
Activité n° 6: Méthode de balayage et algorithme de dichotomie



L'objectif de cette activité est d'explorer des méthodes permettant d'obtenir des approximations d'antécédents à la calculatrice. La première partie nécessite une connaissance des tableaux de valeurs ; la seconde, plus technique, nécessite de savoir écrire un algorithme.

Dans toute cette activité on s'intéresse à la fonction g qui à tout nombre associe $g(x) = x^3$.

Partie A : Méthode par balayage

L'objectif de cette partie est de déterminer une approximation d'un antécédent de 10 par g .

(Question 1) Établir le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[-10; 10]$.

(Question 2) Prouver que le nombre 10 admet un unique antécédent par g sur l'intervalle $[-10; 10]$.
On notera α cette antécédent.

(Étape 1) Faire un tableau de valeurs de la fonction g entre 0 et 10 avec un pas de 1.

(Question 3) En déduire un encadrement de α par deux entiers consécutifs.

(Question 4) En modifiant le pas de la table, déterminer un encadrement de α au centième près.

Partie B : Algorithme de Dichotomie

le mot dichotomie signifie « couper en deux parties égales. » Le principe de cet algorithme est de trouver automatiquement une approximation de l'antécédent aussi précise qu'on le souhaite sans avoir recours aux tableaux de valeurs.

Au début de l'algorithme, on part d'un intervalle dans lequel on est certain que se trouve l'antécédent recherché.

Puis, on coupe cet intervalle en deux et on cherche à déterminer si l'antécédent est dans le premier sous-intervalle ou bien dans le second. On réitère ces opérations jusqu'à obtenir un intervalle aussi étroit qu'on le souhaite dans lequel se trouve l'antécédent.

À chaque étape l'algorithme va donc utiliser trois variables :

- le début de l'intervalle, noté a
- la fin de l'intervalle, noté b
- le milieu de l'intervalle, noté m

(Question 5) Donner la formule permettant d'obtenir m en fonction de a et b .

L'objectif de cette partie est de déterminer une approximation d'un antécédent de 100 par g .
On notera β cet antécédent.

Amorce de l'algorithme

(Question 6) Montrer que β est situé dans l'intervalle $[0; 10]$.

On pose ainsi $a = 0$, $b = 10$ et $m = 5$.

(Question 7) Prouver que β est situé dans l'intervalle $[a; m]$. *On justifiera par un calcul.*

On considère donc maintenant l'intervalle $[a; m]$. On remplace ainsi b par m , puisque m est la fin du nouvel intervalle considéré.

(Question 8) Quelle est la nouvelle valeur de m ?

Algorithme

La suite d'étapes réalisées plus haut est le début de l'algorithme de dichotomie. En fait, il faut imaginer qu'on poursuit cet algorithme aussi longtemps que nécessaire.

Ainsi, on souhaite reproduire un certain nombre de fois la séquence d'opérations décrites plus bas :

```
1: Si  $\beta$  est situé dans  $[a; m]$ :  
2: On remplace  $b$  par  $m$ .  
3: Sinon:  
4: On remplace  $a$  par  $m$ .  
5: Fin si  
6: On remplace  $m$  par  $\frac{a+b}{2}$ 
```

(Question 9) Quel test simple permet de savoir si β est inférieur à m ?



Pour répéter un grand nombre de fois une séquence d'opérations, on utilise une boucle pour ou une boucle tant que.

Ainsi l'algorithme que nous souhaitons réaliser s'écrira de la manière suivante :

```
1: On affecte la valeur 0 à  $a$   
2: On affecte la valeur 10 à  $b$   
3: On affecte la valeur 5 à  $m$   
4: Pour  $i$  compris entre 1 et 10:  
5: Si ..... :  
6:     On remplace  $b$  par  $m$ .  
7: Sinon:  
8:     On remplace  $a$  par  $m$ .  
9: Fin si  
10: On remplace  $m$  par .....  
11: Fin pour  
12: On affiche les valeurs de  $a$  et  $b$ .
```

(Question 10) Recopier cet algorithme écrit en langage naturel et compléter les

(Question 11) Écrire ce programme à la calculatrice. Donner les valeurs finales de a et b .