Devoir sur table du 2 octobre 2016
Terminale ES
Corrigé

Problème — d'après le baccalauréat

Une entreprise fabrique et commercialise un alliage métallique. Chaque mois, elle peut produire jusqu'à 10 tonnes de cet alliage et en vend toute la production.

Partie A - Étude du coût total et de la recette

Le coût total de production de x tonnes de l'alliage, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction C dont l'expression est

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 135$$

où x appartient à l'intervalle $[0;\ 10]$.
La courbe Γ, représentant la fonction C dans un repère du plan, est donnée sur **l'annexe à rendre avec la copie**.

1. Donner par lecture graphique :
   (a) le coût total d'une production de 4 tonnes ;

   > **Solution:** On lit l'ordonnée du point d'abscisse 4. Le coût est de 200 k€.

   (b) la quantité correspondant à un coût total de production de 600 milliers d'euros.

   > **Solution:** On lit les abscisses des points d'ordonnée 600. Ce coût correspond à 4 tonnes.

2. Déterminer par le calcul :
   (a) le coût total de production de 6 tonnes de l'alliage.

   > **Solution:** On calcule $C(6)$. Avec la calculatrice, on obtient un coût de 279 k€.

   (b) le coût moyen de production d'une tonne lorsque l'entreprise produit 6 tonnes.

   > **Solution:** Le coût moyen par tonne, lorsque l'entreprise produit 6 tonnes, est $\dfrac{C(6)}{6} = 46,5$ k€.

3. Après une étude de marché, le prix de vente de l'alliage produit a été fixé à 60 milliers d'euros la tonne.
   (a) Calculer la recette pour la vente de 5 tonnes d'alliage.

Solution: Compte-tenu du prix de vente, la recette, pour 5 tonnes vendues, est de $5 \times 60 = 300$ k€.

(b) On note R la fonction qui modélise la recette, exprimée en milliers d'euros, pour x tonnes vendues. Donner une expression de $R(x)$ en fonction de x.

Solution: $R(x) = 60x$.

(c) Représenter graphiquement la fonction R sur l'intervalle $[0;\ 10]$, dans le même repère que la courbe Γ sur l'annexe.

Solution: La courbe de cette fonction est une droite qui passe par l'origine. On sait d'après ce qui précède que le point de coordonnées $(5;\ 300)$ est sur la droite, ce qui permet de la tracer.

(d) Pour quelles valeurs de x l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ? *Raisonner à l'aide du graphique.*

Solution: L'entreprise réalise un bénéfice lorsque $R(x) \geq C(x)$. Cela correspond aux abscisses des points de la courbe de R situés « au dessus » de la courbe de C.
On lit qu'elle doit produire et vendre entre 3 et 8,4 tonnes pour dégager un bénéfice.

Partie B - Étude algébrique du bénéfice

On note B la fonction qui modélise le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, sur l'intervalle $[0;\ 10]$.

1. Montrer que l'expression de $B(x)$, lorsque x appartient à l'intervalle $[0;\ 10]$ est :

$$B(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 135.$$

Solution: Pour tout x compris entre 0 et 10, l'expression de $B(x)$ est :

$$\begin{aligned} B(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 60x - \left[x^3 - 6x^2 + 24x + 135\right] \\ &= 60x - x^3 + 6x^2 - 24x - 135 \\ &= -x^3 + 6x^2 + 36x - 135 \end{aligned}$$

Cela correspond bien à l'expression proposée.

2. On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Calculer $B'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0;\ 10]$.

Solution: Pour tout x compris entre 0 et 10, on a :

$$B'(x) = -3x^2 + 6 \times (2x) + 36 = -3x^2 + 12x + 36$$

3. On admet que $B'(x)$ peut s'écrire

$$B'(x) = (x+2)(18-3x).$$

Étudier le signe de B' et en déduire les variations de B sur l'intervalle $[0;\ 10]$.

> **Solution:** Nous allons établir le tableau de signes de B' puis le tableau de variations de B.
> Il y a deux facteurs dans l'expression factorisée de B'. Étudions le signe de chacun des facteurs :
>
> $$\begin{aligned} x+2 \text{ est positif} &\iff x+2>0 \\ &\iff x>-2 \\ 18-3x \text{ est positif} &\iff 18-3x>0 \\ &\iff 18>3x \\ &\iff 6>x \end{aligned}$$
>
> Finalement, on peut dresser le tableau :
>
> | x | 0 | | 6 | | 10 |
> |---|---|---|---|---|---|
> | $x+2$ | | $+$ | | $+$ | |
> | $18-3x$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
> | $B'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
> | $B(x)$ | -135 | $\nearrow$ | 81 | $\searrow$ | -175 |
>
> On a obtenu $B(6)$ et $B(10)$ à l'aide de la calculatrice.

4. Déterminer la quantité d'alliage à produire pour réaliser un bénéfice maximal.

> **Solution:** Il faut produire et vendre 6 tonnes d'alliage pour obtenir un bénéfice maximal.

5. Déduire de ce qui précède que l'équation $B(x) = 0$ possède deux solutions sur l'intervalle $[0;\ 10]$.
On notera α et β ces deux solutions.

> **Solution:** Sur l'intervalle $[0;\ 6]$:
> - la fonction B est continue,
> - la fonction B est strictement croissante,
> - 0 appartient à l'intervalle $[-135;\ 81]$.
>
> Par application du théorème des valeurs intermédiaires, 0 possède un unique antécédent par B sur cet intervalle.
> Avec des arguments similaires, sur l'intervalle $[6;\ 10]$, 0 possède un autre unique antécédent par B.
> Finalement, il y a bien deux antécédents de 0 par B sur $[0;\ 10]$.

6. Donner des encadrements à 10^{-2} de α et β. En déduire une estimation plus précise de la fourchette de rentabilité.

> **Solution:** À l'aide de la calculatrice, on obtient $\alpha = 3$ et $\beta \in [8,37;\ 8,38]$.
> La fourchette de rentabilité correspond donc environ à l'intervalle $[3;\ 8,37]$

Exercice — d'après le baccalauréat

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-5;\ 3]$ dont la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ est donnée sur **l'annexe à rendre avec la copie**.

Soit A le point de $\mathcal{C}_f$ de coordonnées $(0;\ -3)$, B et C les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectivement égales à 1 et à -3. La tangente T_0 en A à $\mathcal{C}_f$ passe par le point C. Les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points B et C sont horizontales.

1. Donner les valeurs
   (a) de $f(1)$

   > **Solution:** $\boxed{f(1) \simeq -4,6}$.

   (b) du nombre dérivé de f en 1.

   > **Solution:** Le nombre dérivé en 1 de la fonction f est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en 1 ; cette tangente est horizontale, donc a pour coefficient directeur 0.
   > $\boxed{f'(1) \simeq 0}$.

2. Déterminer une équation de la tangente T_0.

   > **Solution:** Une équation de la tangente en un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a est :
   > $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
   > La tangente T_0 a donc pour équation
   > $y = f'(0)x + f(0)$.
   > $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en 0, qui passe par les points C(-3 ; 8) et A(0 ; -3).
   > $f'(0) = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{6-(-3)}{-3-9} = \dfrac{9}{-3} = -3.$
   > T_0 a donc pour équation $\boxed{y = -3x - 3}$.

3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Dresser le tableau de signes de f' sur l'intervalle $[-5;\ 3]$.

   > **Solution:** Le signe de la dérivée est donné par le sens de variation de la fonction. Par lecture graphique, on obtient :

x	-5		-3		1		3
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Annexe du problème