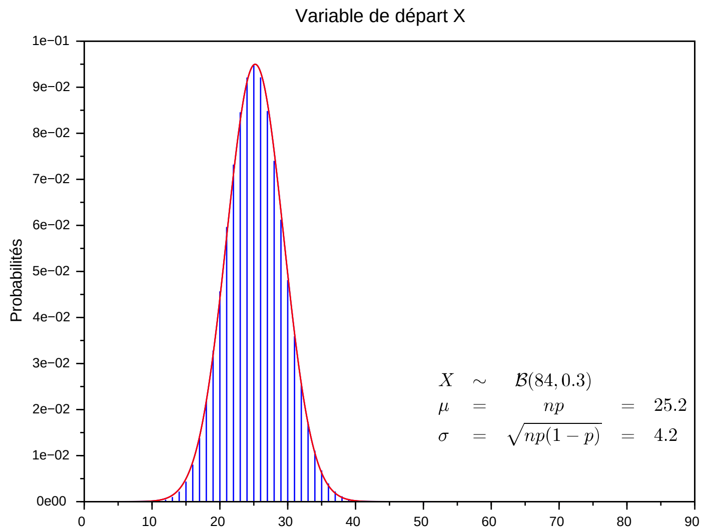


8.2.2 À propos du théorème de Moivre-Laplace

En pratique, beaucoup de grandeurs résultent (sont la conséquence) d'une somme de petits phénomènes indépendants.

On peut montrer que, sous certaines conditions, une somme de très nombreuses variables aléatoires indépendantes suit une loi normale.
Plus précisément, les lois binomiales de paramètres n, p, pour n très grand se rapprochent de loi normales. Deux savants, De Moivre et Laplace ont identifié et prouvé ce résultat : c'est le théorème de Moivre-Laplace.

On va graphiquement illustrer ce théorème en considérant une loi binomiale de paramètres $n = 84$ et $p = 0,3$:
- Les barres bleues représentent les vraies probabilités de loi binomiale.
- La ligne rouge correspond à la fonction de densité d'une loi normale réalisant l'approximation de Moivre-Laplace.



8.2.3 La loi normale centrée réduite

On peut limiter l'étude de toutes les lois normales à l'une d'entre elle, d'écart type 1 et de moyenne 0. On l'appelle la *loi normale centrée réduite.*

La définition de la loi normale par sa densité n'est pas très explicite mais elle figure officiellement au programme de terminale ES.

Définition : Loi normale centrée réduite

Soit une variable aléatoire réelle N.

On dit que N suit une loi normale centrée réduite lorsque N admet pour densité la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

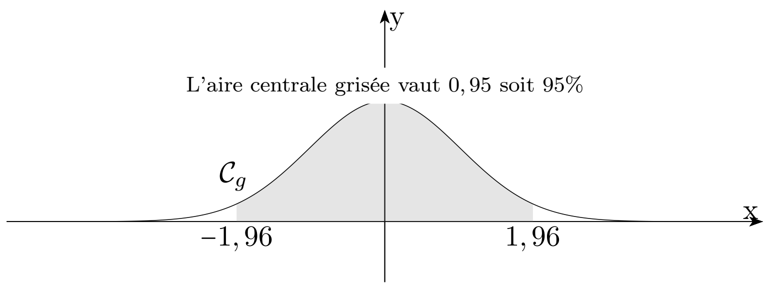
L'une des applications de la loi normale concerne les intervalles de fluctuation. La proposition suivante en est un outil.

Proposition : Intervalle de fluctuation à 95% pour la loi normale centrée réduite

Si U est une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite, on a

$$\boxed{P\left(N \in [-1,96;\ 1,96]\right) \simeq 0,95}$$

Une petite illustration de cette proposition :



La fonction représentée plus haut est la fonction de densité de la loi normale centrée réduite.

95% des probabilités sont situées dans l'intervalle $[-1,96;\ 1,96]$.

8.2.4 Loi normale quelconque

Définition : Loi normale quelconque

Soit une variable aléatoire U.
On dit que U suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ lorsque la variable aléatoire $\dfrac{U-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

La définition nous dit que l'on transforme une loi normale quelconque en loi normale centrée réduire en lui faisant subir deux opérations :

- Le passage de U à $U-\mu$ revient à centrer la variable, c'est à dire à la transformer en variable d'espérance 0.
- Le passage de $U-\mu$ à $\dfrac{U-\mu}{\sigma}$ revient à la réduire, c'est à dire à la ramener à une loi d'écart-type 1.

Il faut également retenir des valeurs remarquables de probabilités pour une variable qui suit une loi normale quelconque.

Proposition : Valeurs remarquables pour une loi normale

Soit U une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres μ et σ.
On a :

$$\begin{array}{rcl} P\left(U \in [\mu-\sigma;\ \mu+\sigma]\right) & \simeq & 0,68 \\ P\left(U \in [\mu-2\sigma;\ \mu+2\sigma]\right) & \simeq & 0,95 \\ P\left(U \in [\mu-3\sigma;\ \mu+3\sigma]\right) & \simeq & 0,997 \end{array}$$

8.2.5 Utilisation de la calculatrice

On utilisera en pratique la calculatrice pour déterminer les probabilités de variables suivant des lois normales.

Pour obtenir $P\left(U \in [12;\ 16]\right)$ avec U qui suit une loi normale de moyenne 15 et d'écart type 3, on tape : `NormalFRép(12,16,15,3)` . On obtient `NormalFRép` dans le menu `2nde` `var` puis `DISTRIB` et enfin `2:` `NormalFRép`.
Dans le cas où l'une des bornes de l'intervalle est infinie, il suffit de la remplacer par une très grande (ou très petite) valeur. En général -10^6 ou 10^6 sont largement suffisants. Ainsi, `NormalFRép(-10^6,16,15,3)` nous donne $P(U \leq 16)$ avec U qui suit une loi normale d'espérance 15 et d'écart type 3.

Dans les exercices de baccalauréat, on demandera au candidat de raisonner graphiquement en utilisant les propriétés d'aires et de symétrie ou bien d'utiliser la calculatrice pour déterminer des probabilités.

Voici quelques exercices très généraux liés à la loi normale.

Exercice 6

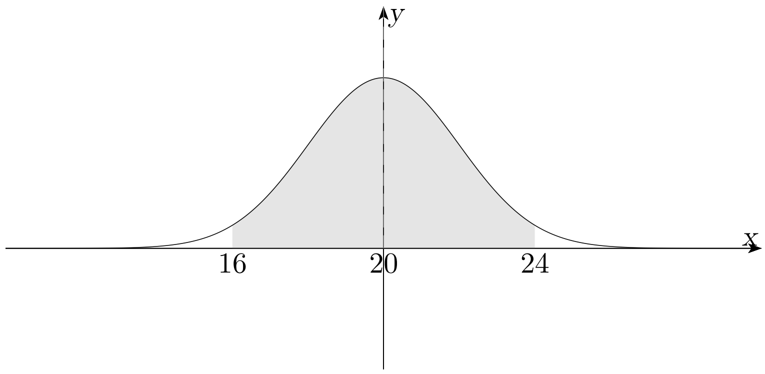
La courbe plus bas représente la densité d'une variable aléatoire X suivant une loi normale de paramètres $\mu = 20$ et d'écart-type σ inconnu.

L'aire grisée vaut $0,95$.

1. (a) *Hachurer l'aire correspondant à $P(X \leq 16)$.*

   (b) *Quelle est la valeur de* $P(X \leq 16)$ *?*

2. *Déterminer la valeur de* σ.



✎ *Exercice 7*

On admet que le poids des bébés (en kg) à la naissance suit une loi normale de moyenne $\mu = 3,3$ *et d'écart type* $\sigma = 0,5$. *On considère un bébé pris au hasard et on note* G *son poids.*

1. *Déterminer* $P(2,8 \leq G \leq 3,8)$. *Interpréter le résultat.*
2. *Déterminer* $P(G \geq 4)$. *Interpréter le résultat.*

✎ *Exercice 8*

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8h00.
Son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée est modélisé par une variable aléatoire T *qui suit le loi normale d'espérance* $\mu = 17$ *et d'écart-type* $\sigma = 1,2$.

1. *Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.*
2. *Il part de son domicile à 7 h 40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée ?*

Un type d'exercice plus compliqué consiste à « inverser » la loi normale suivie par une variable X.
En pratique, partant d'une certaine probabilité p, on recherche la valeur limite d telle que $P(X \leq d) = p$. La calculatrice permet d'obtenir directement cette valeur de d.

> Si l'on considère toujours une variable U qui suit une loi normale de paramètres $\mu = 15$ et $\sigma = 3$ et que l'on cherche la valeur d telle que $P(U \leq d) = 0,1$, il faut taper `FracNormale(0.1,15,3)` .
> La fonction `FracNormale` se situe dans le menu `2nde` `var` puis `DISTRIB` .

Voici deux exercices extraits du baccalauréat.

✎ *Exercice 9*

En 2012 en France, selon une étude publiée par l'Arcep (Autorité de régulation des communications électroniques et des postes), les adolescents envoyaient en moyenne 83 SMS par jour, soit environ 2 500 par mois. On admet qu'en France le nombre de SMS envoyés par un adolescent en un mois peut être modélisé par une variable aléatoire X *qui suit la loi normale d'espérance* $\mu = 2500$ *et d'écart-type* $\sigma = 650$.

Sachant que $p(X \leq a) = 0,8$, *déterminer la valeur de* a. *On arrondira le résultat à l'unité.*
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

✎ *Exercice 10*

♣ *On note* X *la variable aléatoire qui, à chaque prêt immobilier, associe sa durée, en années. On admet que la variable aléatoire* X *suit la loi normale d'espérance* $\mu = 20$ *et d'écart-type* $\sigma = 7$.

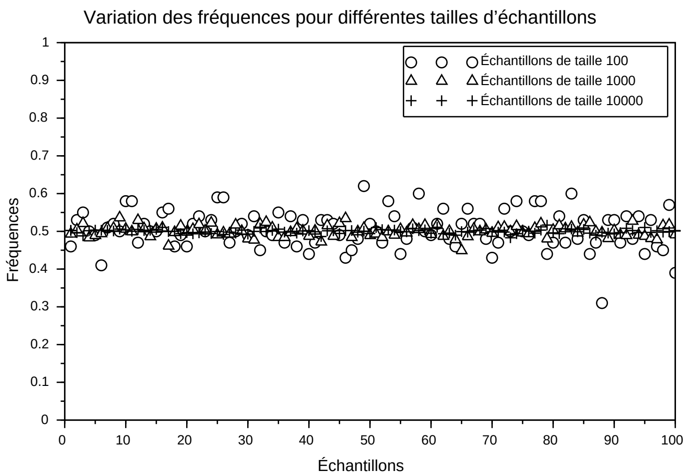
Déterminer une valeur approchée à $0,01$ *près du nombre réel* a *tel que* $P(X > a) = 0,1$.
Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

8.3 Intervalle de fluctuation et intervalle de confiance

8.3.1 Principe de la fluctuation d'échantillonnage

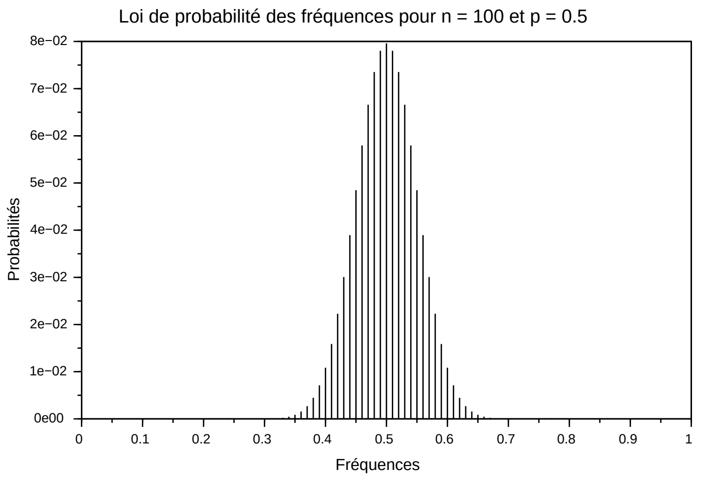
On imagine que l'on joue un certain nombre de fois à pile ou face avec une pièce équilibrée. On comprend que la fréquence de piles a des chances d'être proche de $0,5$. Intuitivement, on se doute que plus le nombre n de tirages augmente et plus la fréquence se rapproche de $0,5$.

Le graphique plus bas représente, pour n prenant les valeurs 100, puis 1000 puis 10000, les fréquences de piles obtenus pour 100 échantillons de taille n.



On observe que plus n est grand et moins les fréquences fluctuent. En pratique, elles se stabilisent autour de $0,5$, ce qui laisse croire que la pièce est effectivement équilibrée.

On a vu en première que la loi suivie par le nombre de piles obtenus est une loi binomiale de paramètres n et $0,5$. Ainsi, on peut en déduire les probabilités des fréquences. Le prochain graphique représente cette loi de probabilité pour un échantillon de taille 100.



8.3.2 Intervalles asymptotiques de fluctuation

On considère une très large population au sein de laquelle une caractéristique est présente avec une proportion p.

On prélève au hasard un échantillon de taille n, avec n très petit par rapport à la taille de la population, et on s'intéresse à la fréquence de personnes F_n présentant la caractéristique en question dans l'échantillon.

On peut prouver, en utilisant le théorème de Moivre-Laplace, que F_n est ainsi une variable aléatoire dont la loi de probabilité ressemble, lorsque n est grand, à une loi normale dont les caractéristiques ne dépendent que de la taille de l'échantillon et de la valeur de p.
En pratique, on sait ainsi qu'il est très probable que F_n soit dans un certain intervalle, centré autour de p. C'est l'objet de cette proposition :

Définition : Intervalle de fluctuation à 95% des fréquences

On considère un échantillon de taille n prélevé dans une population de référence.
F_n désigne la fréquence d'individus de cet échantillon présentant une certaine caractéristique.
p désigne la proportion d'individus de la population de référence présentant cette même caractéristique.
On appelle intervalle de fluctuation des fréquences à 95%, l'intervalle

$$\boxed{\left[p-1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};\ p+1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]}$$

Pour utiliser l'intervalle asymptotique, il faut vérifier que certains critères numériques sont remplis :

$$\begin{cases} n & \geq 30 \\ np & \geq 5 \\ n(1-p) & \geq 5 \end{cases}$$

L'exercice suivant permet d'utiliser en pratique l'intervalle de fluctuation.

✎ ***Exercice 11***

On suppose que la proportion d'hommes dans la population française est de 50%.
On prélève un échantillon de 100 personnes dans la population française. On note X le nombre d'hommes et F la fréquence d'hommes.

1. *Quelle est la loi suivie par X ?*
2. *Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95% de F.*
3. *Que peut-on dire d'un parlement de 100 élus qui serait composé de 75 hommes ?*

✎ ***Exercice 12***

Fabriquer un programme qui prend en entrée les valeurs de p et n et qui, lorsque c'est permis, affiche en sortie les bornes de l'intervalle de fluctuation asymptotique des fréquences à 95%.

8.3.3 Intervalle de confiance

Jusqu'à présent on a considéré des échantillons pour lesquels on mesure une caractéristique dont la proportion dans la population est connue.
Dans la plupart des cas, on s'intéresse au problème inverse, qui consiste à déterminer la fréquence dans la population de référence connaissant la fréquence dans l'échantillon.
Le théorème suivant donne un outil permettant de résoudre ce problème.

Théorème : Intervalle de confiance à 95%

Soit un échantillon de taille n au sein duquel la fréquence d'une certaine caractéristique est F_n.
Alors la proportion d'individus présentant cette même caractéristique dans la population de référence se situe dans l'intervalle $\left[F_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}};\ F_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ *avec une probabilité au moins égale à 95%.*
On appelle intervalle de confiance à 95% l'intervalle $\left[F_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}};\ F_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

En application, deux exercices

✎ ***Exercice 13***

Sur un sondage de 1000 personnes, 300 déclarent vouloir passer les prochaines vacances à l'étranger.

Déterminer l'intervalle de confiance à 95% de la proportion de personnes voulant passer leurs prochaines vacances à l'étranger.

✎ ***Exercice 14***

Le second tour des élections des animaux de la forêt a bientôt lieu.

Chantal la Mygale et Thierry le Pécari sont au second tour.

Sur un échantillon de 1000 *animaux interrogés, Chantal recueille* 54% *des intentions de vote tandis que Thierry recueille* 46%.

Peut-on affirmer avec une certitude d'au moins 95% *que Chantal la Mygale va gagner les élections ?*

⚠ Dans les applications numériques, n'oubliez pas de convertir les pourcentages afin de calculer les intervalles de fluctuation ou de fréquences.
Ainsi, il ne faudra pas calculer $50 - \dfrac{1}{\sqrt{100}}$ mais bien $\dfrac{50}{100} - \dfrac{1}{\sqrt{100}}$ pour déterminer un intervalle de confiance avec une fréquence de 50% et une taille d'échantillon de 100.

Annexe A

Formulaire de dérivation

A.1 Dérivation des fonctions usuelles

n désigne un nombre entier naturel. k est un nombre réel fixé.

Nom	Définition	Dérivabilité	$f(t)$	$f'(t)$
Constante	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	k	0
Identité	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	t	1
Puissance	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	t^n	nt^{n-1}
Racine	$[0;\ +\infty[$	$]0;\ +\infty[$	$\sqrt{t}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$
Inverse	$]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$	$]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$	$\dfrac{1}{t}$	$\dfrac{-1}{t^2}$
Exponentielle	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^t	e^t
Logarithme	$]0;\ +\infty[$	$]0;\ +\infty[$	$\ln(t)$	$\dfrac{1}{t}$

A.2 Opérations

On dispose également de formules permettant de calculer la dérivée de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions.
Ainsi, dans les formules suivantes, u, v et w désignent trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I et dérivables en un nombre t de I. D'autre part, α désigne un nombre fixé et on supposera que $w(t) \neq 0$.

On a alors :

$$
\begin{array}{lcl}
(u+v)'(t) & = & u'(t)+v'(t) \\
(\alpha u)'(t) & = & \alpha u'(t) \\
(uv)'(t) & = & u'(t)v(t)+u(t)v'(t) \\
\left(\dfrac{1}{w}\right)'(t) & = & -\dfrac{w'(t)}{w(t)^2} \\
\left(\dfrac{u}{w}\right)'(t) & = & \dfrac{u'(t)w(t)-u(t)w'(t)}{w(t)^2}
\end{array}
$$

A.3 Dérivation composée

Le tableau suivant donne des applications directes de la formule de dérivation composée.
u désigne une fonction dérivable en t.

u est à valeurs dans	$f(t)$	$f'(t)$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{e}^{u(t)}$	$u'(t)\mathrm{e}^{u(t)}$
$]0;\ +\infty[$	$\ln(u(t))$	$\dfrac{u'(t)}{u(t)}$

A.4 Primitives

a désigne un nombre fixé ; n représente un entier ; u, v et w sont des fonctions définies et continues sur un intervalle I dont U, V et W sont des primitives.
On suppose enfin que u et w sont dérivables sur I et que w ne s'annule pas sur cet intervalle.

Domaine de définition	$f(x)$	$F(x)$
$\mathbb{R}$	a	ax
$\mathbb{R}$	x	$\dfrac{x^2}{2}$
$\mathbb{R}$	x^2	$\dfrac{x^3}{3}$
$\mathbb{R}$	x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
I	$a\times u(x)$	$a\times U(x)$
I	$u(x)+v(x)$	$U(x)+V(x)$
I	$u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)}$
I	$\dfrac{w'(x)}{w(x)}$	$\ln(w(x))$

Annexe B

Questions fréquemment posées

Ce paragraphe s'adresse aux lecteurs qui voudraient avoir un résumé très très succinct de l'ensemble du programme de terminale ES. Celui ou celle qui cherche un contenu rigoureux devra ici passer son chemin.

B.1 Questions fréquemment posées

On recense ici les questions fréquemment posées à l'épreuve écrite de l'examen, on décrypte leur sens et on propose une méthode de résolution.

« Soit la fonction f définie pour tout x par $f(x) = x^3 - 3x^2$. Déterminer le tableau de variations de f sur $[-2;\ 4]$. »

Pour déterminer les variations de la fonction, il faut étudier le signe de sa dérivée.
En effet une fonction est croissante lorsque sa dérivée est positive et une fonction est décroissante lorsque sa dérivée est négative.
On calcule donc $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. C'est une fonction trinômiale qui possède deux racines $x = 0$ et $x = 2$.
On sait qu'une expression trinômiale $ax^2 + bx + c$ est du signe de $-a$ pour x compris entre les racines et du signe de a en dehors ; et dans le cas où l'expression n'a pas de racine, elle est du signe de a pour tout x.
Ici, le tableau de signes de f' est

x	-2		0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour dresser le tableau de variations de f il faut calculer $f(-2) = -20$, $f(0) = 0$, $f(2) = 4$ et $f(4) = 16$. On obtient :

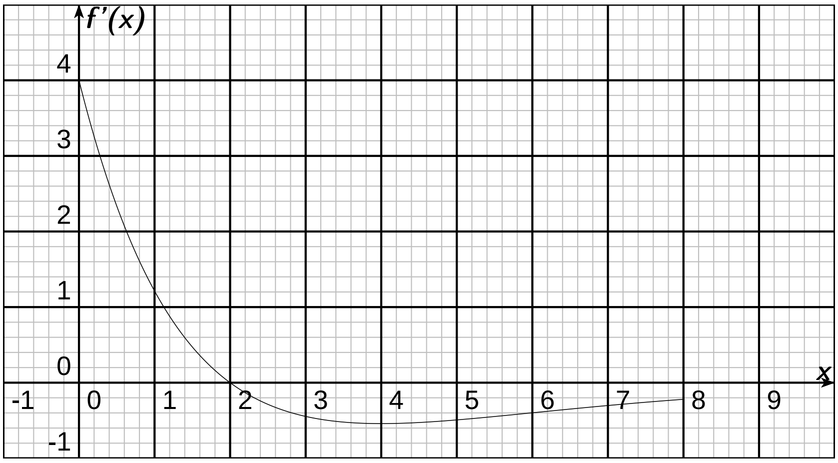
x	-2		0		2		4
$f(x)$	-20	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	16

« Soit la fonction f définie pour tout x par $f(x) = x^3 - 3x^2$. Déterminer les abscisses des points d'inflexion de la courbe de f. »

Les points d'inflexion correspondent à des changements de convexité. Or, c'est le signe de la dérivée seconde qui donne la convexité.
On calcule donc $f'(x) = 3x^2 - 6x$ puis $f''(x) = 6x - 6$. Cette fonction s'annule en changeant de signe pour $6x - 6 = 0$, c'est à dire pour $x = 1$.

La courbe possède un unique point d'inflexion en 1.

« Soit une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;\ 8]$ et dont on a tracé la courbe de la dérivée f' plus bas.
Déterminer le sens de variation de f sur $[0;\ 8]$.
Déterminer la convexité de f sur $[0;\ 8]$.



»

C'est le signe de f' qui donne le sens de variation de f. Or la courbe de f' est sous l'axe des abscisses à partir de 2 et au dessus de l'axe des abscisses entre 0 et 2.
On en déduit que la fonction f est croissante sur $[0;\ 2]$ puis décroissante sur $[2;\ 8]$.
C'est le sens de variation de f' qui donne la convexité. Or, par lecture graphique, f' est décroissante sur $[0;\ 4]$ puis croissante sur $[4;\ 8]$
On en déduit que la fonction f est concave sur $[0;\ 4]$ puis convexe sur $[4;\ 8]$.

« Soit la suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 100 \\ u_{n+1} = 0,98u_n + 4 \end{cases}$. On définit également la suite v par $v_n = u_n - 200$.
Montrer que v est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
Finalement, calculer la limite de u_n »

Ici, il faut montrer que v_{n+1} s'obtient en multipliant v_n par un nombre constant.
On calcule donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 200 \\ &= 0,98u_n + 4 - 200 \\ &= 0,98u_n - 196 \\ &= 0,98\left(u_n - \frac{196}{0,98}\right) \\ &= 0,98(u_n - 200) \\ &= 0,98v_n \end{aligned}$$

La raison de v est de $q = 0,98$ et le premier terme vaut $v_0 = u_0 - 200 = 100 - 200 = -100$.
Ensuite, on utilise la formule explicite pour les suites géométriques.
Ainsi, $v_n = v_0 \times q^n = -100 \times 0,98^n$.
Cela permet d'en déduire $u_n = v_n + 200 = -100 \times 0,98^n + 200$.
Quand on parle de « formule en fonction de n » ou de « formule explicite », cela veut dire qu'on cherche à obtenir u_n directement à partir de n, sans passer par les termes intermédiaires. Concrètement, dans la formule ci-dessus, je peux calculer u_{10} sans avoir besoin de calculer u_9.
La limite de u_n s'obtient en notant que $0,98^n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini car $0,98 < 1$. Ainsi, la limite de u_n est 200.

« On suppose que, pour un candidat répondant au hasard, le nombre de bonnes réponses à un test suit un loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,25$.
Déterminer $P(2 \leq X \leq 4)$. Comment s'interprète cette grandeur.
De même, calculer et interpréter $E(X)$ »

La calculatrice permet d'obtenir pour tout entier k la valeur de $P(X \leq k)$ au moyen de la commande `binomFrép(12,0.25,k)`.
La probabilité recherchée s'obtient par différence en utilisant cette fonction de la calculatrice. Voir à ce sujet la page 30.
Ainsi, $P(2 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 1) \simeq 0,684$. Cela signifie que la probabilité que le candidat ait entre deux et quatre bonnes réponses est de 68,4 % environ.

L'espérance, quant à elle, représente le nombre moyen de bonnes réponses pour le test. Elle s'obtient avec la formule $E(X) = np = 12 \times 0,25 = 3$.

« On suppose que le temps de parcours, en minutes, d'un élève pour venir au lycée suit une loi normale avec $\mu = 20$ et $\sigma = 4$.
Il part de chez lui à 7h38. Sachant que les grilles ferment à 8h, quelle est la probabilité qu'il arrive en retard.
Calculer également l'heure à laquelle il doit quitter sa maison pour avoir moins de 4% de risque d'être en retard. »

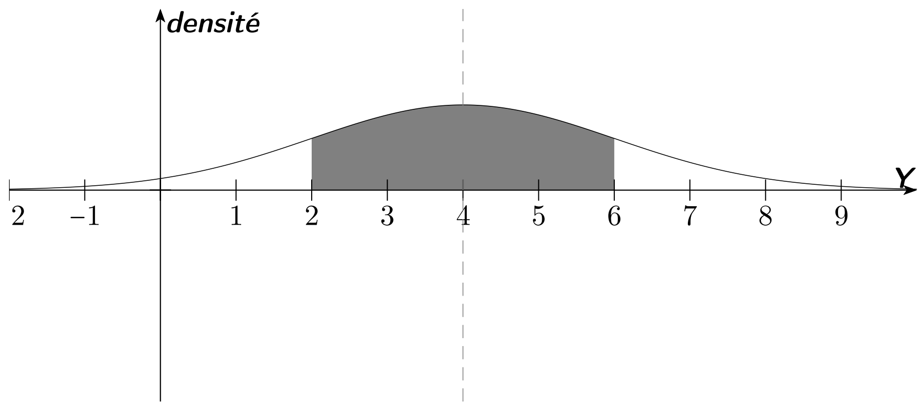
On doit calculer la probabilité que X soit supérieur à 22 minutes.

À la calculatrice, cela s'obtient avec `normalFrép(22,10^6,20,4)`. En effet, on cherche la probabilité que $X \in [22;\ +\infty[$ et pour approximer $+\infty$, il suffit de prendre un très grand nombre tel que 10^6 par exemple.

Finalement, la calculatrice donne $P(X \geq 22) \simeq 0,309$. L'élève a, dans ces conditions, environ 31% de risque d'arriver en retard.

Pour répondre à la seconde question, on doit utiliser une autre fonction de la calculatrice qui permet de retrouver a connaissant la valeur de $P(X \leq a)$.
Ici, on cherche a tel que $P(X \leq a) = 1 - \dfrac{4}{100} = 0,96$.
On tape donc `FracNormale(0.96,20,4)` et on obtient environ 27 minutes.
Il doit donc partir de chez lui à 7h33.

« On donne plus bas la courbe d'une fonction de densité d'une variable Y suivant une loi normale. L'aire grisée vaut 0,68 et la droite en pointillés est un axe de symétrie.
Déterminer l'écart-type et l'espérance de Y.



»

L'axe de symétrie correspond à μ. On lit $\mu = 4$.
D'autre part, on sait que, lorsque le domaine est symétrique par rapport à la moyenne, une aire de $0,68$ correspond à l'intervalle $[\mu - \sigma;\ \mu + \sigma]$.
On peut donc identifier $\mu + \sigma = 6$, ce qui donne $\sigma = 6 - \mu = 2$.

« Avant de se lancer sur le marché français, un fabricant de sauces industrielles souhaite estimer la proportion de Français qui consomment du ketchup régulièrement.

Une enquête auprès de 500 français choisis au hasard montre que 192 d'entre eux sont des consommateurs réguliers.
Déterminer l'intervalle de confiance à 95% de la proportion de français consommateurs réguliers de ketchup. »

Ici, il faut commencer par calculer la fréquence au sein de l'échantillon :

$$f = \frac{192}{500} = 0,384$$

La taille de l'échantillon est $n = 500$. On utilise ensuite la formule de l'intervalle de confiance à 95% :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}};\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \simeq [0,339;\ 0,429] \text{ soit } [33,9\%;\ 42,9\%]$$

« Un directeur de musée affirme que 40% de ses visiteurs sont des jeunes.
Sur les 200 dernières visites, on a mesuré une fréquence de 34% de jeunes.
En calculant l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95% de la fréquence de jeunes, déterminer s'il y a lieu de remettre en cause l'affirmation de ce directeur. »

Ici, le problème est différent. On connaît la probabilité théorique qu'un visiteur pris au hasard soit un jeune : elle est de $p = 0,4$. De plus, on vérifie les conditions d'application de l'intervalle de fluctuation asymptotique :

- $n = 200 \geq 30$;
- $p \times n = 0,4 \times 200 \geq 5$;
- $(1 - p) \times n = 0,6 \times 200 \geq 5$;

On calcule ensuite :

$$\left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};\ p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \simeq [0,332;\ 0,468] \text{ soit } [33,2\%;\ 46,8\%]$$

La fréquence mesurée, 34%, appartient bien à cet intervalle. On ne peut donc pas mettre en doute l'affirmation du directeur.

B.2 Erreurs fréquemment commises

Voici une collection des confusions les plus fréquentes que l'on peut trouver sur les copies d'élève ou lors des oraux de rattrapage.

« Je veux déterminer le signe de $-3x - 6$.
$-3x$ ***est négatif et*** -6 ***est négatif aussi donc*** $-3x - 6$ ***est négatif. »***

Attention, $-3x$ n'est pas forcément négatif. En effet tout dépend du signe de x. Par exemple $-3 \times (-10)$ est positif.
Pour déterminer le signe de $-3x - 6$, il faut s'intéresser à la fonction affine $x \mapsto -3x - 6$ qui s'annule en $-3x - 6 = 0$, c'est à dire pour $x = -2$. Comme cette fonction est décroissante, on en déduit son tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$-3x - 6$	$+$	0	$-$

« Je veux déterminer l'abscisse du point d'inflexion de la courbe de $f(x) = x^3 - 3x^2$ ***pour*** x ***dans l'intervalle*** $[-4;\ 4]$.
Je dérive : $f'(x) = 3x^2 - 6x$.
Je calcule le signe de f'. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 0 = 36 > 0$.
Il y a deux racines, $r_1 = \dfrac{-(-6) + \sqrt{36}}{2 \times 3} = 2$ ***et*** $r_2 = \dfrac{-(-6) - \sqrt{36}}{2 \times 3} = 0$.

J'en déduis le signe de f' puis les variations de f. Pour cela, je calcule $f'(-4) = 72$, $f'(0) = 0$, $f'(2) = 0$ et $f'(4) = 24$. Le tableau de variations est donc

x	-4		0		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			0				24
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	72				0		

Les points d'inflexion sont donc en $x = 0$ et $x = 2$. »

Ici, il y a deux confusions d'élève.

D'abord, l'élève calcule et place les valeurs de f' dans le tableau de variations de f. Cela donne un tableau de variations incohérent avec par exemple la première flèche qui monte de 72 à 0.

Ensuite l'élève confond les sommets de la courbe avec les points d'inflexion. On rappelle que le point d'inflexion correspond à un changement de courbure, pas de sens de variation.

Pour déterminer les abscisses des points d'inflexion, en général, on calcule la dérivée seconde f'' et on s'intéresse au changement de signes de $f''(x)$.

Annexe C

Algorithmique

L'algorithmique se révèle être un sujet délicat pour beaucoup d'élèves de terminale S. L'objectif de ce petit chapitre est de présenter le vocabulaire de l'algorithmique puis, à travers des exemples de difficulté croissante, d'aborder des cas classiques d'étude.

C.1 Introduction à l'algorithmique

Les algorithmes sont omniprésents dans le quotidien : depuis le programme du lave-linge, jusqu'à la procédure d'arrimage d'un module de la station orbitale ; même certains de nos comportements les plus automatisés sont en fait des algorithmes.
Par exemple le fait se sortir de cette pièce peut se décomposer de la manière suivante :

```
Je me dirige vers la porte.
J'ouvre la porte.
Je sors de la pièce
```

> La séquence d'instructions ne tient pas compte du fait que la porte soit ouverte ou non. On verra plus tard comment intégrer une telle condition.
> On peut remarquer également que chacune des instructions peut être décomposée en instructions plus simples. Par exemple, le fait de « se diriger vers la porte » est constitué de plusieurs instructions élémentaires.

C.1.1 Vocabulaire

C.1.1.1 Algorithme, entrée, sortie

Un *algorithme* est une séquence d'instructions visant à produire un résultat ou une opération à partir d'une certaine situation de départ.
On appelle souvent *entrée* la situation de départ et *sortie* le résultat de l'algorithme.
On parlera d'*éditer* un programme lorsqu'on écrira les instructions et d'*exécuter* un programme lorsqu'on demandera à la machine d'exécuter les instructions.

C.1.1.2 Instructions

Lorsque l'on demande à la machine d'accomplir une action, on parle d'*instruction*.
Voilà les principaux types d'instructions que l'on retrouve en informatique :

- Afficher un message ou une image à l'écran.
- Lire une donnée depuis une saisie clavier, une action de la souris ou un emplacement de la mémoire.
- Écrire dans la mémoire.
- Faire un calcul (numérique ou logique).

C.1.1.3 Variables

Dans un algorithme, on demande souvent à la machine de manipuler :
- des nombres
- des chaînes de caractère
- des variables de type VRAI / FAUX [1]

Quand l'ordinateur manipule de telles grandeurs, il les stocke en mémoire. Aussi, on doit spécifier à l'ordinateur qu'il doit créer cet espace de stockage dans sa mémoire. La taille de l'espace en question et la manière dont l'ordinateur gère ce stockage dépend souvent du type de grandeur manipulée.

Une *variable* est ainsi un emplacement dans la mémoire de l'ordinateur que l'on désigne par un *nom*.
Lorsqu'on décide de créer un tel emplacement, on doit spécifier :
- un nom pour la variable
- le type de variable que l'on souhaite créer

Les *types de variable* dépendent du langage informatique utilisé. Pour simplifier, les deux principaux types sont :
- les nombres
- les chaînes de caractère

On appelle *déclaration* l'action de spécifier le nom et le type d'une variable.
On appelle *affectation (ou écriture)* l'action de stocker une valeur donnée dans l'espace mémoire correspondant à une variable
Enfin, on appelle *lecture de variable* le fait de récupérer le contenu de l'espace mémoire correspondant à une variable.
En résumé, on utilise les variables pour stocker des données dans une case mémoire. Afin de manipuler des variables, il faut d'abord les créer (les déclarer) puis on peut dans la suite de l'algorithme lire et écrire dans cet espace mémoire. On lit ou on écrit une variable en spécifiant son nom à la machine.

C.1.2 Instructions conditionnelles et boucles

C.1.2.1 Instructions conditionnelles

On reprend l'exemple de l'algorithme de la sortie de cette pièce et on l'affine un peu. En fait, on aimerait que l'algorithme prenne en compte le fait que la porte soit ouverte ou non. La version améliorée s'écrit donc :

```
Je me dirige vers la porte
    Si la porte est fermée:
        J'ouvre la porte
        Je sors de la pièce
    Si la porte est ouverte:
        Je sors de la pièce
```

La plupart des langages de programmation permettent de réaliser des séquences d'instructions différentes selon qu'une condition est vérifiée ou non. Une *instruction conditionnelle* est ainsi une séquences d'instructions exécutée uniquement si une condition est vérifiée.
Pour reprendre une image connue, cela correspond à un « aiguillage » dans le programme.
Suivant les langages, la syntaxe et la variété des instructions conditionnelles change. La plus célèbre d'entre elles, présente dans presque tous les langages de programmation s'appelle *if ... then ... end*. En français, cela s'écrit :

```
    Si telle condition est vérifiée alors:
        Faire action 1
        Faire action 2
        ...
```

1. On appelle cela des variables *booléennes*.

Une version améliorée du *si ... alors ... fin* permet de spécifier une séquence alternative d'instructions lorsque la condition n'est pas vérifiée. Elle s'écrit *si ... alors ... sinon ... fin*
Dans le cas de l'algorithme de sortie de pièce, on aurait ainsi pu écrire :

```
Je me dirige vers la porte
    Si la porte est fermée:
        J'ouvre la porte
        Je sors de la pièce
    Sinon:
        Je sors de la pièce
```

C.1.2.2 Boucles

On imagine que l'on souhaite écrire un algorithme pour un basketteur qui doit effectuer 100 fois la même tâche en entraînement, par exemple « marquer un coup franc ». On pourrait bien sûr écrire :

```
Je me place sur la ligne
Je vise le panier
Je lance
Je me place sur la ligne
Je vise le panier
Je lance
Je me place sur la ligne
Je vise le panier
Je lance
...
```

Heureusement, presque tous les langages de programmation permettent de dire à la machine d'effectuer 100 fois la même tache. On pourra donc écrire :

```
    100 fois de suite:
        Je me place sur la ligne
        Je vise le panier
        Je lance
```

On appelle un tel procédé une *boucle*, c'est une séquence d'instructions répétées un nombre donné de fois. Là encore, il peut y avoir des différences selon les langages de programmation. La boucle la plus présente est la boucle *for ... ... end.* En français on peut l'écrire :

```
    x fois de suite:
        Faire action 1
        Faire action 2
        ...
```

C.1.2.3 Boucles conditionnelles

Une boucle conditionnelle est une série d'instructions qui s'exécute tant qu'une certaine condition est vérifiée. En français, une telle boucle s'appelle *tant que.*
En reprenant l'exemple du basketteur, on peut améliorer son entraînement en se disant qu'il l'arrête dès qu'il a marqué 5 paniers de suite :

```
    Tant que je n'ai pas marqué 5 paniers de suite:
        Je me place sur la ligne
```

```
Je vise le panier
Je lance
```

Dans la plupart des langages une telle boucle s'écrit *while … … end.*

C.1.3 Introduction à la programmation avec la `TI`

C.1.3.1 Le menu `Prgm`

Le menu `prgm` de la calculatrice est constitué de 3 sous-menus :

`EXEC` correspond à l'exécution du programme. Une fois sélectionné le programme que l'on souhaite exécuter avec `entrer` , il s'affiche
`prgmNomDuProgramme` dans le menu principal. Pour lancer le programme, il faut valider avec `entrer`

`EDIT` permet d'éditer (de modifier) les programmes existants.
Le mode d'édition se caractérise par les `:` en début de chaque ligne. Il est inutile de sauver, cela est fait automatiquement lorsqu'on écrit dans le programme.

`NOUV` afin de créer un nouveau programme. Il suffit d'écrire le nom du nouveau programme et de valider avec `entrer` . On se retrouve alors dans le mode d'édition du programme.

C.1.3.2 Les instructions d'entrées / sorties

Ces instructions s'obtiennent en appuyant sur la touche `prgm` en mode édition, puis en allant dans le sous-menu `E/S` .

1. Pour afficher un message ou une variable :
   `Disp "BONJOUR"` affiche « BONJOUR » à l'écran
   `Disp A` affiche la valeur de A à l'écran
   `Disp "A CARRE VAUT", A^2` affiche « A CARRE VAUT » suivi de la valeur de A^2 à l'écran
2. Pour que l'utilisateur saisisse une valeur dans une variable :
   `Input "ENTRER UNE VALEUR", X` affiche le message « ENTRER UNE VALEUR » suivi d'un prompt. Quand l'utilisateur saisit un nombre, il est stocké dans X
   `Prompt X, Y, Z` va afficher successivement 3 prompts. Quand l'utilisateur va saisir les 3 nombres, ces derniers seront stockés respectivement dans X, Y puis Z.

C.1.3.3 Le stockage dans une variable

On utilise la commande `sto` .
Par exemple, `2*A+3 → B` va calculer $2A+3$ et stocker cette valeur dans la variable B.

C.1.3.4 Pour exécuter un programme

Il faut sortir du mode édition (`2nde` `mode`) puis exécuter le programme (`prgm` puis sous-menu `EXEC` et enfin `Entrer` deux fois).

C.1.3.5 Trois exemples

On souhaite écrire un programme qui

1. demande à l'utilisateur de rentrer les valeurs de a, b et c
2. calcule le discriminant de la fonction $x \mapsto ax^2+bx+c$ et l'affiche sous forme de fraction irréductible.

L'exercice suivant permet d'implémenter (d'écrire dans la machine) ce programme à la calculatrice `TI`.

✎ *Exercice 0*

1. *Écrire le programme suivant dans la calculatrice* `TI` *:*

```
:Prompt A, B, C
:B^2-4*A*C → D
:Disp "DELTA:", D▷Frac
```

2. *Utiliser le programme pour calculer le discriminant de* $x \mapsto x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$.

On améliore maintenant le programme sur les fonctions trinomiales en ajoutant le calcul des racines. En première, on a vu que le nombre de racines réelles dépend du discriminant.

✎ *Exercice 1*

1. *Écrire la programme suivant dans la calculatrice* `TI`.
   Indication: Les structures conditionnelles s'obtiennent en mode édition depuis `prgm` *puis* `CTL` *. Les tests (plus grand que, égal...) sont accessibles dans* `2nde` `math` .

```
:Prompt A, B, C
:B^2-4*A*C → D
:Disp "DELTA:", D▷Frac
:Pause
:If D > 0
:Then
:Disp (-B+√(D))/(2*A)▷Frac, (-B-√(D))/(2*A)▷Frac
:Else
:If D = 0
:Then
:Disp -B/(2*A)▷Frac
:Else
:Disp "AUCUNE RACINE"
:End
:End
```

2. *Utiliser le programme pour calculer les racines des fonctions trinomiales suivantes*
   $x \mapsto 2x^2 - 4x + 2$
   $x \mapsto x^2 + x + 1$

Le petit exercice suivant est une autre application très simple des tests.

✎ *Exercice 2*

On veut en toute généralité résoudre l'équation $ax + b = cx + d$. *On propose ainsi à l'utilisateur de saisir les variables* a, b, c *et* d *et on affiche les solutions de l'équation.*

1. *Donner en fonction des valeurs de* a, b, c *et* d *la solution de cette équation.*
2. *Écrire un tel programme en français puis à la* `TI`.
3. *Tester le programme sur l'équation* $2x + 3 = 2x - 4$.
4. *Dans le cas où le programme a affiché une erreur :*
   (a) *Quel est le problème rencontré ?*
   (b) *Ajouter une condition au programme pour résoudre ce problème et prendre en compte tous les cas possibles.*
5. *Tester le programme sur l'équation* $2x + 3 = 2x + 3$.

C.2 Quelques applications

C.2.1 Calcul d'intervalles de fluctuations

On peut tout à fait automatiser le traitement des calculs d'intervalles de fluctuation.
Ici, la calculatrice nous permet de vérifier les conditions d'application de la formule puis de calculer automatiquement les bornes de l'intervalle.
Un tel programme s'écrit, par exemple :

```
:Prompt N, P
:If D > 30 and N*P>5 and N*(1-P)>5
:Then
:1.96*√(P*(1-P)/N) → D
:Disp "INTERVALLE:"
:Disp P-D, P+D
:Else
:Disp "CONDITIONS NON REMPLIES"
:End
:End
```

C.2.2 Suites définies par récurrence

Les algorithmes permettent de travailler sur des suites définies par récurrence. On exploitera l'exemple :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1000 \\ u_{n+1} & = & 1,05 \times u_n - 40 \end{cases}$$

Pour déterminer u_{100}, on doit calculer $u_1, u_2, \cdots, u_{99}$. À chaque étape, on modifie le terme de la même manière pour passer au terme suivant, ce qui conduit à utiliser une boucle.
Le calcul de u_{100} pourra ainsi s'écrire :

```
On affecte la valeur 1000 à u
Pour i allant de 1 à 100:
    On affecte la valeur 1,05 × u − 40 à u.
Fin pour
On affiche la valeur de u.
```

> On n'a pas besoin d'avoir 100 variables pour déterminer u_{100}. En effet, dans le cas d'une récurrence d'ordre 1, on calcule un terme à partir de la seule valeur du terme précédent. Ainsi, on peut « écraser » la valeur de u à chaque étape.

Exercice 3

Écrire cet algorithme à la `TI`*. On obtient les boucles depuis le mode édition en allant dans* `prgm` *puis* `CTL` .

On admettra ici que u est strictement croissante et tend vers l'infini. On suppose que l'on souhaite déterminer le rang à partir duquel u devient supérieure à 10^6. Ici, on doit donc stocker d'une manière ou d'une autre le rang en cours et utiliser une boucle conditionnelle qui s'arrête dès que u dépasse 10^6.
L'algorithme s'écrira :

```
On affecte la valeur 1000 à u
On affecte la valeur 0 à n
Tant que u < 10^6 :
    On affecte la valeur 1,05 × u − 40 à u.
    On affecte la valeur n + 1 à n.
Fin tant que
On affiche la valeur de n.
```

Exercice 4

Implémenter cet algorithme à la `TI`.

La condition du `Tant que` est le contraire de la situation recherchée. En effet, l'algorithme doit s'arrêter dès que $u \geq 10^6$, ce qui signifie qu'il continue tant que $u < 10^6$!

La variable n définie plus haut s'appelle un compteur car elle compte le nombre de passages dans la boucle. *Incrémenter* le compteur signifie augmenter sa valeur de 1.

C.2.3 Le jeu de devinette

On aimerait programmer un petit jeu de devinette dont les règles sont la suivantes :

(Étape 1) La machine choisit un nombre entier au hasard entre 1 et 1000.

(Étape 2) Tant que l'utilisateur n'a pas deviné le bon nombre :

- (Sous-étape 1) L'utilisateur propose un nombre
- (Sous-étape 2) Si le nombre est trop grand l'ordinateur répond « au dessus »
- (Sous-étape 3) Si le nombre est trop petit, il répond « en dessous »
- (Sous-étape 4) Si l'utilisateur trouve ce nombre, l'ordinateur répond « gagné ! »

Exercice 5

Créer un tel programme avec la `TI`.
Pour créer un nombre au hasard, on utilisera la syntaxe `EntAlea(1,1000)`, la fonction `EntAlea` se trouvant dans `math` puis `PRB` .

C.2.4 La dichotomie

L'idée de la dichotomie[2] est exactement basée sur l'exemple du jeu de devinette précédent : il consiste à chercher la solution d'un problème par tâtonnement. En pratique, la stratégie consiste

- à identifier un intervalle où se trouve la solution,
- puis, autant de fois que nécessaire, à couper l'intervalle de recherche en deux et à déterminer dans lequel des deux sous-intervalles se trouve la solution.

Avant d'aller plus loin, on précise le principe général de cet algorithme et on donne deux éléments de vocabulaire.

On dit que d est une *approximation par défaut* d'un nombre x lorsque $d \leq x$.
On dit que e est une *approximation par excès* d'un nombre x lorsque $e \geq x$.
Un algorithme de *dichotomie* est un algorithme qui permet de trouver un encadrement $[d;e]$ d'un nombre avec une précision définie par avance en répétant les étapes suivantes :

(Étape 0) On teste si la moyenne $m = \dfrac{d+e}{2}$ est une approximation par défaut ou par excès du nombre cherché.

(Étape 1) En fonction du test précédent, on remplace d ou bien e par m.

Dans un algorithme de dichotomie, la précision de l'encadrement est contrôlée par la valeur de $e - d$; ce qui correspond à la « largeur » de l'intervalle $[d;e]$.

Tout l'enjeu de la dichotomie est donc de définir le test permettant de déterminer si m est supérieur ou inférieur à la valeur recherchée.

2. Ce terme grec signifie « division en deux parties égales ».

Voilà un exemple concret d'application de la dichotomie :
On suppose que l'on cherche une solution de l'équation $10^x = 24$, avec une précision de 10^{-5}, sans utiliser le logarithme népérien.
La fonction $\phi : x \mapsto 10^x$ étant strictement croissante, on déduit l'équivalence :
m est une approximation par excès de $x \iff \phi(m) \geq \phi(x) \iff 10^m \geq 24$.
Cette équivalence fournit un test permettant de savoir si m est une approximation par excès ou non.

Par ailleurs, on sait que $10^1 < 24 < 10^2$. Ainsi, on dispose de valeurs initiales pour d et e. Finalement, l'algorithme de dichotomie s'écrira :

On affecte la valeur 1 à d
On affecte la valeur 2 à e
On affecte la valeur $1,5$ à m
Tant que $e - d > 10^{-5}$:
    Si $10^m > 24$:
        On affecte la valeur de m à e.
    Sinon:
        On affecte la valeur de m à d.
    Fin si
    On calcule $\dfrac{d+e}{2}$ et on affecte cette valeur à m.
Fin tant que
On affiche les valeurs de d et e.

Exercice 6

Implémenter et tester cet algorithme à la `TI`.

Exercice 7

En s'inspirant de cet exemple, implémenter un algorithme qui détermine avec une précision de 10^{-3} *la solution appartenant à* $[0;\pi]$ *de l'équation* $\cos(x) = \dfrac{1}{4}$ *sans utiliser la fonction* arccos.

Ici, le test permettant de savoir si m est une approximation par défaut ou excès est donné par le sens de variation de la fonction.

Table des matières