Exercices de TSI 1

2018

Planche n° 1: Pour s'entraîner à la plage

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

(a) $x^2 + 1 = 2x$; (b) $x^2 - x = \sqrt{2}(x+1)$; (c) $(x+1)(x^2+2x-3) = 0$;

(d) $x^3 = x$; (e) $x^3 - 39x + 70 = 0$; (f) $x^3 + 6 = 3x + 2x^2$;

(g) $x^3 - 2x = x^2 - 2$; (h) $x^3 + 2x^2 - x = 2$; (i) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$;

(j) $x^4 = 2x^2$; (k) $x^4 = 1$; (l) $x^4 + 1 = 0$;

(m) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$; (n) $(x^3 - x)^2 - x^2 = 0$; (o) $\dfrac{1}{x} = 2x + 1$;

(p) $x^2 = \dfrac{2}{x+1}$; (q) $\dfrac{x-2}{x+2} - \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{18}{x^2-4}$; (r) $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 - \left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2 = 0$.

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $6x + 5 < -4x + 3$; (b) $3x + 2 \geq 5x - 1$; (c) $x^2 < 4x$;

(d) $(x+5)(x-2) \leq 0$; (e) $x(x+2) \leq 2x + 6$; (f) $x^3 < x$;

(g) $x^4 \geq x^2$; (h) $(x^2 + x + 1)^2 - 4(x^2 - x + 1)^2 > 0$; (i) $x^4 + 2x^2 - 3 < 0$;

(j) $\dfrac{4}{x-1} - \dfrac{3}{x+2} > 0$; (k) $\dfrac{x}{2-x} < 1$; (l) $\dfrac{4-x}{7+x} \leq -1$;

(m) $\dfrac{2x+1}{x+1} \geq x$; (n) $\dfrac{x-2}{2x-2} < \dfrac{x-1}{x-5}$; (o) $\dfrac{x+3}{x-3} - \dfrac{x-3}{x+3} \leq \dfrac{36}{x^2-9}$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous de paramètre réel m :

(a) $(m-1)x + 1 = 0$; (b) $2mx - 3 = x + 5m$; (c) $x^2 + mx - 2m^2 = 0$;

(d) $x^4 + 2mx^2 + 1 = 0$; (e) $\dfrac{2x+1}{x+3} = m$; (f) $\dfrac{x-2m}{mx+5} = m - 1$.

Exercice 4

Déterminer selon les valeurs du réel m le signe des trinômes suivants :

(a) $2x^2 - mx - m^2$; (b) $mx^2 + 2(2m+1)x + 1$.

Exercice 5

Comparer les expressions A et B suivantes :

(a) $A = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, $B = \sqrt{2} - 1$; (b) $A = \sqrt{7} + 3$, $B = \sqrt{3} + 4$; (c) $A = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $B = 2$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

(a) $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3}$; (b) $\sqrt{x^2-3x-3} = x+2$; (c) $\sqrt{1-2x} = x+1$;

(d) $\sqrt{x+1} < \sqrt{3-2x}$; (e) $\sqrt{x^2+5x+3} < x+2$; (f) $2-x < \sqrt{x+1}$.

Exercice 7

On rappelle que la *valeur absolue* d'un réel x est définie par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$ Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a) $|x| = 3$;
(b) $|x| = -2$;
(c) $|x| \leq 3$;
(d) $|x| \geq 3$;
(e) $|x| \geq -2$;
(f) $|x| - 2 \leq 4$;
(g) $|x-2| \leq 4$;
(h) $|x-2| \leq -4$;
(i) $|x^2-4| = 2$;
(j) $|x^2-8x+11| = 4$;
(k) $|x^2-8x+11| < 4$;
(l) $|x+1| = |2x-3|$;
(m) $|1-2x| = x+1$;
(n) $|x^2-3x-3| = x+2$;
(o) $|x^2+5x+3| < x+2$;
(p) $2-x < |x+1|$;
(q) $|x| + |x+1| = 2$;
(r) $|x-7| + |x-2| \leq 3$.

Exercice 8

Remplir le tableau suivant.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$					
$\cos x$					
$\tan x$					

Exercice 9

1. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. En remarquant que $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, calculer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

(a) $\sin(2x) = \sin(x)$; (b) $\cos(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(c) $\cos(x) = \sin(3x)$; (d) $\sin(x) = -\cos(x)$;

(e) $\tan(3x - \pi/5) = \tan(x + 4\pi/5)$; (f) $\sin(2x)(\sqrt{3} + 2\sin(2x)) = 0$;

(g) $\cos^2(x) - \frac{3}{2}\cos(x) + \frac{1}{2} = 0$; (h) $\cos(2x) + \cos(x) = 0$;

(i) $\cos(2x) - 3\cos(x) + 2 = 0$; (j) $\cos(2x) - \sin(x) = 1$;

(k) $1 + \sqrt{3}\sin(2x) - \cos(4x) = 0$; (l) $\sqrt{3}\tan(x) + 4\sin^2(x) = 0$;

(m) $\sin(2x) + \sin(6x) = \sin(4x)$; (n) $6\cos(2x) - 1 = 6\tan^2(x)$;

(o) $\cos(x) > \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; (p) $\sqrt{3 - 4\cos^2(x)} > 1 + 3\sin(x)$.

Exercice 11

Déterminer l'ensemble de définition, puis calculer la dérivée des fonctions suivantes.

(a) $f_1 : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-1}$;

(b) $f_2 : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$;

(c) $f_3 : x \mapsto \cos(2x) - \sin(3x)$;

(d) $f_4 : x \mapsto \exp(x^2 - 1)$;

(e) $f_5 : x \mapsto \dfrac{\cos^5(x)}{\ln x}$.

Exercice 12

On se place dans le plan complexe. Dans les cas suivants, préciser l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie l'équation ou le système d'équations. On pourra s'aider de dessins.

(a) $|z + \mathrm{i}| = 1$

(b) $|z| = |z - 1|$

(c) $\left\{ \begin{array}{lcl} \arg\left(z + \frac{1}{2};\ 1\right) & = & \frac{-\pi}{2} \\ |z| & = & 1 \end{array} \right.$

(d) $|z| = |z - 1| = 1$

Corrigé de la planche n° 2: Pour s'entraîner à la plage

Exercice 1

Voici les solutions de ces équations :

(a) $\{1\}$;

(b) $\left\{\dfrac{\sqrt{2}+1+\sqrt{6\sqrt{2}+3}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}+1-\sqrt{6\sqrt{2}+3}}{2}\right\}$;

(c) $\{-1;\ 3\}$;

(d) $\{0;\ -1;\ 1\}$;

(e) $\{2;\ 5;\ -7\}$;

(f) $\left\{2;\ -\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right\}$;

(g) $\left\{1; -\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right\}$;

(h) $\{1;\ -1;\ -2\}$;

(i) $\{1\}$;

(j) $\left\{0;\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2}\right\}$;

(k) $\{1;\ -1\}$;

(l) $\varnothing$;

(m) $\left\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3};\ -1;\ 1\right\}$;

(n) $\left\{0;\ -\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right\}$;

(o) $\left\{\dfrac{1}{2};\ -1\right\}$;

(p) $\{1\}$;

(q) $\left\{-\dfrac{9}{4}\right\}$;

(r) $\{0\}$.

Exercice 2

Voici les solutions de ces inéquations :

(a) $\left]-\infty;\ -\dfrac{1}{5}\right[$;

(b) $\left]-\infty;\ \dfrac{3}{2}\right]$;

(c) $]0;\ 4[$;

(d) $[-5;\ 2]$;

(e) $]-\sqrt{6};\ \sqrt{6}]$;

(f) $]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]0;\ 1[$;

(g) $]-\infty;\ -1[\ \cup \{0\} \cup [1;\ +\infty[$;

(h) $\left]\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$;

(i) $]-1;\ 1[$;

(j) $]-11;\ -2[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$;

(k) $]-\infty;\ 1[\cup]2;\ +\infty[$;

(l) $]-\infty;\ -7[$;

(m) $]-\infty;\ -1] \cup \left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$;

(n) $\left]-\infty;\ \dfrac{-\sqrt{41}-3}{2}\right[\cup \left]1;\ \dfrac{\sqrt{41}-3}{2}\right[\cup]5;\ +\infty[$;

(o) $]-\infty;\ -3[$.

Exercice 10

On donne les mesures principales des solutions, toutes définies à un multiple entier de 2π près.

a) $\left\{0;\ \pi;\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right\}$

b) $\left[\frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6}\right]$

c) $\left\{\frac{-7\pi}{8};\ \frac{-3\pi}{8};\ \frac{\pi}{8};\ \frac{5\pi}{8};\ \frac{-3\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right\}$

d) $\left\{\frac{-\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right\}$

e) $\left\{\frac{-\pi}{2};\ 0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi\right\}$

f) $\left\{\frac{-\pi}{2};\ 0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}\right\}$

g) $\left\{0;\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right\}$

h) $\left\{\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{\pi}{3};\ \pi\right\}$

i) $\left\{0;\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right\}$

j) $\left\{\frac{-5\pi}{6};\ \frac{-\pi}{6};\ \pi\right\}$

k) $\left\{\frac{-\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{-\pi}{2};\ \frac{-\pi}{2};\ \pi\right\}$

l) $\left\{\frac{-\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ 0;\ \pi\right\}$

m) $\left\{\frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{-5\pi}{6};\ \frac{\pi}{6};\ \frac{-3\pi}{4};\ \frac{-\pi}{2};\ \frac{-\pi}{4};\ 0;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4};\ \pi\right\}$

n) $\left\{\frac{-5\pi}{6};\ \frac{\pi}{6};\ \frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right\}$

o) $\left[\frac{-11\pi}{12};\ \frac{\pi}{12}\right]$

p) $\left[\frac{-5\pi}{6};\ \frac{-\pi}{6}\right]$

Planche n^{o} 2: Logique

Exercice 1

Soient P et Q deux propositions. Montrer, en écrivant les tables de vérité, que les propositions « $P \Longrightarrow Q$ » et « non P ou Q » sont équivalentes.
De même, montrer que les propositions « $P \Longleftrightarrow Q$ » et « $(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$ »sont équivalentes.

Exercice 2

Soient P, Q et R trois propositions. À l'aide de tables de vérités, montrer les équivalences des propositions suivantes :

a) $(P \vee Q) \Longrightarrow R$ et $(P \Longrightarrow R) \wedge (Q \Longrightarrow R)$

b) $(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R) \wedge (R \Longrightarrow P)$ et $(P \Longleftrightarrow Q) \wedge (Q \Longleftrightarrow R)$

Exercice 3

Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux puis écrire la négation de ceux qui sont faux.

(a) $1 + 1 = 2$ et $5 + 2 = 6$

(b) $1 + 1 = 2$ ou $5 + 2 = 6$

(c) $1 + 1 = 2 \Longrightarrow 5 + 2 = 6$

(d) $5 + 2 = 6 \Longrightarrow 1 + 1 = 2$

(e) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2$

(f) $\exists x \in \mathbb{R}, x \neq 2$

(g) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

(h) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1$

(i) $\exists y \in]0, +\infty[, \ln y = 1$

(j) $\exists! z \in \mathbb{R}, \cos z = 0$

(k) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$

(l) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \geq -x^2$

(m) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \geq -x^2$

(n) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \geq -x^2$

(o) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \geq -x^2$

Exercice 4

Soit x un réel. Dans chacun des cas suivants, écrire le lien logique entre les deux propriétés (sens de l'implication ou équivalence).

a) $x^2 = 1$ et $x = 1$;

b) $x \geq 1$ et $x \geq 2$;

c) $x \leq 1$ et $x = 1$;

d) $x > 1$ et $x = 1$;

e) $x + 3 \geq 4$ et $x \geq 1$;

f) $x^3 = 2x^2$ et $x = 2$;

g) $x \leq -2$ et $x^2 \geq 4$;

h) $x \geq 2$ et $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$;

i) $x \leq -1$ et $\dfrac{1}{x} \geq -1$;

j) $x \geq 3$ et $x^2 \geq 3x$;

k) $x \geq -3$ et $x^2 \geq -3x$.

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, comprendre le sens des deux phrases proposées et déterminer leur valeur de vérité.

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, n \leq N$.
   (b) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, n \leq N$.

2. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)$.
   (b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$.

Exercice 6

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.

1. Traduire les propositions suivantes en langage naturel et les interpréter.
   (a) $\forall u, v \in \mathbb{R},\, u \leq v \Longrightarrow f(u) \leq f(v)$
   (b) $\exists x_0 \in \mathbb{R} / \, \forall x \in \mathbb{R},\, f(x) \leq f(x_0)$
   (c) $\exists x_0 \in \mathbb{R} / \, f(x_0) = 1$
   (d) $\forall x \in \mathbb{R},\, f(x) \neq 0$
2. En s'inspirant de la question précédente, traduire les propositions suivantes en langage formel (à l'aide des quantificateurs)
   (a) N'importe quel nombre compris entre 2 et 3 possède un antécédent par f.
   (b) f est une fonction constante.
   (c) f n'est pas une fonction constante.
   (d) f est une fonction polynôme du second degré.
   (e) f est décroissante.

Exercice 7

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Écrire en langage formel les propositions suivantes :

(a) A et B ne sont pas disjointes.
(b) Il y a un et un seul élément commun à A et B.
(c) A n'est pas incluse dans B.
(d) A et B sont complémentaires.

Exercice 8

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer les propositions suivantes :

(a) $(A^c)^c = A$.
(b) $A \subset B \Longrightarrow B^c \subset A^c$.
(c) $A \cap B^c = A \cap C^c \Longleftrightarrow A \cap B = A \cap C$.
(d) $((A \cap B) \subset (C \cap B)) \wedge ((A \cup B) \subset (C \cup B)) \Longrightarrow (A \subset C)$.
(e) $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A$.

Exercice 9

Soient x et y deux nombres réels. Montrer :

(a) $x + y \geq 1 \Longrightarrow ((x \geq 1/2)$ ou $(y \geq 1/2))$.
(b) $x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow ((x = 0)$ et $(y = 0))$.

Indication: On pourra raisonner par contraposée. Les propositions réciproques sont-elles vraies ?

Exercice 10

Montrer qu'un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair. Quelle proposition peut-on en déduire concernant les nombre impairs ?

Exercice 11

Nadia est prisonnière d'un roi logicien qui lui propose comme défi de deviner la couleur des cheveux de ses enfants. Il aligne donc devant elle ses cinq enfants, cheveux cachés et lui annonce :
« Parmi mes enfants, trois sont blonds et les autres sont bruns. Ceux qui sont blonds mentent toujours tandis que les bruns disent toujours la vérité. Pourras-tu en un minimum de questions, deviner la couleurs des cheveux de mes enfants ? »

Nadia accepte le défi, se présente devant le premier enfant et lui demande « de quelle couleur sont tes cheveux ? »
Cet enfant lui répond en langage des signes, langue que Nadia ne maîtrise pas mais que connaissent les autres frères.
Puis elle se présente devant le second enfant et lui demande « qu'a répondu ton frère ? ». Celui-ci dit « il a répondu "mes cheveux sont blonds." »
Enfin, elle va vers le troisième enfant et lui demande « quelle est la couleur des cheveux des deux personnes précédentes ? ». Celui-ci répond « la première a les cheveux bruns tandis que la seconde est blonde. »

Nadia annonce alors au roi connaître la couleur des cheveux de tous ses enfants. Comment est-ce possible ?

Planche n° 3: Applications et dénombrement

Exercice 1

Soient f et g les fonctions réelles à valeurs réelles définies par $f(x) = x+1$ et $g(x) = \dfrac{x^2+x}{x}$. Les fonctions f et g sont-elles égales ?

Exercice 2

1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array} \right.$. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Mêmes questions pour l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{array} \right.$
3. Déterminer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 3

(Démonstration d'un théorème du cours)
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Montrer que f est bijective et que g est la réciproque de f.

Exercice 4

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective sur E. Montrer que f est injective sur E.
   L'application g est-elle nécessairement injective ?
2. On suppose que $g \circ f$ est surjective de E sur G. Montrer que g est surjective de F sur G.
   L'application f est-elle nécessairement surjective ?
3. Soit $h : G \longrightarrow H$ une application.
   Montrer que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g et h sont bijectives.
4. Soit $\varphi : E \longrightarrow E$ une application telle que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_E$ (on dit que φ est *involutive*).
   Montrer que φ est bijective. Que vaut sa réciproque φ^{-1} ?

Exercice 5

Soient $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} n-1 & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$.

Montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Peut-on en déduire que l'application g est la réciproque de f ?

Exercice 6

1. Déterminer l'image directe par la fonction sinus de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $[0, 2\pi]$,$[0, \pi/2]$, $[-\pi, \pi/2]$.
2. Déterminer l'image réciproque par la fonction sinus de $[-1, 1]$, $[0, 1]$,$[3, 4]$, $\mathbb{R}$, $\{1\}$, $\{-1, 1\}$.

Exercice 7

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2 - 4x + 1 \end{array} \right.$.

1. La fonction f est-elle injective sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que f est injective sur $[1, +\infty[$. En déduire que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur son image (que l'on précisera) et déterminer son application réciproque.
3. Déterminer $f([0,1])$, $f(\mathbb{R}_-)$, $f(\mathbb{R}_+)$, $f([-2,2])$, $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}([0,1])$, $f^{-1}([-2,1])$.

Exercice 8

Dans un sac contenant n billes numérotées, on prélève k billes (avec $k \leq n$) simultanément.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages possibles :
   (a) contenant la bille 1 ;
   (b) ne contenant pas la bille n° 1.
3. Quel résultat retrouve-t-on ?

Exercice 9

Soient A, B et C trois ensembles finis. Montrer que l'on a

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C).$$

Application. Dans un lycée, il y a 800 élèves. 300 sont des garçons, 352 font partie d'une association, 424 étudient l'anglais, 188 garçons font partie d'une association, 166 garçons étudient l'anglais, 208 font partie d'une association et étudient l'anglais, 144 garçons étudient l'anglais et font partie d'une association. Combien y a-t-il de filles qui ne font pas partie d'une association et n'étudient pas l'anglais ?

Exercice 10

Une course oppose 12 hommes d'affaire.

- Déterminer le nombre de tiercés possibles (l'ordre est important).
- Déterminer le nombre de trios possibles (l'ordre n'est pas pris en compte).

Exercice 11

On colore les faces d'un cube en rouge puis on découpe ce cube en 27 petits cubes de même taille que l'on place dans un sac.

1. Faire l'inventaire des petits cubes selon le nombre de faces colorées.
2. On tire avec remise 3 petits cubes. Déterminer le nombre de tirages donnant :
   (a) exactement 3 cubes ayant chacun deux faces rouges ;
   (b) exactement 2 cubes ayant chacun deux faces rouges ;
   (c) exactement 1 cube possédant deux faces rouges ;
   (d) un nombre total de faces rouges égal à quatre.

Exercice 12

Soit E l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun 1.

1. Déterminer le cardinal de E.
2. Déterminer le cardinal de E_1, la partie de E constituée des nombres ayant 7 chiffres différents.
3. Déterminer le cardinal de E_2, la partie de E constituée des nombres pairs.
4. Déterminer le cardinal de E_3, la partie de E constituée des nombres dont la suite des chiffres (dans l'ordre où ils sont écrits) est strictement croissante.

Exercice 13

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

1. sans imposer de contraintes sur les cartes ?
2. contenant 5 cœurs ou 5 trèfles ?
3. contenant 2 cœurs et 3 trèfles ?
4. contenant au moins un as ?
5. contenant au plus un as ?
6. contenant 2 as et 3 cœurs ?

Exercice 14

On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique et 3 de SI. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement

1. si les livres doivent être groupés par matières ?
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés ?

Exercice 15

Déterminer le nombre d'anagrammes des mots « maths », « rire » et « ananas ».

Exercice 16

Combien y a-t-il de façons de ranger p couteaux (identiques) dans n tiroirs ?

Exercice 17

Vous êtes 26 élèves dans la classe. Je parie que deux d'entre vous (au moins) ont la même date d'anniversaire. Quelles sont mes chances d'avoir raison ?

Exercice 18

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Déterminer le nombre de parties de E de cardinal pair (proposer une conjecture et la démontrer par récurrence).

Exercice 19

Soit E un ensemble fini. Calculer $\displaystyle\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}(A)$.

Exercice 20

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On note $S(n,p)$ le nombre de surjection d'un ensemble de cardinal n dans un ensemble de cardinal p.

1. Calculer $S(n,p)$ pour $p > n$, $S(n,n)$, $S(n,1)$, $S(n,2)$.
2. Calculer $S(n+1,n)$.
3. Démontrer que pour tout $n > 1$ et tout $p > 1$, on a $S(n,p) = pS(n-1,p) + S(n-1,p-1)$.

Planche n$^{\text{o}}$ 4: Géométrie du plan

Exercice 0

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
Déterminer les coordonnées polaires des points suivants. *On pourra utiliser la fonction* arctan.

$$A\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$
$$D\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix} \qquad E\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-3\end{pmatrix} \qquad F\begin{pmatrix}1/2\\1/3\end{pmatrix}$$
$$G\begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix} \qquad H\begin{pmatrix}\sqrt{3}/5\\1/\left(10\sqrt{3}\right)\end{pmatrix} \qquad I\begin{pmatrix}-1/2\\-1/3\end{pmatrix}$$

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère quelconque $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et le point $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

1. Justifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de A dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère quelconque $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et le point $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

1. Justifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. On cherche à déterminer les valeurs de x et y telles que $x\vec{u}+y\vec{v}=\overrightarrow{OA}$
   (a) Montrer que pour tout x et y, $x\vec{u}+y\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.
   (b) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont-ils colinéaires ?
   (c) Conclure quant au nombre de solutions $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de ce problème.
3. On cherche à résoudre le système
$$\begin{cases} x+2y &= 2\\ 2x+4y &= 3\end{cases}$$
   (a) Montrer que ce système est équivalent au problème posé à la question précédente puis le résoudre.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère quelconque $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 2x+3y &= 4\\ x-y &= 1\end{cases}$$

1. Montrer que résoudre ce système est équivalent à trouver les valeurs de x et y telles que $x\vec{u}+y\vec{v}=\overrightarrow{OA}$. On précisera les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et A.
2. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
3. Résoudre le système.

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le point $\Omega(-1,1)$ et les vecteurs $\vec{u}(1,2)$ et $\vec{v}(3,-2)$.

1. Montrer que $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ est un repère. Est-il orthonormal ? direct ?
2. On note $\vec{a}$ le vecteur de coordonnées $(2,2)$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$. Déterminer les coordonnées de $\vec{a}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
3. On note A le point de coordonnées $(1,2)$ dans $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$.. Déterminer les coordonnées de B dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
4. On note $\vec{b}$ le vecteur de coordonnées $(2,2)$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.
5. On note B le point de coordonnées $(2,-3)$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer les coordonnées de B dans $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$.
6. Déterminer une équation dans $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ du cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 5

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On note $\vec{u}_\theta$ et $\vec{v}_\theta$ les vecteurs de coordonnées respectives $(\cos\theta,\sin\theta)$ et $(-\sin\theta,\cos\theta)$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Montrer que $(\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta)$ est une base orthonormale directe du plan.
2. Soit M un point. On note (x,y) ses coordonnées dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et (x_θ,y_θ) ses coordonnées dans $(O,\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta)$. .
   (a) Exprimer x et y en fonction de x_θ et y_θ.
   (b) Exprimer x_θ et y_θ en fonction de x et y .

Exercice 6

On munit le plan d'un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$. On considère les points $A(1,3)$, $B(3,2)$, $C(2,2)$, $D(1,1)$, $E(-1,1)$ et $F(1,0)$. Déterminer les produits scalaires et les déterminants suivants :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE},\quad \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{DE}),\quad \det(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BE}),\quad \det(\overrightarrow{BE}-7\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}),\quad \det(2\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC},\overrightarrow{EF}).$$

Exercice 7

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
Soient les points $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC issue du point C.
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[BC]$.
3. Déterminer une équation paramétrique de la médiane issue de C.

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne ainsi qu'une représentation paramétrique de la droite considérée :

1. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par le point $A(4,3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u_1}(1,1)$.
2. $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par le point $B(5,7)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u_2}(2,3)$.
3. $\mathcal{D}_3$ est la droite passant par le point $C(0,3)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n_3}(2,2)$.
4. $\mathcal{D}_4$ est la droite passant par le point $D(-2,-1)$ et orthogonale au vecteur $\vec{n_4}(-1,3)$.
5. $\mathcal{D}_5$ est la droite passant par les points de coordonnées $E(-4,1)$ et $F(0,2)$.

Exercice 9

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère le point $M(-1,1)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de M sur

1. $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $3x - 2y + 1 = 0$;
2. $\mathcal{D}_2$ la droite passant par le point $A(-1,2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u_1}(1,1)$;
3. $\mathcal{D}_3$ la droite passant par le point $B(3,4)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}(2,2)$;
4. $\mathcal{D}_4$ la droite passant par les points de coordonnées $C(-4,1)$ et $D(0,2)$.

Exercice 10

Calculer la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ dans les cas suivants :

1. A est le point de coordonnées $(1,2)$ et $\mathcal{D}$ est la droite passant par $B(-1,-1)$ et dirigée par $\vec{u}(-2,1)$;
2. A est le point de coordonnées $(-3,1)$ et $\mathcal{D}$ est la droite passant par $C(-1,4)$ et normale à $\vec{v}(-2,3)$;
3. A est le point de coordonnées $(0,3)$ et $\mathcal{D}$ est la droite d'équation cartésienne $3x - y + 2 = 0$.

Exercice 11

Dans les cas suivants déterminer les intersections de D_1 et D_2 si elles existent.

a) D_1 passe par le point $A_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et est dirigée par le vecteur $\vec{d_1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ tandis que D_2 passe par le point $A_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et est dirigée par le vecteur $\vec{d_2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

b) D_1 passe par le point $A_1\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}$ et est dirigée par le vecteur $\vec{d_1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ tandis que D_2 a pour équation cartésienne $2y + 3x = -1$.

c) D_1 a pour équation cartésienne $y = -x + 5$ tandis que D_2 a pour équation cartésienne $2y + 2x = 3$.

Exercice 12

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1,1)$, $B(2,3)$ et $C(4,0)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC, puis donner une équation de ce cercle.
3. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.
4. Déterminer les coordonnées du centre de gravité G de ABC.
5. Montrer que Ω, H et G sont alignés.

Exercice 13

Soient $A(-2,4)$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'équations respectives $x+2y+3=0$ et $3x+2y+1=0$. Déterminer

1. les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (s'il existe) ;
2. les coordonnées du projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$;
3. une équation cartésienne de la droite symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à A ;
4. une équation cartésienne de la droite symétrique de $\mathcal{D}'$ par rapport à $\mathcal{D}$;
5. une équation cartésienne des bissectrices de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Exercice 14

Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique des cercles suivants :

1. le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $\Omega(1,3)$ et de rayon 5 ;
2. le cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre $[A,B]$ avec $A(2,5)$ et $B(-1,1)$;
3. le cercle circonscrit au triangle ABC où $A(0,0)$, $B(2,1)$ et $C(2,3)$.

Exercice 15

Déterminer le centre et le rayon des cercles d'équation cartésienne

1. $x^2+y^2-4x+4y-1=0$.
2. $2x^2+2y^2-12x+16y=-48$.
3. $2x^2+2y^2-12x+16y=-52$.
4. $x^2+y^2+a(3a-4x)+b(b+2y)=0$.

Exercice 16

Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A(1,0)$ et de rayon 2 et $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $x-y-1=0$. Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, ainsi qu'une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en ces points.

Exercice 17

Déterminer une équation des droites passant par $A(2,1)$ et tangentes au cercle de centre $B(1,-1)$ et de rayon 1.

Exercice 18

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère le point $M(-1,1)$. Déterminer les coordonnées de l'image de M par

1. la translation de vecteur $\vec{u}(-3,6)$;
2. la rotation de centre $A(1,2)$ et d'angle $\pi/3$;
3. l'homothétie de centre $B(3,4)$ et de rapport -2 ;
4. la réflexion par rapport à la droite d'équation $3x-2y+1=0$.

Exercice 19

1. Soient A, B, C et D quatre points. Montrer la relation d'Euler :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

2. Soit ABC un triangle non aplati. Déduire de la relation d'Euler que les trois hauteurs de ABC sont concourantes.

Exercice 20

On considère un hexagone régulier $ABCDEF$ de côté 1.

1. Faire un dessin.
2. Calculer les produits scalaires

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}$$
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} \qquad \overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BE} \qquad \overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{AD}$$

Exercice 21

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
a, b, c, α, β, λ désignent des nombres tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
θ désigne un angle.
Soient la droite D d'équation cartésienne $ax + by = c$, et le point $A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.
Enfin, $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ désigne un point quelconque.

Partie A

1. Déterminer en fonction de x et y les coordonnées du symétrique de M par rapport à A.
2. Déterminer en fonction de x et y les coordonnées de l'image de M par une homothétie de centre A et de rapport λ.
3. Déterminer en fonction de x et y les coordonnées de l'image de M par une rotation de centre A et d'angle θ.
4. ☆ Déterminer en fonction de x et y les coordonnées de l'image de M par une réflexion par rapport à la droite D.

Partie B

Coder une fonction python permettant d'obtenir les coordonnées de l'image de M par une symétrie de centre A et qui prend en entrée les coordonnées de A, et de M.
Coder de même la fonction de rotation (en précisant bien les variables d'entrée).

Planche n° 5: Sommes et produits

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. α est un réel. Calculer les sommes suivantes en utilisant la formule du binôme de Newton $(a+b)^n$ pour des nombres a et b bien choisis.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$;

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$;

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha^k \binom{n}{k}$.

Exercice 2

En utilisant l'un des résultats de l'exercice précédent, retrouver le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$;

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$;

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$;

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 4

1. Soit $(p,q,m) \in \mathbb{N}^3$ tel que $q \leq p \leq m$. En développant de deux façons différentes $(1+x)^m$, montrer la formule :
$$\binom{m}{p} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k}\binom{m-q}{p-k}.$$
2. En donner une interprétation combinatoire. (On pourra s'inspirer de l'interprétation combinatoire de la formule de Pascal.)
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

Soient n et p des entiers naturels.

a) Montrer $\displaystyle\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}$

b) On suppose $n \geq p$. Montrer $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

Exercice 6

En calculant $(1+i)^{4n}$, déterminer les valeurs de

$$\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1}$$

Exercice 7

Calculer les sommes et produits suivants :

$$A = \sum_{i=1}^{4} i; \quad B = \sum_{i=0}^{6} 1; \quad C = \sum_{i=-3}^{3} 4; \quad D = \sum_{r=0}^{4} (r^2 - r + 1); \quad E = \prod_{k=0}^{4} k;$$

$$F = \prod_{k=1}^{4} k; \qquad G = \prod_{j=1}^{3} 2; \qquad H = \prod_{t=-10}^{10} t^3; \qquad I = \prod_{p=-1}^{1} \cos\frac{p\pi}{4}; \qquad J = \prod_{k=1}^{10} i.$$

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} k$; b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k$; c) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} 2k.$ d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-k}$; e) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} e^{-k}.$

Exercice 9

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = n(n+2)$.

1. Calculer les sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{k=0}^{6} a_k; \; S_2 = \sum_{k=0}^{n+1} a_k; \; S_3 = \sum_{k=0}^{2n} a_k; \; S_4 = \sum_{k=0}^{n} 2a_k; \; S_5 = \sum_{k=0}^{n} (a_k - 1); \; S_6 = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k.$$

2. Déterminer a_n en fonction de n.

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note S_n la somme des nombres impairs compris entre 0 et $2n+1$.

(a) Exprimer S_n à l'aide d'un symbole $\sum$.

(b) Montrer que $S_n = (n+1)^2$.

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.

1. Calculer de deux façons différentes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right)$.
2. En déduire la valeur de S_n.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$.

Exercice 12

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-1)}\right)$.

Exercice 13

($\star$)

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2}$.

(b) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \geq \frac{m}{2}$.

Exercice 14

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Calculer $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ et $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$. Que se passe-t-il si on commence le produit à 1 au lieu de 2 ?

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire à l'aide de factorielles les expressions suivantes.

a) $\prod_{i=1}^{n}(2i)$;

b) $\prod_{i=1}^{n} i^2$;

c) $\prod_{i=3}^{n} i^2$;

d) $\prod_{i=n+1}^{2n} i^2$;

e) $\prod_{i=1}^{n}(2i+1)$.

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\prod_{k=0}^{n} e^{-k}$;

b) $\prod_{k=0}^{n} e^{(\sqrt{2}-k)}$;

c) $\prod_{k=0}^{n} 2^k$;

d) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$;

e) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k}$.

Planche n° 6: Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$;
2. $x \mapsto \dfrac{\ln(x^2-4)}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$;
3. $x \mapsto \ln\left(\tan \dfrac{x\pi}{2}\right)$.

Exercice 2

Tracer rapidement à main levée, en justifiant, l'allure du graphe des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \sqrt{3x-2}-1$;
2. $x \mapsto \dfrac{5}{2x+1}+3$.

Exercice 3

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$. Décrire comment, à partir du graphe de f, on peut tracer le graphe des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto f(a-x)$;
2. $x \mapsto a - f(x)$.

Exercice 4

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies sur I.
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant).

1. Si f et g sont croissantes sur I alors fg est croissante sur I.
2. Si f et g sont croissantes et positives sur I alors fg est croissante sur I.
3. Si f et g sont majorées sur I alors $f+g$ est majorée sur I.
4. Si f et g sont majorées sur I alors fg est majorée sur I.
5. Si f et g sont bornées sur I alors fg est bornée sur I.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ est croissante. Montrer que si f s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$ alors f est la fonction nulle.

Exercice 7

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto e^{-\frac{a}{x^2}}$;
2. $x \mapsto x - a\sqrt{x}$;
3. $x \mapsto \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$;
4. $x \mapsto \sqrt{1 + \cos^2 x}$;
5. $x \mapsto (ax + b)^x$;
6. $x \mapsto \dfrac{\cos(ax^2 + bx + 1)}{\sin(x)}$;
7. $x \mapsto \arctan(e^x)$;
8. $x \mapsto \arcsin(x^2 - 1)$;
9. $x \mapsto \arccos\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$;
10. $x \mapsto \dfrac{\cos^3 x}{(1 - \cos x)^2}$.

Exercice 8

Montrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x \in]-1, +\infty[, \ \ln(1 + x) \leq x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \ \dfrac{x+1}{x-1} \ln x \geq 2$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ x \ln x - (x - 1) \leq (x - 1)^2$;
4. $\forall x \in]-\infty, 1], \ e^x \leq 1 + x + \dfrac{ex^2}{2}$;

Exercice 9

Tracer le graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |3x - 2| - 2|x + 1|$.

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln\left(\dfrac{x+3}{2}\right) = \dfrac{\ln x + \ln 3}{2}$;
2. $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$;
3. $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$.
4. $\ln|2x + 1| + \ln|x + 3| < \ln 3$.

Exercice 11

Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, parité, périodicité, variations et limites.)

1. $x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$;
2. $x \longmapsto \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$;
3. $x \longmapsto \ln(x^2 - 1)$;
4. $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$;
5. $x \longmapsto \dfrac{\tan(2x)}{\tan x}$;
6. $x \longmapsto x \arctan \dfrac{1}{x}$;
7. $x \longmapsto \sin(3x) + 3 \sin x$.

Exercice 12

Déterminer tous les couples d'entiers naturels distincts (n,p) non nuls tels que $n^p = p^n$.

Exercice 13

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que u et v sont dérivables sur I et que u est strictement positive sur I. Montrer que u^v est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
2. Étudier et tracer le graphe de l'application $f : \mathbb{R}+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ On précisera les éventuelles tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.
3. Étudier et tracer le graphe de l'application $f : \mathbb{R}+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ On précisera les éventuelles tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

Exercice 14

Montrer : $\forall x \in]0,1[,\ x^x(1-x)^{(1-x)} \geq 1/2$. (*Indication* : étudier les variations de la fonction $x \mapsto x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$.)

Exercice 15

Déterminer une période de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos\left(\frac{x}{5}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.

Exercice 16

Soit $(\alpha,\beta,\omega) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin(\omega x + \varphi).$$

Exercice 17

Tracer le graphe de la fonction $x \longmapsto \arcsin(\sin x)$.

Exercice 18

Simplifier les expressions suivantes : $\tan(\arcsin x)$, $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arctan x)$.

Exercice 19

Ensemble de définition et simplification de f définie par $f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

Exercice 20

1. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Cette égalité est-elle valable pour tout $x \in \mathbb{R}^*$?
3. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}\arccos x$.

Exercice 21

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\arcsin 2x = \arccos x$.
2. $\arcsin(x+1) - \arcsin x = \dfrac{\pi}{6}$.
3. $\arctan x + \arctan(2x) = \dfrac{\pi}{4}$.
4. $\arcsin x = \arccos \dfrac{1}{3} - \arccos \dfrac{1}{4}$.
5. $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{3}$.
6. $\arcsin x = \arctan 2 + \arctan 3$.

Exercice 22

Calculer $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$.

Exercice 23

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, simplifier $\arctan(k+1) - \arctan(k)$. (*Indication* : on pourra calculer la tangente de cette expression.)
2. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \arctan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1} \right) \right)$.

Exercice 24

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$ et $g_n(x) = \dfrac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Montrer que f_n et g_n sont des fonctions polynomiales.