Exercices de TSI 1

2023

Planche n° 1: Pour s'entraîner à la plage

Chercher les quatre premiers exercices pour la rentrée.

Exercice 1

Établir le tableaux de signes de ces expressions.

> ⚠ Il est inutile d'utiliser les techniques de calcul de Δ dont pourrait vous parler votre cousine ou votre oncle. En effet, cela n'est pas officiellement au programme de la STI2D ! Nous verrons cela à la rentrée.

a) $-(x-1)(x+2)$

b) $-2x+3$

c) $-2(x+5)^2+3x+15$

d) $(x+2)^2-5$

e) x^4-x^2

f) x^3-3x

g) $1+\dfrac{2}{x-4}-\dfrac{2}{x+4}$

h) $1-\dfrac{9}{(x-2)^2}$

i) $\dfrac{1}{(x-2)}-\dfrac{1}{(x-2)^3}$

Exercice 2

Résoudre ces équations et inéquations.

a) $2x+4=x+2$

b) $-(x+1)\geq 2x+3$

c) $x^3\geq x$

d) $\dfrac{1}{x}<x$

e) $(x+4)\geq(x+4)^2$

f) $\dfrac{3}{(x-1)^2}\geq 0$

g) $\dfrac{3}{(x-1)^2}\geq 1$

h) $\dfrac{5x}{(x-3)(x+2)}\geq\dfrac{4}{3-x}$

i) $\dfrac{x^2}{x+4}\geq x$

Exercice 3

Résoudre ces équations.

a) $3\mathrm{e}^x+2=5$

b) $\mathrm{e}^x+2=1$

c) $(\mathrm{e}^x)^2+2=4$

d) $\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x=-1$

e) $\mathrm{e}^{2x}=2\mathrm{e}^x$

f) $\mathrm{e}^{x\ln(2)}=1$

g) $\mathrm{e}^{2\ln(x)}=4$

h) $\ln(3x+2)=0$

i) $\ln(x)-\ln(4x)=5$

j) $\ln(x)-\ln(x^4)=5$

k) $\ln(x)-\ln(x^4)+\ln(3)=0$

l) $\mathrm{e}^{\cos(x)}=1$

Exercice 4

Soit la fonction :

$$g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}-\{-1\} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{2x}{x+1}\end{array}$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative et D la droite d'équation $y=4x$

1. Existe-t-il des tangentes à $\mathcal{C}_g$ parallèles à D ? Si oui, combien ?
2. Existe-t-il des tangentes à $\mathcal{C}_g$ qui passent par l'origine du repère ? Si oui, combien ?

Exercice 5

Établir les tableaux de signes des expressions suivantes.

a)
$$\frac{6}{x+1} - \frac{5x}{x^2+1}$$

b)
$$1 + \frac{21}{4(x-5)} + \frac{1}{4(x+1)}$$

c)
$$1 + \frac{1}{6(x-1)} - \frac{7}{3(x+3)}$$

d)
$$1 + \frac{154}{75(x-3)} - \frac{44}{75(x+2)}$$

e)
$$3x - 3 - \frac{15}{2(x-3)} - \frac{15}{2(x+1)}$$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

a) $x^2 + 1 = 2x$

b) $x^2 - x = \sqrt{2}(x+1)$

c) $(x+1)(x^2+2x-3) = 0$

d) $x^3 = x$

e) $x^4 = 2x^2$

f) $x^4 = 1$

g) $x^4 + 1 = 0$

h) $\frac{1}{x} = 2x + 1$

i) $\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{18}{x^2-4}$

j) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 = 0$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

a) $x^3 - 39x + 70 = 0$

b) $x^3 + 6 = 3x + 2x^2$

c) $x^3 - 2x = x^2 - 2$

d) $x^3 + 2x^2 - x = 2$

e) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

f) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

g) $(x^3 - x)^2 - x^2 = 0$

h) $x^2 = \frac{2}{x+1}$

Exercice 8

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $6x + 5 < -4x + 3$

b) $3x + 2 \geq 5x - 1$

c) $x^2 < 4x$

d) $(x+5)(x-2) \leq 0$

e) $x(x+2) \leq 2x + 6$

f) $x^3 < x$

g) $x^4 \geq x^2$

h) $(x^2+x+1)^2 - 4(x^2-x+1)^2 > 0$

i) $x^4 + 2x^2 - 3 < 0$

j) $\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x+2} > 0$

k) $\frac{x}{2-x} < 1$

l) $\frac{4-x}{7+x} \leq -1$

m) $\frac{2x+1}{x+1} \geq x$

n) $\frac{x-2}{2x-2} < \frac{x-1}{x-5}$

o) $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} \leq \frac{36}{x^2-9}$

Exercice 9

Déterminer l'ensemble de définition, puis calculer la dérivée des fonctions suivantes.

$f_1 : x \mapsto \frac{x^2+1}{x-1}$ $\quad f_2 : x \mapsto \ln(x^2-1)$ $\quad f_3 : x \mapsto \cos(2x) - \sin(3x)$

$f_4 : x \mapsto \exp(x^2-1)$ $\quad f_5 : x \mapsto \frac{\cos^5(x)}{\ln x}$

Exercice 10

On se place dans le plan complexe. Dans les cas suivants, préciser l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie l'équation ou le système d'équations. On pourra s'aider de dessins.

(a) $|z+\mathrm{i}| = 1$

(b) $|z| = |z-1|$

(c) $\begin{cases} \arg\left(z+\frac{1}{2}\right) & = & \frac{-\pi}{2} \\ |z| & = & 1 \end{cases}$

(d) $|z| = |z-1| = 1$

Exercice 11

1. Calculer $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
2. En remarquant que $2 \times \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$, calculer la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

a) $\sin(2x) = \sin(x)$
b) $\cos(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\cos(x) = \sin(3x)$
d) $\sin(x) = -\cos(x)$
e) $\tan(3x - \pi/5) = \tan(x + 4\pi/5)$
f) $\sin(2x)(\sqrt{3} + 2\sin(2x)) = 0$
g) $\cos^2(x) - \frac{3}{2}\cos(x) + \frac{1}{2} = 0$
h) $\cos(2x) + \cos(x) = 0$
i) $\cos(2x) - 3\cos(x) + 2 = 0$
j) $\cos(2x) - \sin(x) = 1$
k) $1 + \sqrt{3}\sin(2x) - \cos(4x) = 0$
l) $\sqrt{3}\tan(x) + 4\sin^2(x) = 0$
m) $\sin(2x) + \sin(6x) = \sin(4x)$
n) $6\cos(2x) - 1 = 6\tan^2(x)$
o) $\cos(x) > \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
p) $\sqrt{3 - 4\cos^2(x)} > 1 + 3\sin(x)$

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous de paramètre réel m :

a) $(m-1)x + 1 = 0$
b) $2mx - 3 = x + 5m$
c) $x^2 + mx - 2m^2 = 0$
d) $x^4 + 2mx^2 + 1 = 0$
e) $\dfrac{2x+1}{x+3} = m$
f) $\dfrac{x-2m}{mx+5} = m - 1$

Exercice 14

Déterminer selon les valeurs du réel m le signe des trinômes suivants :

$$A = 2x^2 - mx - m^2 \qquad B = mx^2 + 2(2m+1)x + 1$$

Exercice 15

Comparer les expressions A et B suivantes :

a)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \qquad B = \sqrt{2} - 1$$

b)

$$A = \sqrt{7} + 3 \qquad B = \sqrt{3} + 4$$

c)

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \qquad B = 2$$

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

a) $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3}$

b) $\sqrt{x^2-3x-3} = x+2$

c) $\sqrt{1-2x} = x+1$

d) $\sqrt{x+1} < \sqrt{3-2x}$

e) $\sqrt{x^2+5x+3} < x+2$

f) $2-x < \sqrt{x+1}$

Exercice 17

On rappelle que la *valeur absolue* d'un réel x est définie par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$ Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a) $|x| = 3$;

(b) $|x| = -2$;

(c) $|x| \leq 3$;

(d) $|x| \geq 3$;

(e) $|x| \geq -2$;

(f) $|x| - 2 \leq 4$;

(g) $|x-2| \leq 4$;

(h) $|x-2| \leq -4$;

(i) $|x^2-4| = 2$;

(j) $|x^2-8x+11| = 4$;

(k) $|x^2-8x+11| < 4$;

(l) $|x+1| = |2x-3|$;

(m) $|1-2x| = x+1$;

(n) $|x^2-3x-3| = x+2$;

(o) $|x^2+5x+3| < x+2$;

(p) $2-x < |x+1|$;

(q) $|x| + |x+1| = 2$;

(r) $|x-7| + |x-2| \leq 3$.

Corrigé de la planche n° 1: Pour s'entraîner à la plage

Exercice 1

On donne directement les formes factorisées et le tableau de signes.

a)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$	
$-(x-1)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b)

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
-2		$-$		$-$	
$\left(x-\frac{3}{2}\right)$		$-$	0	$+$	
$-2\left(x-\frac{3}{2}\right)$		$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		-5		$-\frac{7}{2}$		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$(x+5)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\left(x+\frac{7}{2}\right)$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2(x+5)\left(x+\frac{7}{2}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d)

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{5}$		$-2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$\left(x+2+\sqrt{5}\right)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\left(x+2-\sqrt{5}\right)$		$-$		$-$	0	$+$	
$\left(x+2-\sqrt{5}\right)\left(x+2+\sqrt{5}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

e)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$(x-1)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2(x-1)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

f)

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\left(x-\sqrt{3}\right)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\left(x+\sqrt{3}\right)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

g)

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$(x-4)(x+4)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2}{(x-4)(x+4)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

h)

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$(x-5)(x+1)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

i) Pour faire le tableau de signes, on remarque que $(x-2)^3$ est de même signe que $(x-2)$. De manière générale, $(x-2)^n$ est du signe de $(x-2)$ quand n est un nombre entier impair.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$(x-3)(x-1)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)^3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^3}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Exercice 2

a) On obtient l'unique solution $x = 2$.

b) On obtient l'intervalle $x \in \left]-\infty;\ \frac{-4}{3}\right]$.

c) On obtient l'union d'intervalles $x \in [-1;\ 0] \cup [1;\ +\infty[$.

d) On obtient l'union d'intervalles $x \in]-1;\ 0[\cup]1;\ +\infty[$.

e) On obtient l'union d'intervalles $x \in]-\infty;\ -4] \cup [-3;\ +\infty[$.

f) On obtient l'union d'intervalles $x \in]-\infty;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$, ce qui s'écrit aussi $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

g) On obtient l'union d'intervalles $x \in \left[1-\sqrt{3};\ 1\right[\cup \left]1;\ 1+\sqrt{3}\right]$.

h) On obtient $x \in \left]-2;\ \frac{-8}{9}\right] \cup]3;\ +\infty[$.

i) On obtient $x \in]-4;\ 0]$.

Exercice 3

a) Pour tout x, $3e^x + 2 = 5 \iff e^x = 1$. On obtient l'unique solution $x = 0$.

b) Pour tout x, $e^x + 2 = 1 \iff e^x = -1$. Il n'y a pas de solution.

c) Pour tout x, $(e^x)^2 + 2 = 4 \iff e^{2x} = 2 \iff 2x = \ln(2)$. On obtient l'unique solution $x = \dfrac{\ln(2)}{2}$.

d) Pour tout x, $e^{2x} + e^x = -1$ est impossible car exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives. Il n'y a pas de solution.

e) Pour tout x, $e^{2x} = 2e^x \iff e^x(e^x - 2) = 0$. Or exponentielle ne s'annule pas. On a donc une unique solution $x = \ln(2)$.

f) On obtient l'unique solution $x = 0$.

g) On a pour tout x, $e^{2\ln(x)} = 4 \iff 2\ln(x) = \ln\left(2^2\right) \iff x = 2$.

h) L'expression est valide pour tout $3x + 2 > 0$. On raisonne donc pour $x > \frac{-2}{3}$:
On a $\ln(3x+2) = 0 \iff 3x + 2 = 1 \iff x = \frac{-1}{3}$.

i) Pour tout $x > 0$, on a $\ln(x) - \ln(4x) = 5 \iff \ln\left(\frac{x}{4x}\right) = 5 \iff -\ln(4) = 5$, ce qui est faux. Il n'y a donc pas de solutions.

j) Pour tout $x > 0$, $\ln(x) - \ln(x^4) = 5 \iff \ln(x) - 4\ln(x) = 5 \iff \ln(x) = \frac{-5}{3}$.
L'unique solution est donc $x = \mathrm{e}^{-5/3}$.

k) Pour tout $x > 0$, $\ln(x) - \ln(x^4) + \ln(3) = 0 \iff -3\ln(x) = -\ln(3)$.
L'unique solution est donc $x = \mathrm{e}^{\ln(3)/3} = \sqrt[3]{3}$.

l) Pour tout x, $\mathrm{e}^{\cos(x)} = 1 \iff \cos(x) = 0 \iff x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 4

1. On rappelle que deux droites affines sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.
   Il s'agit donc de savoir si l'une des tangentes a pour coefficient directeur 4.
   Mais nous savons que, pour tout nombre $a \neq -1$, le coefficient directeur du point d'abscisse a est $g'(a)$. Un petit calcul donne $g'(a) = \frac{2}{(a+1)^2}$. Il s'agit donc de résoudre, pour tout $a \neq -1$:

$$\begin{aligned} g'(a) = 4 &\iff \frac{2}{(a+1)^2} = 4 \\ &\iff \frac{2 - 4(a+1)^2}{(a+1)^2} = 0 \\ &\iff 4\left(\frac{\frac{1}{2} - (a+1)^2}{(a+1)^2}\right) = 0 \\ &\iff \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - (a+1)\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + (a+1)\right) = 0 \qquad \iff a = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } a = a = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

   Il y a donc deux tangentes qui conviennent. Ce sont celles relatives aux deux abscisses trouvées plus haut.

2. On rappelle que pour un point d'abscisse $a \neq -1$, l'équation de la tangente est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$. L'ordonnée à l'origine de la tangente est donc $f(a) - af'(a)$.
   Il s'agit donc de savoir si cette ordonnée à l'origine peut éventuellement être nulle. On va donc résoudre, pour tout $a \neq -1$:

$$\begin{aligned} f(a) - af'(a) = 0 &\iff \frac{2a}{a+1} - \frac{2a}{(a+1)^2} = 0 \\ &\iff \frac{2a(a+1) - 2a}{(a+1)^2} = 0 \\ &\iff \frac{2a^2}{(a+1)^2} = 0 \end{aligned}$$

   On obtient ainsi l'unique tangente correspondant à l'abscisse nulle.

Exercice 6

Voici les solutions de ces équations :

a) $\{1\}$

b) $\left\{\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{6\sqrt{2}+3}}{2};\ \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{6\sqrt{2}+3}}{2}\right\}$

c) $\{-1;\ 1;\ -3\}$

d) $\{0;\ -1;\ 1\}$

e) $\left\{0;\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2}\right\}$

f) $\{1;\ -1\}$

g) $\varnothing$

h) $\left\{\frac{1}{2};\ -1\right\}$

i) $\left\{-\frac{9}{4}\right\}$

j) $\{0\}$

Exercice 7

Voici les solutions de ces équations :

a) $\{2;\ 5;\ -7\}$

b) $\left\{2;\ -\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right\}$

c) $\left\{1; -\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right\}$

d) $\{1;\ -1;\ -2\}$

e) $\{1\}$

f) $\left\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3};\ -1;\ 1\right\}$

g) $\left\{0;\ -\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right\}$

h) $\{1\}$

Exercice 8

Voici les solutions de ces inéquations :

(a) $\left]-\infty;\ -\frac{1}{5}\right[$; (b) $\left]-\infty;\ \frac{3}{2}\right]$; (c) $]0;\ 4[$;

(d) $[-5;\ 2]$; (e) $\left]-\sqrt{6};\ \sqrt{6}\right]$; (f) $]-\infty;\ -1[\cup]0;\ 1[$;

(g) $]-\infty;\ -1[\cup\{0\}\cup[1;\ +\infty[$; (h) $\left]\frac{3-\sqrt{5}}{2};\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$; (i) $]-1;\ 1[$;

(j) $]-11;\ -2[\cup]1;\ +\infty[$; (k) $]-\infty;\ 1[\cup]2;\ +\infty[$; (l) $]-\infty;\ -7[$;

(m) $]-\infty;\ -1]\cup\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$; (n) $\left]-\infty;\ \frac{-\sqrt{41}-3}{2}\right[\cup\left]1;\ \frac{\sqrt{41}-3}{2}\right[\cup]5;\ +\infty[$; (o) $]-\infty;\ -3[$.

Exercice 11

1. On utilise les formules usuelles. On obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

2. On sait, à partir des formules de duplication que :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}$$

Or, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ sont positifs car $\frac{\pi}{8}\in\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$. On obtient donc, après calcul :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice 12

On donne les mesures principales des solutions, toutes définies à un multiple entier de 2π près.

a) $\left\{0;\ \pi;\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right\}$

b) $\left[\frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6}\right]$

c) $\left\{\frac{-7\pi}{8};\ \frac{-3\pi}{8};\ \frac{\pi}{8};\ \frac{5\pi}{8};\ \frac{-3\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right\}$

d) $\left\{\frac{-\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right\}$

e) $\left\{\frac{-\pi}{2};\ 0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi\right\}$

f) $\left\{\frac{-\pi}{2};\ 0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}\right\}$

g) $\left\{0;\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right\}$

h) $\left\{\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{\pi}{3};\ \pi\right\}$

i) $\left\{0;\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right\}$

j) $\left\{\frac{-5\pi}{6};\ \frac{-\pi}{6};\ 0;\ \pi\right\}$

k) $\left\{\frac{-\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{-\pi}{2};\ \frac{-\pi}{2};\ \pi\right\}$

l) $\left\{\frac{-\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ 0;\ \pi\right\}$

m) $\left\{\frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{-5\pi}{6};\ \frac{\pi}{6};\ \frac{-3\pi}{4};\ \frac{-\pi}{2};\ \frac{-\pi}{4};\ 0;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4};\ \pi\right\}$

n) $\left\{\frac{-5\pi}{6};\ \frac{\pi}{6};\ \frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right\}$

o) $\left[\frac{-11\pi}{12};\ \frac{\pi}{12}\right]$

p) $\left[\frac{-5\pi}{6};\ \frac{-\pi}{6}\right]$

Exercice 16

a) On obtient $\{4\}$.

b) On obtient $\{-1\}$.

c) On obtient $\{0\}$.

d) On obtient $\left]-1;\ \dfrac{2}{3}\right[$.

e) On obtient $\left]\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2};\ 1\right[$.

f) On obtient $\left]\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2};\ +\infty\right[$.

Planche n° 2: Logique

Exercice 1

Soient P et Q deux propositions. Montrer, en écrivant les tables de vérité, que les propositions « $P \Longrightarrow Q$ » et « non P ou Q » sont équivalentes.
De même, montrer que les propositions « $P \Longleftrightarrow Q$ » et « $(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$ »sont équivalentes.

Exercice 2

Soient P, Q et R trois propositions. À l'aide de tables de vérités, montrer les équivalences des propositions suivantes :

a) $(P \vee Q) \Longrightarrow R$ et $(P \Longrightarrow R) \wedge (Q \Longrightarrow R)$

b) $(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R) \wedge (R \Longrightarrow P)$ et $(P \Longleftrightarrow Q) \wedge (Q \Longleftrightarrow R)$

Exercice 3

Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux puis écrire la négation de ceux qui sont faux.

(a) $1+1=2$ et $5+2=6$

(b) $1+1=2$ ou $5+2=6$

(c) $1+1=2 \Longrightarrow 5+2=6$

(d) $5+2=6 \Longrightarrow 1+1=2$

(e) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2$

(f) $\exists x \in \mathbb{R}, x \neq 2$

(g) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

(h) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1$

(i) $\exists y \in]0, +\infty[, \ln y = 1$

(j) $\exists! z \in \mathbb{R}, \cos z = 0$

(k) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$

(l) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \geq -x^2$

(m) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \geq -x^2$

(n) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \geq -x^2$

(o) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \geq -x^2$

Exercice 4

Soit x un réel. Dans chacun des cas suivants, écrire le lien logique entre les deux propriétés (sens de l'implication ou équivalence).

a) $x^2 = 1$ et $x = 1$;

b) $x \geq 1$ et $x \geq 2$;

c) $x \leq 1$ et $x = 1$;

d) $x > 1$ et $x = 1$;

e) $x + 3 \geq 4$ et $x \geq 1$;

f) $x^3 = 2x^2$ et $x = 2$;

g) $x \leq -2$ et $x^2 \geq 4$;

h) $x \geq 2$ et $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$;

i) $x \leq -1$ et $\dfrac{1}{x} \geq -1$;

j) $x \geq 3$ et $x^2 \geq 3x$;

k) $x \geq -3$ et $x^2 \geq -3x$.

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, comprendre le sens des deux phrases proposées et déterminer leur valeur de vérité.

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, n \leq N$.
   (b) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, n \leq N$.

2. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)$.
   (b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$.

Exercice 6

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.

1. Traduire les propositions suivantes en langage naturel et les interpréter.
   (a) $\forall u, v \in \mathbb{R},\ u \leq v \Longrightarrow f(u) \leq f(v)$
   (b) $\exists x_0 \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq f(x_0)$
   (c) $\exists x_0 \in \mathbb{R} / f(x_0) = 1$
   (d) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
2. En s'inspirant de la question précédente, traduire les propositions suivantes en langage formel (à l'aide des quantificateurs)
   (a) N'importe quel nombre compris entre 2 et 3 possède un antécédent par f.
   (b) f est une fonction constante.
   (c) f n'est pas une fonction constante.
   (d) f est une fonction polynôme du second degré.
   (e) f est décroissante.

Exercice 7

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Écrire en langage formel les propositions suivantes :

(a) A et B ne sont pas disjointes.
(b) Il y a un et un seul élément commun à A et B.
(c) A n'est pas incluse dans B.
(d) A et B sont complémentaires.

Exercice 8

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer les propositions suivantes :

(a) $(A^c)^c = A$.
(b) $A \subset B \Longrightarrow B^c \subset A^c$.
(c) $A \cap B^c = A \cap C^c \Longleftrightarrow A \cap B = A \cap C$.
(d) $((A \cap B) \subset (C \cap B)) \wedge ((A \cup B) \subset (C \cup B)) \Longrightarrow (A \subset C)$.
(e) $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A$.

Exercice 9

Soient x et y deux nombres réels. Montrer :

(a) $x + y \geq 1 \Longrightarrow ((x \geq 1/2)$ ou $(y \geq 1/2))$.
(b) $x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow ((x = 0)$ et $(y = 0))$.

Indication: On pourra raisonner par contraposée. Les propositions réciproques sont-elles vraies ?

Exercice 10

Montrer qu'un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair. Quelle proposition peut-on en déduire concernant les nombre impairs ?

Exercice 11

Nadia est prisonnière d'un roi logicien qui lui propose comme défi de deviner la couleur des cheveux de ses enfants. Il aligne donc devant elle ses cinq enfants, cheveux cachés et lui annonce :
« Parmi mes enfants, trois sont blonds et les autres sont bruns. Ceux qui sont blonds mentent toujours tandis que les bruns disent toujours la vérité. Pourras-tu en un minimum de questions, deviner la couleurs des cheveux de mes enfants ? »

Nadia accepte le défi, se présente devant le premier enfant et lui demande « de quelle couleur sont tes cheveux ? »
Cet enfant lui répond en langage des signes, langue que Nadia ne maîtrise pas mais que connaissent les autres frères.
Puis elle se présente devant le second enfant et lui demande « qu'a répondu ton frère ? ». Celui-ci dit « il a répondu "mes cheveux sont blonds." »
Enfin, elle va vers le troisième enfant et lui demande « quelle est la couleur des cheveux des deux personnes précédentes ? ». Celui-ci répond « la première a les cheveux bruns tandis que la seconde est blonde. »

Nadia annonce alors au roi connaître la couleur des cheveux de tous ses enfants. Comment est-ce possible ?

Corrigé de la planche n° 2: Logique

Exercice 2

a) Comme suggéré on fait la table de vérité :

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \Longrightarrow R$	$P \Longrightarrow R$	$Q \Longrightarrow R$	$(P \Longrightarrow R) \wedge (Q \Longrightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

Les colonnes 5 et 8 sont identiques, ce qui prouve l'équivalence des deux opérations logiques.

b) Faisons de même la table de vérité :

P	Q	R	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow R$	$R \Longrightarrow P$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R) \wedge (R \Longrightarrow P)$	$(P \Longleftrightarrow Q) \wedge (Q \Longleftrightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F	F
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	V	V

Les deux dernières colonnes sont identiques, ce qui permet de conclure.

Exercice 3

Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux puis écrire la négation de ceux qui sont faux.

(a) C'est faux. Le contraire est « $1 + 1 \neq 2$ ou $5 + 2 \neq 6$ ».

(b) C'est vrai.

(c) C'est faux. Le contraire est « $1 + 1 = 2$ et $5 + 2 \neq 6$ ».
On rappelle que le contraire de "$A \Longrightarrow B$" est "$A \wedge (\neg B)$".

(d) C'est vrai.

(e) C'est faux. Le contraire est « $\exists x \in \mathbb{R} / x = 2$ ».

(f) C'est vrai.

(g) C'est vrai.

(h) C'est faux. Le contraire est « $\exists x \in \mathbb{R} / \mathrm{e}^x < 1$ ».

(i) C'est vrai.

(j) C'est faux. Le contraire est « il n'existe aucun ou bien un nombre strictement supérieur à un de nombres z tels que $\cos(z) = 0$ ».

(k) C'est faux. Le contraire est « $\exists n \in \mathbb{N} / \forall k \in \mathbb{N}, n \neq 2k$ »

(l) C'est faux. Le contraire est « $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / y < -x^2$ »

(m) C'est vrai (il suffit de prendre $y = 0$).

(n) C'est faux. Le contraire est « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / y < -x^2$ »

(o) C'est vrai.

Exercice 4

a) $x^2 = 1 \Longleftarrow x = 1$.

b) $x \geq 1 \Longleftarrow x \geq 2$.

c) $x \leq 1 \Longleftarrow x = 1$;

d) Aucun lien.

e) $x + 3 \geq 4 \iff x \geq 1$;

f) $x^3 = 2x^2 \Longleftarrow x = 2$;
Le réciproque est fausse ($x = 0$ est aussi solution de la première équation).

g) $x \leq -2 \Longrightarrow x^2 \geq 4$;
Le réciproque est fausse ($x = 3$ est aussi solution de la seconde inéquation).

h) $x \geq 2 \Longrightarrow \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$;
Le réciproque est fausse ($x = -1$ est aussi solution de la seconde inéquation).

i) $x \leq -1 \Longrightarrow \dfrac{1}{x} \geq -1$;
Le réciproque est fausse ($x = 1$ est aussi solution de la seconde inéquation).

j) $x \geq 3 \Longrightarrow x^2 \geq 3x$;
Le réciproque est fausse ($x = -1$ est aussi solution de la seconde inéquation).

k) Aucun lien. En effet, les solution de la seconde inéquation sont $]-\infty;\ -3] \cup [0;\ +\infty[$

Exercice 5

1. (a) Pour tout entier n, il existe un entier N qui lui est supérieur ou égal. C'est vrai (considérer $N = n$).
   (b) Il existe un entier n qui est inférieur à tous les entiers. C'est vrai, $n = 0$ fonctionne.
2. (a) Pour tout réel x, il existe un nombre y qui correspond à l'image de x. C'est vrai.
   (b) Il existe un nombre y tel que, pour tout réel x l'image de x vaut y. C'est faux (sauf si f est constante).

Exercice 6

1. (a) Pour tous réels u et v, les images de u et v par f sont dans le même ordre que u et v.
   Cela traduit le fait que f est croissante.
   (b) Il existe un réel x_0 tel que toutes les images des réels par f sont inférieures à l'image de x_0 par f.
   Cela traduit le fait que f possède un maximum en x_0.
   (c) Il existe un réel x_0 dont l'image par f est 1.
   Cela traduit le fait que 1 possède un antécédent par f.
   (d) Pour tout réel x, $f(x)$ est non nul.
   Cela traduit le fait que f ne s'annule pas.
2. (a) $\forall y \in [2;\ 3],\ \exists x \in \mathbb{R} / f(x) = y$.
   (b) $\exists k \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k$.
   (c) $\forall k \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} / f(x) \neq k$.
   (d) $\exists (a;\ b;\ c) \in \mathbb{R}^3 / a \neq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$.
   (e) $\forall u, v \in \mathbb{R},\ u \leq v \Longrightarrow f(u) \geq f(v)$.

Exercice 7

(a)
$$\exists x \in E / x \in A \wedge x \in B$$

(b)
$$\exists! x \in E / x \in A \wedge x \in B$$

(c)
$$\exists x \in A / x \notin B$$

(d)
$$\forall x \in E, (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

Exercice 8

(a) Soit $x \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in (A^c)^c &\iff \neg(\neg(x \in A)) \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

Donc $A = (A^c)^c$.

(b) On suppose $A \subset B$. On veut montrer $B^c \subset A^c$. Considérons $x \in B^c$. Faisons une disjonction de cas :

(Cas n° 1) Si $x \in A$, alors $x \in B$ puisque $A \subset B$, ce qui est absurde puisque $x \in B^c$.

(Cas n° 2) Si $x \notin A$, alors $x \in A^c$.

Ainsi, forcément, $x \in A^c$.

(c) Il y a une double implication à montrer. Commençons par prouver le sens direct.

On suppose ainsi $A \cap B^c = A \cap C^c$. On veut montrer que $A \cap B = A \cap C$. En théorie, il faut donc montrer la double inclusion. On considère ainsi $x \in A \cap B$, c'est à dire $x \in A$ et $x \in B$. Faisons là encore une disjonction de cas :

(Cas n° 1) Si $x \in C$, alors $x \in A \cap C$.

(Cas n° 2) Si $x \notin C$, alors $x \in A \cap C^c$. Or, $A \cap B^c = A \cap C^c$ donc cela entraîne que $x \in B^c$, ce qui est absurde puisque $x \in B$.

Ainsi, forcément, $x \in C$ donc $x \in A \cap C$.

On a donc prouvé que $A \cap B \subset A \cap C$. Or B et C jouent dans cet énoncé des rôles interchangeables. On peut donc invoquer un argument de symétrie. En particulier la démonstration de $A \cap C \subset A \cap B$ est tout à fait identique. On donc prouvé le sens direct de la proposition.

Attaquons-nous maintenant à la réciproque. Supposons $A \cap B = A \cap C$ et cherchons à prouver $A \cap B^c = A \cap C^c$. En remarquant que $B = (B^c)^c$ et $C = (C^c)^c$, on peut appliquer le sens direct de la proposition.

Ainsi, partant de $A \cap B = A \cap C$, on a $A \cap (B^c)^c = A \cap (C^c)^c$. En exploitant le sens direct de la proposition, que l'on a montré précédemment, on en déduit $A \cap B^c = A \cap C^c$, ce qui permet de conclure !

(d) On suppose $((A \cap B) \subset (C \cap B)) \wedge ((A \cup B) \subset (C \cup B))$ et on veut prouver $(A \subset C)$.

Pour cela considérons $x \in A$. Faisons une disjonction de cas sur son appartenance à B.

(Cas n° 1) Si $x \in B$, alors $x \in A \cap B$ donc $x \in B \cap C$ puisque $(A \cap B) \subset (C \cap B)$. On obtient bien $x \in C$.

(Cas n° 2) Si $x \notin B$, alors on sait, au pire, que $x \in A \cup B$. Or, $(A \cup B) \subset (C \cup B)$ donc cela entraîne que $x \in C$ ou $x \in B$. Comme $x \notin B$, on en déduit que nécessairement $x \in C$.

Dans les deux cas, partant de $x \in A$, on aboutit à $x \in C$ donc $A \subset C$.

(e) On va montrer la double inclusion.

Soit $x \in (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$. On a alors $x \in A \cap B^c$ ou $x \in A \cap B$. Dans les deux cas, on obtient $x \in A$. On en déduit que $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) \subset A$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in A$. Faisons une disjonction de cas sur l'appartenance de x à B.

(Cas n° 1) Si $x \in B$, alors $x \in A \cap B$ donc $x \in (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$.

(Cas n° 2) Si $x \notin B$, alors $x \in A \cap B^c$, donc $x \in (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$.

Dans les deux cas, $x \in (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$, ce qui permet de conclure.

> ⚠ Une erreur largement constatée consiste à faire des tables de vérité sur les ensembles. C'est abusif ! Si l'on veut relier proprement ensemble et logique, il faut obligatoirement passer par la condition d'appartenance, ce qui nécessite une rédaction très rigoureuse. Je propose plus bas une telle rédaction.

Alternative au corrigé de l'exercice 8.c :

Soit $x \in E$, on pose les prédicats suivants :
$P_A(x) :\ x \in A$;
$P_B(x) :\ x \in B$.
$P_C(x) :\ x \in C$.
$x \in A \cap B$ se dit $P_A(x) \wedge P_B(x)$. De même, $x \in A \cap B^c$ se dit $P_A(x) \wedge (\neg P_B(x))$
Ainsi, $A \cap B = A \cap C$ se dit « $\forall x \in E,\ (P_A(x) \wedge P_B(x)) \iff (P_A(x) \wedge P_C(x))$ ».
Finalement, on veut donc prouver que l'énoncé suivant est une tautologie :

$$\forall x \in E,$$
$$[(P_A(x) \wedge P_B(x)) \iff (P_A(x) \wedge P_C(x))] \iff [(P_A(x) \wedge (\neg P_B(x))) \iff (P_A(x) \wedge (\neg P_C(x)))]$$

On peut alors faire une table de vérité pour arriver au résultat :

P_A	P_B	P_C	$P_A \wedge P_B$	$P_A \wedge P_C$	$P_A \wedge (\neg P_B)$	$P_A \wedge (\neg P_C)$	$(P_A \wedge P_B) \iff (P_A \wedge P_C)$	$(P_A \wedge (\neg P_B)) \iff (P_A \wedge (\neg P_C))$
V	V	V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V	V

On constate que les deux dernières colonnes sont identiques. L'équivalence est bien prouvée !

Exercice 9

(a) On exploite l'indication. La contraposée s'écrit :

$$x < \frac{1}{2} \wedge y < \frac{1}{2} \Longrightarrow x + y < 1$$

Cette phrase est vraie car on peut sommer membre à membre deux inéqalités.
La réciproque est fausse. Considérer pour cela $x = 3$ et $y = -4$.

(b) La contraposée s'écrit

$$(x \neq 0) \vee (y \neq 0) \Longrightarrow x^2 + y^2 \neq 0$$

Elle est vraie. En effet, $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$ donc il suffit que x ou y soit non nul pour que $x^2 + y^2$ soit strictement positif, donc non nul.
La réciproque est aussi vraie.

Planche n° 3: Géométrie du plan

⚠ Les exercices 1 à 5 sont maintenant à la limite du programme. Ils présentent cependant un intérêt pour se préparer au contenu du second semestre. Pour résoudre ces exercices, il faut se souvenir de la définition des coordonnées d'un point, d'un vecteur.

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère quelconque $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et le point $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

1. Justifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de A dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère quelconque $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et le point $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

1. Justifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. On cherche à déterminer les valeurs de x et y telles que $x\vec{u}+y\vec{v}=\overrightarrow{OA}$
   (a) Montrer que pour tout x et y, $x\vec{u}+y\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.
   (b) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont-ils colinéaires ?
   (c) Conclure quant au nombre de solutions $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de ce problème.
3. On cherche à résoudre le système
$$\begin{cases} x+2y &= 2\\ 2x+4y &= 3\end{cases}$$
   (a) Montrer que ce système est équivalent au problème posé à la question précédente puis le résoudre.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère quelconque $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 2x+3y &= 4\\ x-y &= 1\end{cases}$$

1. Montrer que résoudre ce système est équivalent à trouver les valeurs de x et y telles que $x\vec{u}+y\vec{v}=\overrightarrow{OA}$. On précisera les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et A.
2. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
3. Résoudre le système.

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le point $\Omega(-1,1)$ et les vecteurs $\vec{u}(1,2)$ et $\vec{v}(3,-2)$.

1. Montrer que $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère. Est-il orthonormal ? direct ?
2. On note $\vec{a}$ le vecteur de coordonnées $(2,2)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$. Déterminer les coordonnées de $\vec{a}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
3. On note A le point de coordonnées $(1,2)$ dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer les coordonnées de A dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
4. On note $\vec{b}$ le vecteur de coordonnées $(2,2)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Déterminer les coordonnées de $\vec{b}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.
5. On note B le point de coordonnées $(2,-3)$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Déterminer les coordonnées de B dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 5

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $\vec{u}_\theta$ et $\vec{v}_\theta$ les vecteurs de coordonnées respectives $(\cos\theta, \sin\theta)$ et $(-\sin\theta, \cos\theta)$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Montrer que $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ est une base orthonormale directe du plan.
2. Soit M un point. On note (x, y) ses coordonnées dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et (x_θ, y_θ) ses coordonnées dans $(O, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$. .
   (a) Exprimer x et y en fonction de x_θ et y_θ.
   (b) Exprimer x_θ et y_θ en fonction de x et y .

Exercice 6

On munit le plan d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère les points $A(1,3)$, $B(3,2)$, $C(2,2)$, $D(1,1)$, $E(-1,1)$ et $F(1,0)$. Déterminer les produits scalaires et les déterminants suivants :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}, \quad \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{DE}), \quad \det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BE}), \quad \det(\overrightarrow{BE}-7\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}), \quad \det(2\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{EF}).$$

Exercice 7

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
Soient les points $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC issue du point C.
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[BC]$.
3. Déterminer une équation paramétrique de la médiane issue de C.

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne ainsi qu'une représentation paramétrique de la droite considérée :

1. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par le point $A(4,3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u_1}(1,1)$.
2. $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par le point $B(5,7)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u_2}(2,3)$.
3. $\mathcal{D}_3$ est la droite passant par le point $C(0,3)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n_3}(2,2)$.
4. $\mathcal{D}_4$ est la droite passant par le point $D(-2,-1)$ et orthogonale au vecteur $\vec{n_4}(-1,3)$.
5. $\mathcal{D}_5$ est la droite passant par les points de coordonnées $E(-4,1)$ et $F(0,2)$.

Exercice 9

Dans les cas suivants déterminer les intersections de D_1 et D_2 si elles existent.

a) D_1 passe par le point $A_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et est dirigée par le vecteur $\vec{d_1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ tandis que D_2 passe par le point $A_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et est dirigée par le vecteur $\vec{d_2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

b) D_1 passe par le point $A_1\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}$ et est dirigée par le vecteur $\vec{d_1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ tandis que D_2 a pour équation cartésienne $2y+3x=-1$.

c) D_1 a pour équation cartésienne $y=-x+5$ tandis que D_2 a pour équation cartésienne $2y+2x=3$.

d) D_1 a pour équation cartésienne $x-y=-1$ tandis que D_2 a pour équation paramétrique $\begin{cases}x=-3+2t\\y=-2+2t\end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$.

Exercice 10

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1,1)$, $B(2,3)$ et $C(4,0)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC, puis donner une équation de ce cercle.
3. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.
4. Déterminer les coordonnées du centre de gravité G de ABC.
5. Montrer que Ω, H et G sont alignés.

Exercice 11

Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique des cercles suivants :

1. le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $\Omega(1,3)$ et de rayon 5 ;
2. le cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre $[A,B]$ avec $A(2,5)$ et $B(-1,1)$;
3. le cercle circonscrit au triangle ABC où $A(0,0)$, $B(2,1)$ et $C(2,3)$.

Exercice 12

Déterminer le centre et le rayon des cercles d'équation cartésienne

1. $x^2+y^2-4x+4y-1=0$.
2. $2x^2+2y^2-12x+16y=-48$.
3. $2x^2+2y^2-12x+16y=-52$.
4. $x^2+y^2+a(3a-4x)+b(b+2y)=0$.

Exercice 13

Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A(1,0)$ et de rayon 2 et $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $x-y-1=0$. Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, ainsi qu'une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en ces points.

Exercice 14

Déterminer une équation des droites passant par $A(2,1)$ et tangentes au cercle de centre $B(1,-1)$ et de rayon 1.

Exercice 15

1. Soient A, B, C et D quatre points. Montrer la relation d'Euler :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

2. Soit ABC un triangle non aplati. Déduire de la relation d'Euler que les trois hauteurs de ABC sont concourantes.

Exercice 16

On considère un hexagone régulier $ABCDEF$ de côté 1.

1. Faire un dessin.
2. Calculer les produits scalaires

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$$
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE} \qquad \overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{BE} \qquad \overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{AD}$$

Exercice 17

Dans les cas suivants, déterminer l'angle $(\vec{u};\ \vec{v})$ (on se place dans un repère orthonormé direct).

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

f) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

g) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$

h) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

i) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Exercice 18

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère le point $M(-1,1)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de M sur

1. $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $3x-2y+1=0$;
2. $\mathcal{D}_2$ la droite passant par le point $A(-1,2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u_1}(1,1)$;
3. $\mathcal{D}_3$ la droite passant par le point $B(3,4)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}(2,2)$;
4. $\mathcal{D}_4$ la droite passant par les points de coordonnées $C(-4,1)$ et $D(0,2)$.

Exercice 19

le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal. Décrire les lieux suivants, et les représenter :

$$\mathcal{L}_1=\left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{P}/\ |y|=x\right\} \qquad \mathcal{L}_2=\left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{P}/\ |x|=|y|\right\}$$
$$\mathcal{L}_3=\left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{P}/\ |x-y|=1\right\} \qquad \mathcal{L}_4=\left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{P}/\ |x-y|\leq 1\right\}$$
$$\mathcal{L}_5=\left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{P}/\ x^2+y^2\leq 4\right\} \qquad \mathcal{L}_6=\left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{P}/\ y=\sqrt{x^2-1}\text{ et }x\in[-1;\ 1]\right\}$$

Quel lieu décrit cette équation paramétrique ?

$$(\mathcal{L}_7)\begin{cases}x=1+t^2\\y=1+2t^2\end{cases}\qquad\text{avec } t\in\mathbb{R}$$

Corrigé de la planche n° 3: Géométrie du plan

Exercice 1

1. Par le critère de colinéarité, $1 \times 2 \neq 2 \times (-1)$.
2. On cherche $(x;\ y)$ tels que $\overrightarrow{OA} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Dans le repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, cela conduit au système :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

On obtient après résolution

$$\begin{cases} x = \dfrac{7}{4} \\ y = \dfrac{-1}{4} \end{cases}$$

Exercice 3

1. On s'inspire des exercices précédents. On pose

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Le critère de colinéarité donne $2 \times -1 \neq 1 \times 3$ donc les vecteurs sont non colinéaires.
3. Ce système possède une unique solution car les deux vecteurs forment une base. Après résolution, on obtient :

$$\begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Exercice 4

1. Le critère de colinéarité permet de prouver que $(\vec{u};\ \vec{v})$ forment une base.
   Cette base n'est pas orthogonale car $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \neq 0$. De plus, elle n'est pas normée car $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$.
   On vérifie enfin le signe de $\sin(\vec{u};\ \vec{v})$ en examinant le déterminant

$$[\vec{u};\ \vec{v}] = -8$$

   Ainsi, l'angle est indirect car $\sin(\vec{u};\ \vec{v}) < 0$.
   $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère quelconque.
2. On sait que $\vec{a} = 2\vec{u} + 2\vec{v}$. On en déduit en coordonnées dans $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$\vec{a}\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. On sait que $\overrightarrow{\Omega A} = \vec{u} + 2\vec{v}$. On obtient donc les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega A}$ dans $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   Connaissant les coordonnées de Ω dans $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, on en déduit celles de A :

$$A\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Ici, c'est plus compliqué, il s'agit de trouver les nombres x et y tels que

$$\vec{b} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

En coordonnées dans $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, cela donne un système :

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

On obtient, après résolution :

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

5. On cherche x et y tels que

$$\overrightarrow{\Omega B} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

En coordonnées dans $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, on a

$$\overrightarrow{\Omega B}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

En coordonnées dans $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, on veut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$$

On obtient, après résolution :

$$\begin{cases} x = \frac{-3}{4} \\ y = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Exercice 5

1. On calcule $\|\vec{u}_\theta\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$. De même, on a $\|\vec{v}_\theta\| = 1$.
Ces vecteurs sont orthogonaux car $\vec{u}_\theta \cdot \vec{v}_\theta = -\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin\theta = 0$.
Enfin, l'angle $(u_\theta;\ v_\theta)$ est nécessairement $\frac{\pi}{2}$ car leur déterminant vaut
$[u_\theta;\ v_\theta] = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 > 0$.
2. (a) Par construction, on a $\overrightarrow{OM} = x_\theta\vec{u}_\theta + y_\theta\vec{v}_\theta$. Cela donne, en coordonnées dans $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x_\theta\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + y_\theta\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} x = x_\theta\cos\theta - y_\theta\sin\theta \\ y = x_\theta\sin\theta + y_\theta\cos\theta \end{cases}$$

(b) Il s'agit de résoudre le système précédent où x_θ et y_θ sont maintenant les inconnues :

$$\begin{cases} x = x_\theta\cos\theta - y_\theta\sin\theta & (L_1) \\ y = x_\theta\sin\theta + y_\theta\cos\theta & (L_2) \end{cases}$$

On raisonne par opérations sur les lignes en exploitant la formule $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$:
- $\cos\theta \times L_1 + \sin\theta \times L_2$ donne $x_\theta = x\cos\theta + y\sin\theta$
- $-\sin\theta \times L_1 + \cos\theta \times L_2$ donne $y_\theta = -x\sin\theta + y\cos\theta$

Finalement, on a :

$$\begin{cases} x_\theta = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y_\theta = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Exercice 6

On obtient $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = -4$.
En utilisant la distributivité, on obtient, $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{DE}) = -9$.
Après calcul, on a $\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BE}) = -5$.
On utilise la linéarité, et les propriétés du déterminant, pour calculer $\det(\overrightarrow{BE} - 7\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}) = 5$.
Enfin, on calcule également $\det(2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{EF}) = -5$.

Exercice 7

1. La hauteur issue du point C passe par C et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Ainsi, un vecteur directeur de cette droite est $\vec{d}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.
   On obtient donc aisément une équation paramétrique :
   $$\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$
   Une équation cartésienne est donnée par le critère d'orthogonalité. Ainsi $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient à cette droite si et seulement si
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 &\iff 2(x+1) + (y+2) = 0 \\ &\iff 2x + y = -4 \end{aligned}$$
2. Déterminons les coordonnées du milieu de $[BC]$ noté I, $I\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Un vecteur normal de la médiatrice est $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$ qui est colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. On en déduit l'équation cartésienne grâce au critère d'orthogonalité :
   $$(x-1) + y = 0 \iff x + y = 1$$
3. La médiane issue de C passe par C et par le milieu de $[AB]$ noté K. On calcule $K\begin{pmatrix}2\\3/2\end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de cette droite est donc $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}-3\\-7/2\end{pmatrix}$ qui colinéaire à $\vec{d'}\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$. On en déduit une équation paramétrique de la médiane issue de C :
   $$\begin{cases} x = -1 + 6\lambda \\ y = -2 + 7\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 8

1. Une équation paramétrique est :
   $$\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$
   Une équation cartésienne est :
   $$(y-3) = (x-4) \iff x - y = 1$$
2. Une équation paramétrique est :
   $$\begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = 7 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Une équation cartésienne est :

$$2(y-7) = 3(x-5) \iff 3x - 2y = 1$$

3. Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{d_3}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ qui est colinéaire à $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Un équation paramétrique est donc :

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Une équation cartésienne est donnée par la critère d'orthogonalité :

$$x + (y-3) = 0 \iff x + y = 3$$

4. Même démarche ! On obtient une équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Puis une équation cartésienne :

$$-(x+2) + 3(y+1) = 0 \iff x - 3y = 1$$

5. Cette droite passe par F et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$. Une équation paramétrique est donc :

$$\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 9

a) On commence par déterminer les équations cartésiennes de D_1 et D_2 grâce aux critères de colinéarité. On en déduit ensuite que les coordonnées d'une intersection de ces deux droites vérifie le système :

$$\begin{cases} 2(x-1) = y+1 \\ x - 3 = y - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x = y + 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2y + 2 - y = 3 \\ x = y + 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

L'unique intersection a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

b) Même démarche, on obtient une unique intersection de coordonnées $\begin{pmatrix}1/5\\-4/5\end{pmatrix}$.

c) Ici, il faut résoudre directement le système :

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ 2y + 2x = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} y + x = 5 \\ 2y + 2x = 3 \end{cases}$$

Par lecture du système, on constate que les deux droites ont des vecteurs normaux colinéaires : $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$. Les deux droites sont donc parallèles.

Or, elles ne sont pas confondues puisque les deux lignes du système ne sont pas équivalentes ! Ainsi, ces deux droites sont parallèles et distinctes. On en déduit que le système ne possède pas de solutions.

d) Ici, on constate qu'un vecteur normal de D_1 noté $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à un vecteur directeur de D_2 noté $\vec{d}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ car $\vec{n}_1 \cdot \vec{d}_2 = 2 - 2 = 0$. Ces deux droites sont donc parallèles.

De plus, le point $A \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ qui est sur D_2 appartient aussi à D_1 car $-3 - (-2) = -1$.

Ainsi, les deux droites sont confondues. Leur intersection est D_1 elle-même.

Exercice 10

Cet exercice est particulièrement lourd en terme de calculs. On ne donne ici que des éléments de correction ainsi que les solutions.

1. Le critère de colinéarité appliqué aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ nous montre que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Par suite, les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Il s'agit de déterminer les équations cartésiennes des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ puis de déterminer l'intersection de ces deux droites. Or ces deux droites passent par les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ et ont pour vecteurs normaux $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   On obtient le système
   $$\begin{cases} 2x + 4y = 11 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$
   Dont la solution correspond aux coordonnées de $\Omega \begin{pmatrix} 39/14 \\ 19/14 \end{pmatrix}$, le centre du cercle circonscrit.
   Le rayon du cercle vaut $R = \Omega A = \dfrac{5\sqrt{26}}{14}$.
   L'équation cartésienne de ce cercle est donc :
   $$\left(x - \frac{39}{14}\right)^2 + \left(y - \frac{19}{14}\right)^2 = \frac{325}{98}$$
3. On doit déterminer les équations des hauteurs issues de B et C par exemple puis déterminer l'intersection de ces deux droites. Après calcul, cela revient à résoudre le système :
   $$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$
   On obtient les coordonnées de $H \begin{pmatrix} 10/7 \\ 9/7 \end{pmatrix}$.
4. On doit déterminer les équations des médianes issues de B et C puis déterminer l'intersection de ces deux droites. Cela revient à résoudre le système :
   $$\begin{cases} 4x + 5y = 16 \\ 5x + y = 13 \end{cases}$$
   On obtient ainsi $G \begin{pmatrix} 7/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$.
5. On calcule les coordonnées de vecteurs $\overrightarrow{G\Omega} \begin{pmatrix} 19/42 \\ 1/42 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} -19/21 \\ -1/21 \end{pmatrix}$. Il est clair que ces deux vecteurs sont colinéaires. Plus précisément, on a
   $$-2\overrightarrow{G\Omega} = \overrightarrow{GH}$$

Exercice 11

1. Équation cartésienne :
$$(x-1)^2+(y-3)^2=25$$
Représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 1+5\cos(\theta) \\ y = 3+5\sin(\theta) \end{cases} \quad , \theta \in]-\pi;\ \pi]$$

2. On calcule $AB = 5$. Le rayon est donc de $\dfrac{5}{2}$.
Le milieu de $[AB]$, qui est le centre du cercle, est $m[AB]\begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
De tout cela, on déduit une équation cartésienne :
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{25}{4}$$
Et une représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}+\frac{5}{2}\cos(\theta) \\ x = 3+\frac{5}{2}\sin(\theta) \end{cases} \quad , \theta \in]-\pi;\ \pi]$$

3. On calcule les équations de deux médiatrices (par exemple celles de $[AB]$ et de $[BC]$) en précisant pour chacune de ces droites un vecteur normal (le vecteur formé par les points du segment) et un point (le milieu du segment).
Les coordonnées du centre du cercle vérifient ainsi le système :
$$\begin{cases} 2x+y = \frac{5}{2} \text{ (médiatrice de } [AB]) \\ y = 2 \text{ (médiatrice de } [BC]) \end{cases}$$
Après résolution, on en déduit que le centre du cercle circonscrit, noté K, a comme coordonnées $K\begin{pmatrix} 1/4 \\ 2 \end{pmatrix}$. On calcule enfin le rayon $AK = \dfrac{\sqrt{65}}{4}$.
Une équation cartésienne de ce cercle est donc :
$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+(y-2)^2=\frac{65}{16}$$
Et une représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{65}}{4}\cos(\theta) \\ x = 2+\frac{\sqrt{65}}{4}\sin(\theta) \end{cases} \quad , \theta \in]-\pi;\ \pi]$$

Exercice 12

On utilise à chaque fois les formes canoniques pour retrouver, par identification, les coordonnées du centre ainsi que le rayon. On obtient

1. Centre : $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, rayon 3.
2. Centre : $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, rayon 1.
3. Ce n'est pas un cercle car l'équation est, après calcul, équivalente à :
$$(x-3)^2+(y+4)^2=-1$$
4. Centre : $\begin{pmatrix} 2a \\ -b \end{pmatrix}$, rayon $|a|$.

Exercice 13

Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $(x-1)^2+y^2=4$.

Un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est à l'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$ lorsque :

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4\\x-y=1\end{cases} \iff \begin{cases}(y+1-1)^2+y^2=4\\x=y+1\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}2y^2=4\\x=y+1\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}y=\sqrt{2}\\x=\sqrt{2}+1\end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases}y=-\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}+1\end{cases}$$

La droite coupe donc le cercle en deux points $M_1\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $M_2\begin{pmatrix}-\sqrt{2}+1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

Ici on a fait une substitution sur x (en bleu) pour résoudre le système.

Pour trouver les équations de tangente, il faut se rappeler que la tangente en M_1 passe par M_1 et est orthogonale à $\overrightarrow{AM_1}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

On en déduit que $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de cette tangente en M_1. On obtient donc une équation cartésienne de cette tangente en M_1, notée T_1, par le critère d'orthogonalité :

$$1\times\left(x-\sqrt{2}-1\right)+1\times\left(y-\sqrt{2}\right)=0 \iff x+y=2\sqrt{2}+1 \qquad (T_1)$$

De même, on calcule une équation de la tangente en M_2 notée T_2 par le même genre de raisonnement :

$$1\times\left(x+\sqrt{2}-1\right)+1\times\left(y+\sqrt{2}\right)=0 \iff x+y=-2\sqrt{2}+1 \qquad (T_2)$$

Exercice 14

Un point M du cercle est sur l'une de ces deux droites si et seulement si le rayon $[BM]$ est orthogonal à (AM).

Les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de M vérifient donc à la fois l'équation du cercle et la relation $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=1^2\\(x-2)(x-1)+(y-1)(y+1)=0\end{cases} \iff \begin{cases}x^2+y^2-2x+2y=-1\\x^2+y^2-3x=-1\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}x+2y=0\\x^2+y^2-3x=-1\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}x=-2y\\5y^2+6y+1=0\end{cases}$$

On résout cette dernière équation, on obtient deux racines -1 et $-\dfrac{1}{5}$. Ainsi les points $M_1\begin{pmatrix}2/5\\-1/5\end{pmatrix}$ et $M_2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ sont les deux points d'intersection de ces deux tangentes avec le cercle.

Notons D_1 et D_2 ces droites. Elles ont pour vecteurs normaux $\overrightarrow{BM_1}\begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM_2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. En outre, elles passent toutes les deux par le point A.

On en déduit leurs équations cartésiennes respectives $-3(x-2)+4(y-1)=0 \iff -3x+4y=-2 \quad (D_1)$ et $x-2=0 \iff x=2 \quad (D_2)$.

Exercice 15

1. Utilisons la relation de Chasles à bon escient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\\
&= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\\
&= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\right)\\
&= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\\
&= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\vec{0}=0
\end{aligned}$$

2. Notons H l'intersection de la hauteur issue de A et de la hauteur issue de B.
   Écrivons alors la relation d'Euler pour les quatre points A, B, C et H :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

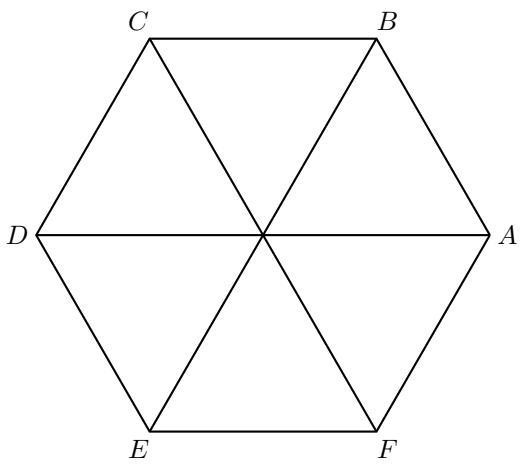
   Or, on sait que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HB}=0$ car H est sur la hauteur issue de B et $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ car H est sur la hauteur issue de A.
   On en déduit :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=0$$

   Ce qui prouve que H est sur la hauteur issue de C.

Exercice 16

1.



2. On exploite le fait que les triangles formés ci-dessus sont tous équilatéraux ainsi que la relation de Chasles.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{2}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 3$ $\quad$ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{2}$ $\quad$ $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BE} = -2$ $\quad$ $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{AD} = 2$

Exercice 17

Par définition, pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tous non nuls, on a :

$$\begin{cases} \cos(\vec{u};\ \vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|} \\ \sin(\vec{u};\ \vec{v}) = \frac{\det(\vec{u};\ \vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|} \end{cases}$$

À partir de ces deux relations, on détermine les sinus et cosinus de l'angle $(\vec{u};\ \vec{v})$, ce qui permet de retrouver sa valeur, en utilisant éventuellement les fonctions trigonométriques réciproques.

a) π

b) π

c) $\frac{-3\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{2}$

e) $\frac{\pi}{3}$

f) $-\arctan(3) + \pi$

g) $\frac{-5\pi}{6}$

h) $\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \pi$

i) $-\arctan\left(\frac{3}{4}\right)$

Exercice 18

On note $M'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le projeté de M.

1. M' vérifie :
   - $M' \in D_1$;
   - $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à D_1 ;

   Ces deux conditions donnent un système :

   $$\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

   Après résolution, on obtient :

   $$\begin{cases} x = \frac{-1}{13} \\ y = \frac{5}{13} \end{cases}$$

2. M' vérifie :
   - $\overrightarrow{AM'}$ est colinéaire à $\vec{u_1}$;
   - $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\vec{u_1}$;

   Ces deux conditions donnent un système :

   $$\begin{cases} x - y = -3 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

   Après résolution, on obtient :

   $$\begin{cases} x = \frac{-3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

3. M' vérifie :
   - $\overrightarrow{BM'}$ est orthogonal à $\vec{n}$;
   - $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{n}$;

Ces deux conditions donnent un système :

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

Après résolution, on obtient :

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

4. M' vérifie :
   - $\overrightarrow{CM'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CD}$;
   - $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CD}$.

   Ces deux conditions donnent un système :

$$\begin{cases} x - 4y = -8 \\ 4x + y = -3 \end{cases}$$

   Après résolution, on obtient :

$$\begin{cases} x = \frac{-20}{17} \\ y = \frac{29}{17} \end{cases}$$

Planche n° 4: Applications et dénombrement

Exercice 1

Soit E et F deux ensembles et $u : E \to F$ une application.

A et B sont deux sous-ensembles de E non vides.
C et D sont deux sous-ensembles de F non vides.

Montrer les assertions suivantes :

a) $u(A \cup B) = (u(A) \bigcup u(B))$.

b) $u(A \cap B) \subset (u(A) \bigcap u(B))$.

c) $u^{-1}\langle C \cap D \rangle = \left(u^{-1} < C > \bigcap u^{-1} < D >\right)$.

d) $u^{-1}\langle C \cup D \rangle = \left(u^{-1} < C > \bigcup u^{-1} < D >\right)$.

e) $u^{-1}\langle F \backslash C \rangle = \left(E \backslash u^{-1} < C >\right)$.

Exercice 2

Soient f et g les fonctions réelles à valeurs réelles définies par $f(x) = x+1$ et $g(x) = \dfrac{x^2+x}{x}$. Les fonctions f et g sont-elles égales ?

Exercice 3

1. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{cases}$. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Mêmes questions pour l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$
3. Déterminer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 4

(Démonstration d'un théorème du cours)
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Montrer que f est bijective et que g est la réciproque de f.

Exercice 5

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective sur E. Montrer que f est injective sur E.
   L'application g est-elle nécessairement injective ?
2. On suppose que $g \circ f$ est surjective de E sur G. Montrer que g est surjective de F sur G.
   L'application f est-elle nécessairement surjective ?
3. Soit $h : G \longrightarrow H$ une application.
   Montrer que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g et h sont bijectives.
4. Soit $\varphi : E \longrightarrow E$ une application telle que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_E$ (on dit que φ est *involutive*).
   Montrer que φ est bijective. Que vaut sa réciproque φ^{-1} ?

Exercice 6

Soient $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} n-1 & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$.

Montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Peut-on en déduire que l'application g est la réciproque de f ?

Exercice 7

1. Déterminer l'image directe par la fonction sinus de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $[0, 2\pi]$,$[0, \pi/2]$, $[-\pi, \pi/2]$.
2. Déterminer l'image réciproque par la fonction sinus de $[-1, 1]$, $[0, 1]$,$[3, 4]$, $\mathbb{R}$, $\{1\}$, $\{-1, 1\}$.

Exercice 8

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2 - 4x + 1 \end{array} \right.$.

1. La fonction f est-elle injective sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que f est injective sur $[1, +\infty[$. En déduire que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur son image (que l'on précisera) et déterminer son application réciproque.
3. Déterminer $f([0, 1])$, $f(\mathbb{R}_-)$, $f(\mathbb{R}_+)$, $f([-2, 2])$, $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}([0, 1])$, $f^{-1}([-2, 1])$.

Exercice 9

Dans un sac contenant n billes numérotées, on prélève k billes (avec $k \leq n$) simultanément.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages possibles :
   (a) contenant la bille 1 ;
   (b) ne contenant pas la bille n° 1.
3. Quel résultat retrouve-t-on ?

Exercice 10

Soient A, B et C trois ensembles finis. Montrer que l'on a

$$\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C) - \mathrm{Card}(B \cap C) + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C).$$

Application. Dans un lycée, il y a 800 élèves. 300 sont des garçons, 352 font partie d'une association, 424 étudient l'anglais, 188 garçons font partie d'une association, 166 garçons étudient l'anglais, 208 font partie d'une association et étudient l'anglais, 144 garçons étudient l'anglais et font partie d'une association. Combien y a-t-il de filles qui ne font pas partie d'une association et n'étudient pas l'anglais ?

Exercice 11

Une course oppose 12 hommes d'affaire.

- Déterminer le nombre de tiercés possibles (l'ordre est important).
- Déterminer le nombre de trios possibles (l'ordre n'est pas pris en compte).

Exercice 12

On colore les faces d'un cube en rouge puis on découpe ce cube en 27 petits cubes de même taille que l'on place dans un sac.

1. Faire l'inventaire des petits cubes selon le nombre de faces colorées.
2. On tire avec remise 3 petits cubes. Déterminer le nombre de tirages donnant :
   (a) exactement 3 cubes ayant chacun deux faces rouges ;

(b) exactement 2 cubes ayant chacun deux faces rouges ;
(c) exactement 1 cube possédant deux faces rouges ;
(d) un nombre total de faces rouges égal à quatre.

Exercice 13

Soit E l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun 1.

1. Déterminer le cardinal de E.
2. Déterminer le cardinal de E_1, la partie de E constituée des nombres ayant 7 chiffres différents.
3. Déterminer le cardinal de E_2, la partie de E constituée des nombres pairs.
4. Déterminer le cardinal de E_3, la partie de E constituée des nombres dont la suite des chiffres (dans l'ordre où ils sont écrits) est strictement croissante.

Exercice 14

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

1. sans imposer de contraintes sur les cartes ?
2. contenant 5 cœurs ou 5 trèfles ?
3. contenant 2 cœurs et 3 trèfles ?
4. contenant au moins un as ?
5. contenant au plus un as ?
6. contenant 2 as et 3 cœurs ?

Exercice 15

On souhaite ranger sur une étagère 13 livres distincts comprenant 4 livres de mathématiques , 6 livres de physique et 3 de SI. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement

1. si les livres doivent être groupés par matières ?
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés ?

Exercice 16

Déterminer le nombre d'anagrammes des mots « maths », « rire » et « ananas ».

Exercice 17

Combien y a-t-il de façons de ranger dans n tiroirs

a) p couteaux distincts deux à deux ?

b) p couteaux identiques ?

Exercice 18

Vous êtes 26 élèves dans la classe. Je parie que deux d'entre vous (au moins) ont la même date d'anniversaire. Quelles sont mes chances d'avoir raison ?

Exercice 19

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Déterminer le nombre de parties de E de cardinal pair (proposer une conjecture et la démontrer par récurrence).

Exercice 20

Soit E un ensemble fini. Calculer $\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(A)$.

Exercice 21

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On note $S(n,p)$ le nombre de surjection d'un ensemble de cardinal n dans un ensemble de cardinal p.

1. Calculer $S(n,p)$ pour $p > n$, $S(n,n)$, $S(n,1)$, $S(n,2)$.
2. Calculer $S(n+1,n)$.
3. Démontrer que pour tout $n > 1$ et tout $p > 1$, on a $S(n,p) = pS(n-1,p) + S(n-1,p-1)$.
4. Proposer un algorithme en `Python` pour calculer $S(n,p)$.

Exercice 22

Écrire en `Python` les fonctions suivantes :

- `factorielle` qui prend pour argument un entier n et qui renvoie $n!$;
- `arrange` qui prend pour argument deux entiers n et p et qui renvoie le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments ;
- `combin` qui prend pour argument deux entiers n et p et qui renvoie le nombre de sous-ensembles à p éléments dans un ensemble à n éléments.
  Indication: Tester cette fonction avec $n = 1000$ et $p = 999$. Si elle est bien codée, elle ne doit pas renvoyer d'erreur de capacité !

Corrigé de la planche n° 4: Applications et dénombrement

a) Montrons la double inclusion.

Soit $y \in u(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tel que $u(x) = y$.
On sait que $x \in A$ ou $x \in B$. On en déduit que $u(x) \in u(A)$ ou $u(x) \in u(B)$, ce qui prouve $y \in u(A) \cup u(B)$ et ainsi $u(A \cup B) \subset u(A) \cup u(B)$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in u(A) \cup u(B)$. De deux choses l'une :
- soit $y \in u(A)$ et donc il existe $x \in A$ tel que $u(x) = y$;
- soit $y \in u(B)$ et donc il existe $x \in B$ tel que $u(x) = y$.

Or, dans les deux cas, $x \in A \cup B$, ce qui prouve $y \in u(A \cup B)$ et ainsi $u(A \cup B) \supset u(A) \cup u(B)$.

b) Le cas où $A \cap B = \varnothing$ est trivial. On se place donc dans le cas contraire.

Soit $y \in u(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $u(x) = y$. En particulier $x \in A$ et $x \in B$, ce qui donne $u(x) \in u(A)$ et $u(x) \in u(B)$ et ainsi $y \in u(A) \cap u(B)$, ce qui permet de conclure : on a bien prouvé $u(A \cap B) \subset u(A) \cap u(B)$.

c) Montrons l'inclusion directe.

Si $C \cap D = \varnothing$, on a $u^{-1}\langle C \cap D\rangle = \varnothing \subset u^{-1} < C > \cap u^{-1} < D >$.

On se place dans le cas contraire. Soit $x \in u^{-1}\langle C \cap D\rangle$. On sait que $u(x) \in C \cap D$ donc $u(x) \in C$ et $u(x) \in D$, ce qui prouve que $x \in u^{-1} < C > \cap u^{-1} < D >$ et permet de conclure quant à l'inclusion directe.

Montrons l'inclusion réciproque.

Si $u^{-1} < C > \cap u^{-1} < D >= \varnothing$, cet ensemble est bien inclus dans $u^{-1}\langle C \cap D\rangle$.

On se place dans le cas contraire. Soit $x \in u^{-1} < C > \cap u^{-1} < D >$. On sait que $x \in u^{-1} < C >$ donc $u(x) \in C$ et, de même, $x \in u^{-1} < D >$ donc $u(x) \in D$. On en déduit que $u(x) \in C \cap D$ et ainsi $x \in u^{-1}\langle C \cap D\rangle$. Cela permet de conclure : on a bien $u^{-1}\langle C \cap D\rangle \supset u^{-1} < C > \cap u^{-1} < D >$.

d) Les cas où $u^{-1}\langle C \cup D\rangle = \varnothing$ ou $u^{-1} < C > \cup u^{-1} < D >= \varnothing$ doivent être discutés séparément mais ils ne posent pas vraiment de problème. On se placera donc dans le cas contraire.

Montrons l'inclusion directe. Soit $x \in u^{-1}\langle C \cup D\rangle$. On a $u(x) \in C \cup D$ donc $u(x) \in C$ ou $u(x) \in D$, ce qui donne $x \in u^{-1} < C >$ ou $x \in u^{-1} < D >$ et ainsi $x \in u^{-1} < C > \cup u^{-1} < D >$. L'inclusion directe est prouvée.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in u^{-1} < C > \cup u^{-1} < D >$. On sait que $x \in u^{-1} < C >$ ou $x \in u^{-1} < D >$. Dans le premier cas $u(x) \in C$ et dans le second $u(x) \in D$. On en déduit que $u(x) \in C \cup D$, ce qui prouve $x \in u^{-1}\langle C \cup D\rangle$. L'inclusion réciproque est prouvée.

e) Les cas où $u^{-1}\langle F \backslash C\rangle = \varnothing$ ou $E \backslash u^{-1} < C >= \varnothing$ ne posent pas trop de problème. On se place donc dans le cas contraire.

Montrons l'inclusion directe. Soit $x \in u^{-1}\langle F \backslash C\rangle$. On sait que $u(x) \notin C$ donc $x \notin u^{-1} < C >$, ce qui donne $x \in E \backslash u^{-1} < C >$ et prouve l'inclusion directe.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in E \backslash u^{-1} < C >$. On sait que $x \notin u^{-1} < C >$ et ainsi $u(x) \notin C$. En particulier $u(x) \in F \backslash C$ et ainsi $x \in u^{-1}\langle F \backslash C\rangle$. On a prouvé l'inclusion réciproque.

Exercice 1

Non, car leurs domaines de définition ne sont pas identiques (g est définie sur $\mathbb{R}^*$ tandis que f est définie sur $\mathbb{R}$).

Exercice 2

1. Elle est injective. En effet, pour tout $(n_1;\ n_2) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} f(n_1) = f(n_2) &\iff 2n_1 = 2n_2 \\ &\iff n_1 = n_2 \end{aligned}$$

   Mais elle n'est pas surjective car 1 n'a pas d'antécédents.

2. L'application est surjective. En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}$, p possède au moins un antécédent.
   En l'occurrence, $g(2p) = \dfrac{2p}{2} = p$.
   Elle n'est pas injective car $g(2) = g(1) = 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g \circ f(n) = g(2n) = n$ donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Cette application est bijective.
   De même, on a $f \circ g(n) = \begin{cases} f(n) = 2n \text{ si } n \text{ est impair.} \\ f\left(\frac{n}{2}\right) = n \text{ sinon} \end{cases}$. Cette application n'est pas injective car $f \circ g(1) = f \circ g(2) = 2$. Elle n'est pas surjective car 1 n'a pas d'antécédents (puisque toutes les images sont paires).

Exercice 5

Pour tout entier n, $g \circ f(n) = g(n+1) = n + 1 - 1 = n$ donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

Pour autant, g n'est pas la réciproque de f. En effet, $f \circ g(n) = \begin{cases} f(n-1) = n \text{ si } n \geq 1 \\ f(0) = 1 \text{ si } n = 0 \end{cases}$

Ainsi, $f \circ g \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 7

1. On détermine la forme canonique de f. Après calcul, on obtient, pour tout x :

$$f(x) = 2(x-1)^2 - 1$$

   Cela nous donne le tableau de variations de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

   La fonction n'est pas injective. En effet, on vérifie facilement que $f(0) = f(2) = 1$.

2. f est strictement croissante sur $[1;\ +\infty[$ donc elle est injective. On vérifie par le tableau de variations que $f([1;\ +\infty[) = [-1;\ +\infty[$.
   Donc f est bijective de $[1;\ +\infty[$ vers $[-1;\ +\infty[$.
   Pour déterminer sa réciproque, il faut déterminer pour tout $y \in [-1;\ +\infty[$, l'unique antécédent de y sur $[1;\ +\infty[$. Or, pour tout x et pour tout $y \geq -1$:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff 2(x-1)^2 - 1 = y \\ &\iff (x-1)^2 = \frac{y+1}{2} \\ &\iff x = 1 \pm \sqrt{\frac{y+1}{2}} \end{aligned}$$

Or, seul $x + \sqrt{\dfrac{y+1}{2}}$ est dans l'intervalle $[1;\ +\infty[$. On en déduit l'expression

$$f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{\frac{y+1}{2}}$$

3. Par lecture du tableau de variations et en calculant $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-2)$, on obtient :

$$f([0;\ 1]) = [-1;\ 1] \qquad f(\mathbb{R}_-) = [1;\ +\infty[\qquad f(\mathbb{R}_+) = [-1;\ +\infty[\qquad f([-2;\ 2]) = [-1;\ 17]$$

On calcule $f^{-1}(\{1\}) = \{2\}$, $f^{-1}(\{-1\}) = \{1\}$ avec la fonction réciproque de f.
Enfin, reste à déterminer $f^{-1}(0) = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour obtenir $f^{-1}([0,1]) = \left[1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2};\ 2\right]$

Il ne faut pas confondre $f^{-1}\langle[0;\ 1]\rangle$ qui est l'image réciproque de $[0;\ 1]$ par f, c'est à dire l'ensemble des antécédents des nombres de $[0;\ 1]$ par la fonction f avec $f^{-1}([0,1])$ qui est l'image directe de l'intervalle $[0;\ 1]$ par la fonction f^{-1}, réciproque de f.
En particulier, on a $f^{-1}\langle[0;\ 1]\rangle = \left[0;\ 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2};\ 2\right]$ avec l'exemple précédent.

Exercice 10

- Le nombre de tiercés correspond aux nombres d'injections de $[\![1;\ 3]\!]$ vers l'ensemble des hommes d'affaire.
  C'est donc $12 \times 11 \times 10 = 1320$
- Par définition, ce nombre vaut $\binom{12}{3} = \dfrac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$.

Exercice 11

1. En faisant un petit dessin, on obtient :

Nombre de faces colorées	3	2	1	0
Nombre de cubes	8	12	6	1

2. Pour simplifier, on notera T_3, T_2, T_1, T_0 les types de cubes en fonction du nombre de faces colorées.
   (a) On obtient 3 cubes T_2 de 12^3 manières différentes. En effet comme il y a remise, il s'agit de compter le nombre d'applications de $[\![1;\ 3]\!]$ vers les cubes T_2.
   (b) On obtient 2 cubes T_2 *puis* un cube autre de $12^2 \times 15$ manières.
   Mais le cube autre peut aussi être en première position ou en seconde position. Ainsi, il y a $3 \times 15 \times 12^2$ tirages possibles.
   (c) C'est le même principe, on obtient $3 \times 12 \times 15^2$ possibilités.
   (d) Il faut faire une disjonction de cas. Il y a trois configurations qui conduisent à quatre faces rouges :
   (Cas n° 1) On obtient un cube T_3 et un cube T_1 et un cube T_0. Il y a $3! = 6$ manières d'ordonner ces trois types.
   Pour un ordre donné, il y a $8 \times 6 \times 1$ manières.
   On obtient donc $6 \times 8 \times 6$ tirages possibles dans ce cas.
   (Cas n° 2) On obtient deux cube T_2 et un cube T_0. Il y a 3 manières de placer le type T_0.
   On obtient donc $3 \times 12^2 \times 1$ tirages possibles dans ce cas.
   (Cas n° 3) On obtient un cube T_2 et deux cubes T_1. Là encore il y a 3 manières de positionner le cube T_2.
   On obtient donc $3 \times 12 \times 6^2$ possibilités.
   Finalement, on obtient $3 \times 8 \times 6 + 3 \times 12^2 + 3 \times 12 \times 6^2 = 2016$ possibilités.

Exercice 12

1. On note U, l'ensemble des chiffres sauf 1. On a $\text{card}(C) = 9$.
   Soit Z, l'ensemble des chiffres sauf 0 et 1. On a $\text{card}(Z) = 8$.
   Un nombre est dans E si et seulement si son écriture décimale :
   - commence par un chiffre de Z,
   - suivi de sept chiffres de U
   On a ainsi $\text{card}(E) = 8 \times 9^6$.
2. Pour obtenir un élément de E_1 :
   - on choisit un chiffre de Z,
   - suivi d'un chiffre de U différent du précédent,
   - suivi d'un second chiffre de U différent des deux précédents,
   - et ainsi de suite...
   - le dernier chiffre choisit est différent des six précédents.
   Sachant que $Z \subset U$, on en déduit :
   $$\text{card}(E_1) = 8 \times 8 \times 7 \times \cdots \times 3 = 8 \times \frac{8!}{2!}$$
3. Un nombre de E est pair si et seulement si son chiffre des unités est dans l'ensemble $\{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8\}$.
   On en déduit
   $$\text{card}(E_2) = 8 \times 9^5 \times 5$$
4. Faisons une remarque préliminaire : le premier chiffre écrit ne peut pas être strictement supérieur à 3, c'est donc forcément 1 ou 2 ou 3.

   Réalisons une disjonction de cas.
   - Si le premier chiffre écrit est 3, on connaît ce chiffre : c'est 3456789.
   - Si le premier chiffre écrit est 2, il est possible ou non que deux chiffres consécutifs soit distant de 2.
     Par exemple, le nombre 2346789 convient. Il y a six positions possibles pour placer cet éventuel saut de 2.
     Dans le cas, où il n'y a pas de saut de 2, seul le nombre 2345678 convient.
     Finalement il y a donc $6 + 1 = 7$ nombres de cet ensemble qui commencent par 2.
   - Enfin, si le premier chiffre écrit est 1, il est possible :
     — de n'avoir aucun saut de 2 : un nombre,
     — d'avoir un saut de 2 : six nombres,
     — d'avoir deux sauts de 2 : $\binom{6}{2}$ nombres, soit 15 nombres,
     — d'avoir un saut de 3 : six nombres.
     On a donc, dans ce cas, $1 + 6 + 15 + 6 = 28$ nombres.

   En rassemblant tous les cas, on obtient :
   $$\text{card}(E_3) = 1 + 7 + 28 = 36$$

Exercice 13

1. C'est $\binom{32}{5} = 201\ 376$.
2. On obtient 5 cœurs en choisissant 5 cartes parmi 8. Donc il y a $\binom{8}{5} = 56$ manières de procéder.
   On obtient 5 trèfles en choisissant 5 cartes parmi 8. Donc il y a aussi 56 manières de procéder.
   Finalement, il y a $2 \times 56 = 112$ manières d'obtenir 5 trèfles ou 5 cœurs.
3. Il y a $\binom{8}{2}$ manières d'obtenir 2 cœurs et $\binom{8}{3}$ manières d'obtenir 3 trèfles.
   Donc il y a $\binom{8}{2} \times \binom{8}{3} = 1\ 568$ manières d'obtenir 2 cœurs et 3 trèfles.
4. Considérons le contraire : n'obtenir aucun as. Il y a $\binom{28}{5}$ manières de procéder.
   Donc, on obtient au moins un as de $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103\ 096$ manières
5. On peut faire une disjonction de cas :

(Cas n° 1) On obtient aucun as.
On a déjà calculé qu'il y a $\binom{28}{5} = 98\ 280$ manières d'obtenir une telle main.

(Cas n° 2) On obtient exactement un as. Il y a 4 manières de choisir un as, puis $\binom{28}{4}$ manières de choisir les 4 autres cartes.
Ainsi, il y a $4 \times \binom{28}{4} = 81\ 900$ manières d'obtenir exactement un as.

Finalement, il y a $98\ 280 + 81\ 900 = 180\ 180$ manières d'obtenir au plus un as.

6. Là encore, il convient de faire une disjonction de cas et d'être vigilant quant à la lecture de l'énoncé.

(Cas n° 1) On obtient 3 cœurs (qui ne sont pas des as) et 2 as (sans l'as de cœur).
Il y a $\binom{7}{3} \times \binom{3}{2} = 105$ manières de procéder.

(Cas n° 2) On obtient l'as de cœur ainsi qu'un autre as, ainsi que deux autres cœurs, ainsi qu'une dernière carte. Il y a 21 manières de choisir cette dernière carte (ni un as, ni un cœur).
Donc, on obtient ce tirage de $21 \times \binom{3}{1} \times \binom{7}{2} = 1\ 323$ manières.

Finalement, il y a donc $105 + 1\ 323 = 1\ 428$ manières.

Exercice 14

1. Si les livres sont rangés par matière, il y a 3 « blocs » de livres. On peut ranger ces 3 blocs de $3! = 6$ manières différentes.
   Au sein du bloc de maths, il y a 4! rangements possibles. Au sein du bloc de physique, il y a 6! rangements possibles. Et enfin, il y a 3! rangements possibles des livres de SI.
   Cela donne au total $3! \times 4! \times 6! \times 3! = 622\ 080$ rangement possibles.
2. Il y a 9! manières de ranger les autres livres que ceux de maths. On peut également placer le bloc de livres de maths au sein de 10 positions et enfin, il y a 4! manières de ranger les livres de maths.
   On obtient au total $9! \times 4! \times 10 = 87\ 091\ 200$ rangements possibles.

Exercice 15

Pour le mot « maths », toutes les lettres sont distinctes. Cela revient donc à compter les bijections de $[\![1;\ 5]\!]$ vers $\{M;\ A;\ T;\ H;\ S\}$. Il y en a $5! = 120$.

Pour le mot « rire », les deux "r" peuvent poser problème. On va donc décrire la manière de fabriquer un anagramme :

(étape 1) on place les deux "r" sur les quatre emplacements disponibles : $\binom{5}{2} = 10$ possibilités ;

(étape 2) on place le "i" sur les deux emplacements restants : 2 possibilités ;

(étape 3) on place le "e" sur le dernier emplacement : 1 possibilité.

Il y a donc $10 \times 2 = 20$ anagrammes de « rire. »

Pour le mot « ananas », on suit la même démarche :

(étape 1) on place les trois "a" sur les six emplacements disponibles : $\binom{6}{3} = 20$ possibilités ;

(étape 2) on place les deux "n" sur les trois emplacements restants : $\binom{3}{2} = 3$ possibilités ;

(étape 3) on place le "s" sur le dernier emplacement : 1 possibilité.

Il y a donc $20 \times 3 = 60$ anagrammes de « ananas. »

Exercice 16

a) Dans le cas où les couteaux sont distincts deux à deux, faire un tel rangement revient à établir une application de l'ensemble des p couteaux vers les n tiroirs. Il y a donc n^p manières de procéder.

b) Puisque les couteaux sont indiscernables, un rangement est entièrement défini par le nombre de couteaux dans chaque tiroir. On note pour tout $i \in [\![1;\ n]\!]$, k_i le nombre de couteaux dans le tiroir n° i.

Les (k_i) vérifient $\sum_{i=1}^{n} k_i = p$ (nombre total de couteaux).

Il s'agit donc de déterminer le cardinal de l'ensemble suivant :

$$\mathcal{R}_{n,\ p} = \left\{ (k_1;\ k_2;\ \cdot;\ k_n) \in \mathbb{N}^n / \sum_{i=1}^{n} k_i = p \right\}$$

Il n'est pas aisé de trouver directement une formule pour ce cardinal. Nous allons donc procéder par tâtonnement.

- Supposons $n = 1$. Il n'y a qu'une manière de ranger les couteaux car il n'y a qu'un seul tiroir. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:
$$\operatorname{card}(\mathcal{R}_{1,\ p}) = 1$$
- Supposons $n = 2$. Il y a $p+1$ manières de remplir le premier tiroir car le nombre de couteaux dans ce tiroir varie entre 0 et p. Une fois le premier tiroir remplir, tous les autres couteaux vont dans le second tiroir. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:
$$\operatorname{card}(\mathcal{R}_{2,\ p}) = p + 1$$
- Supposons $n = 3$. Réalisons une disjonction de cas selon le nombre k_1 de couteaux dans le premier tiroir en remarquant qu'une fois remplis les deux premiers tiroirs, il n'y a plus de choix pour le dernier tiroir qui récupère tous les couteaux restants.
  - pour $k_1 = 0$, il y a $p+1$ manières de remplir le second tiroir ;
  - pour $k_1 = 1$, il y a p manières de remplir le second tiroir ;
  - $\cdots$
  - pour $k_1 = p$, il y a 1 manière de remplir le second tiroir.

  On obtient ainsi :
$$\operatorname{card}(\mathcal{R}_{2,\ p}) = (p+1) + p + \cdots + 1 = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$
- Supposons n quelconque supérieur ou égal à 3.

  On sait qu'il suffit de choisir les entiers $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n-1}$ telles que $\sum_{i=1}^{n-1} k_i \leq p$ pour déterminer complètement le rangement. Mais choisir ces nombres revient à choisir leurs sommes cumulées respectives que l'on note (s_i) et que l'on définit pour tout $i \in [\![1;\ n-1]\!]$ par :
$$s_i = k_1 + k_2 + \cdots + k_i = \sum_{j=1}^{i} k_i$$
  L'intérêt d'un tel choix est que l'on a $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq p$, ce qui revient à choisir $n-1$ éléments éventuellement égaux dans l'ensemble $[\![0;\ p]\!]$. Nous savons comment choisir $n-1$ éléments distincts deux à deux dans $[\![0;\ p]\!]$. Il nous faut maintenant prendre en compte les cas d'égalité.

  Pour ce faire, nous allons ajouter à l'ensemble $[\![0;\ p]\!]$ des éléments notés $e_2,\ e_3,\ \cdots,\ e_{n-1}$ qui correspondent au cas d'égalité. Plus précisément, pour tout $j \in [\![2;\ n-1]\!]$ si l'on choisit e_j, cela signifie que $k_j = 0$, c'est à dire que $s_j = s_{j-1}$.

  Grâce à ce codage, on en déduit que le choix des $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$ correspond exactement au choix de $n-1$ éléments parmi $p+1+n-2 = p+n-1$. On en déduit :
$$\operatorname{card}(\mathcal{R}_{n,\ p}) = \binom{p+n-1}{n-1}$$

On peut tester cette formule :

- Pour $n = 1$, on retrouve $\operatorname{card}(\mathcal{R}_{1,\ p}) = \binom{p}{0} = 1$.
- Pour $n = 2$, on retrouve $\operatorname{card}(\mathcal{R}_{1,\ p}) = \binom{p+1}{1} = p+1$.
- Pour $n = 3$, on retrouve $\operatorname{card}(\mathcal{R}_{1,\ p}) = \binom{p+2}{2} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$.

Planche n° 5: Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Pour tout n, préciser le domaine de définition de f_n puis déterminer sa parité.
2. Soient $a \neq b$ deux nombres.
   Pour tout n, on note $\tau_n(a;\ b)$ le taux d'accroissement de f_n entre a et b.
   (a) Rappeler la formule de $\tau_n(a;\ b)$.
   (b) Démontrer la formule suivante, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   $$(b^n - a^n) = (b-a)\left(b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^{n-2}b + a^{n-1}\right) = (b-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$
   Indication: On pourra utiliser les $\cdots$
   (c) En déduire une simplification de $\tau_n(a;\ b)$.
   (d) Finalement, déterminer :
   $$\lim_{b \overset{\neq}{\to} a} \tau_n(a;\ b) = f_n'(a)$$
3. Déterminer, en fonction de n, le tableau de variations de f_n.
4. Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p > n$. Résoudre :
   $$x^p > x^n$$

Exercice 2

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \qquad f_2 : x \mapsto \frac{\ln(x^2-4)}{\sqrt{4x^2-2x+1}} \qquad f_3 : x \mapsto \ln\left(\tan\frac{x\pi}{2}\right)$$

Exercice 3

Tracer rapidement à main levée, en justifiant, l'allure du graphe des fonctions suivantes.

$$g_1 : x \mapsto \sqrt{3x-2} - 1 \qquad g_2 : x \mapsto \frac{5}{2x+1} + 3$$

Exercice 4

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$. Décrire comment, à partir du graphe de f, on peut tracer le graphe des fonctions suivantes.

$$f_1 : x \mapsto f(a-x) \qquad f_2 : x \mapsto a - f(x)$$

Exercice 5

Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

d) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1}$

Exercice 6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies sur I.
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant).

1. Si f et g sont croissantes sur I alors fg est croissante sur I.
2. Si f et g sont croissantes et positives sur I alors fg est croissante sur I.
3. Si f et g sont majorées sur I alors $f+g$ est majorée sur I.
4. Si f et g sont majorées sur I alors fg est majorée sur I.
5. Si f et g sont bornées sur I alors fg est bornée sur I.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ est croissante. Montrer que si f s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$ alors f est la fonction nulle.

Exercice 9

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

$f_1 : x \mapsto e^{-\frac{a}{x^2}}$ $\quad$ $f_2 : x \mapsto x - a\sqrt{x}$ $\quad$ $f_3 : x \mapsto \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$

$f_4 : x \mapsto \sqrt{1+\cos^2 x}$ $\quad$ $f_5 : x \mapsto (ax+b)^x$ $\quad$ $f_6 : x \mapsto \dfrac{\cos(ax^2+bx+1)}{\sin(x)}$

$f_7 : x \mapsto \arctan(e^x)$ $\quad$ $f_8 : x \mapsto \arcsin(x^2-1)$ $\quad$ $f_9 : x \mapsto \arccos\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$

$f_{10} : x \mapsto \dfrac{\cos^3 x}{(1-\cos x)^2}$

Exercice 10

Montrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ \dfrac{x+1}{x-1}\ln x \geq 2$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x\ln x - (x-1) \leq (x-1)^2$;
4. $\forall x \in]-\infty,1],\ e^x \leq 1 + x + \dfrac{ex^2}{2}$;

Exercice 11

Tracer le graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |3x-2| - 2|x+1|$.

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln\left(\dfrac{x+3}{2}\right) = \dfrac{\ln x + \ln 3}{2}$;

b) $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$;

c) $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$.

d) $\ln|2x+1| + \ln|x+3| < \ln 3$.

Exercice 13

Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, parité, périodicité, variations et limites.)

$f_1 : x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2-3}$ $\quad f_2 : x \longmapsto \ln(x-1) + \ln(x+1)$ $\quad f_3 : x \longmapsto \ln(x^2-1)$

$f_4 : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$ $\quad f_5 : x \longmapsto \dfrac{\tan(2x)}{\tan x}$ $\quad f_6 : x \longmapsto x \arctan \dfrac{1}{x}$

$f_7 : x \longmapsto \sin(3x) + 3\sin x$

Exercice 14

Déterminer tous les couples d'entiers naturels distincts (n,p) non nuls tels que $n^p = p^n$.

Exercice 15

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que u et v sont dérivables sur I et que u est strictement positive sur I. Montrer que u^v est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
2. Étudier et tracer le graphe de l'application $f : \mathbb{R}+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ On précisera les éventuelles tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.
3. Étudier et tracer le graphe de l'application $f : \mathbb{R}+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ On précisera les éventuelles tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

Exercice 16

Montrer : $\forall x \in]0,1[,\ x^x(1-x)^{(1-x)} \geq 1/2$. (*Indication* : étudier les variations de la fonction $x \mapsto x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$.)

Exercice 17

Déterminer une période de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{5}\right) + \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

Exercice 18

Soit $(\alpha, \beta, \omega) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin(\omega x + \varphi).$$

Exercice 19

Tracer le graphe de la fonction $x \longmapsto \arcsin(\sin x)$.

Exercice 20

Simplifier les expressions suivantes : $\tan(\arcsin x)$, $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arctan x)$.

Exercice 21

Ensemble de définition et simplification de f définie par $f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

Exercice 22

1. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$. Cette égalité est-elle valable pour tout $x \in \mathbb{R}^*$?
3. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $\arctan \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{2}\arccos x$.

Exercice 23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\arcsin 2x = \arccos x$.

b) $\arcsin(x+1) - \arcsin x = \dfrac{\pi}{6}$.

c) $\arctan x + \arctan(2x) = \dfrac{\pi}{4}$.

d) $\arcsin x = \arccos \dfrac{1}{3} - \arccos \dfrac{1}{4}$.

e) $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{3}$.

f) $\arcsin x = \arctan 2 + \arctan 3$.

Exercice 24

Calculer $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$.

Exercice 25

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, simplifier $\arctan(k+1) - \arctan(k)$. (*Indication* : on pourra calculer la tangente de cette expression.)
2. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \arctan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1}\right)\right)$.

Exercice 26

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$ et $g_n(x) = \dfrac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Montrer que f_n et g_n sont des fonctions polynomiales.

Exercice 27

Une entreprise de photocopie couleur pratique des tarifs dégressifs de la manière suivante :

- les 20 premières copies sont à 15 centimes la copie ;
- les 60 copies suivantes sont à 10 centimes la copie ;
- toutes les copies suivantes sont à 5 centimes la copie.

Par exemple, 25 copies coûtent $20 \times 0,15 + 5 \times 0,10 = 3,50$ €.
On note f la fonction qui à tout nombre entier n associe le prix pour n photocopies réalisées dans cette entreprise.
Le gérant souhaite un algorithme donnant le tarif en fonction du nombre de photocopies réalisées. Proposer votre code.

Corrigé de la planche n° 5: Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1

1. Pour tout n, f_n est définie sur $\mathbb{R}$.
   Et pour tout x, on a $f_n(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = (-1)^n f_n(x)$ donc f_n est de la même parité que n.
2. (a) On a $\tau_n(a;\ b) = \frac{b^n - a^n}{b-a}$

   (b) Ici, on va faire une démonstration « plus propre » en utilisant les changements d'indice. Partons du membre de droite.

$$(b-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k}. \text{ Réalisons le changement d'indice } k' = k+1 \text{ dans la seconde so}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} - \sum_{k'=1}^{n} a^{k'} b^{n-k'} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k}}_{\text{les indices } k\in[\![1;\ n-1]\!] \text{ sont communs}}$$

$$= a^0 b^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} - \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} - a^n b^0 = b^n - a^n$$

   (c) On exploite la formule montrée précédemment :

$$\tau_n(a;\ b) = \frac{b^n - a^n}{b-a} = \frac{(b-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}}{b-a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

   (d) Pour tout $k \in [\![0;\ n-1]\!]$, $\lim\limits_{b \overset{\neq}{\to} a} a^k b^{n-1-k} = a^k a^{n-1-k} = a^{n-1}$. Chacun des n termes de la somme tend donc vers a^{n-1}. On obtient ainsi :

$$\lim_{b \overset{\neq}{\to} a} \tau_n(a;\ b) = na^{n-1} = f_n'(a)$$

   On vient donc de prouver la formule de dérivation de la fonction f_n.
3. On connaît la parité de f_n, il suffit donc d'étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$. Or, pour tout n et pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = nx^{n-1} > 0$. On en déduit que les f_n sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}^+$.

   En outre, $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$. On en déduit les tableaux de variations suivants.
   Si n est pair :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   Si n est impair :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. On procède, comme d'habitude, par équivalences. Pour tout x :

$$x^p > x^n \iff x^p - x^n > 0 \iff x^n\left(x^{p-n} - 1\right) > 0$$

Dressons maintenant un tableau de signes.
Le signe de x^n dépend de la parité de n et du signe de x. On fera donc une disjonction de cas, selon la parité de n.
Pour déterminer le signe de $x^{p-n} - 1$, il faut résoudre $x^{p-n} - 1 > 0$, c'est à dire $x^{p-n} > 1$. Ici, encore, tout dépend de la parité de $p - n$ et nous devrons donc réaliser une disjonction de cas.
Il nous faut donc distinguer au total quatre cas :

- Lorsque n et $p - n$ sont tous les deux pairs. On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^n		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$x^{p-n} - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x^n\left(x^{p-n} - 1\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

  Les solutions sont donc, dans ce cas $]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$.
- Lorsque n est pair et $p - n$ impair. On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^n		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$x^{p-n} - 1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^n\left(x^{p-n} - 1\right)$		$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	

  Les solutions sont donc, dans ce cas $]1;\ +\infty[$.
- Lorsque n est impair et $p - n$ pair. On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^n		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^{p-n} - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x^n\left(x^{p-n} - 1\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

  Les solutions sont donc, dans ce cas $]-1;\ 0[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$.
- Enfin, lorsque n est impair et $p - n$ impair. On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^n		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^{p-n}-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^n\left(x^{p-n}-1\right)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions sont donc, dans ce cas $]-\infty;\ 0[\cup]1;\ +\infty[$.

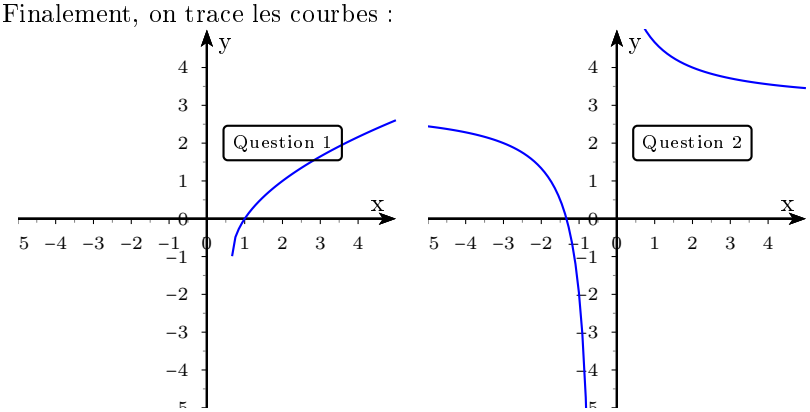
Exercice 2

1. Il faut s'assurer que l'argument de la racine est strictement positif et que l'argument du logarithme est strictement positif.
   On doit donc vérifier simultanément les deux conditions
   $$x > 0 \text{ et } \ln(x) > 0$$
   Ce qui donne pour domaine $]1;\ +\infty[$.
2. Il faut s'assurer que l'argument de la racine est strictement positif et que l'argument du logarithme est strictement positif.
   On doit donc vérifier simultanément les deux conditions
   $$4x^2 - 2x + 1 > 0 \text{ et } x^2 - 4 > 0$$
   Après étude du trinôme, la première inégalité est vraie pour tout x.
   On obtient donc pour domaine $]-\infty;\ 2[\cup]2;\ +\infty[$.
3. Il faut que l'argument de la tangente n'appartienne pas à l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ et que l'argument du logarithme soit positif.
   La résolution de $\tan\dfrac{x\pi}{2} > \frac{\pi}{2}$ donne comme solutions tous les intervalles de la forme $]2k;\ 2k+1[$ avec k entier relatif.

Exercice 3

1. On peut réécrire cette fonction $x \mapsto \sqrt{3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)}-1$.
   En utilisant la décomposition $x \mapsto \sqrt{x} \mapsto \sqrt{3x} \mapsto \sqrt{3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)}-1$, on en déduit qu'on obtient la courbe à partir de la courbe de racine en appliquant successivement les opérations suivantes :
   - contraction selon l'axe des abscisses d'un rapport de 3 ;
   - translation d'un vecteur $\begin{pmatrix}2/3\\-1\end{pmatrix}$.
2. On peut réécrire cette fonction $x \mapsto \dfrac{5}{2}\times\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}+3$.
   En utilisant la décomposition $x \mapsto \dfrac{1}{x} \mapsto \dfrac{5}{2}\times\dfrac{1}{x} \mapsto \dfrac{5}{2}\times\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}+3$, on en déduit qu'on obtient la courbe à partir de la courbe d'inverse en appliquant successivement les opérations suivantes :
   - dilatation d'un facteur de $\dfrac{5}{2}$ selon l'axe des ordonnées ;
   - translation d'un vecteur $\begin{pmatrix}-1/2\\3\end{pmatrix}$.

Finalement, on trace les courbes :



Exercice 4

1. Pour a fixé, la fonction $x \mapsto a - x$ correspond à une symétrie sur l'axe des abscisses par rapport au point d'abscisse $\dfrac{a}{2}$.

   En effet, si on nomme M le point d'abscisse x et M' le point d'abscisse $a - x$, on vérifie aisément que le milieu de $[MM']$ est toujours le point d'abscisse $\dfrac{a}{2}$ (en utilisant la formule de l'abscisse du milieu par exemple).

   Ainsi, la courbe de $x \mapsto f(a - x)$ s'obtient par une réflexion de la courbe de f par rapport à l'axe d'équation $x = \dfrac{a}{2}$.

2. On peut appliquer le même raisonnement sur les ordonnées.

   On en déduit que la courbe de $x \mapsto f(a - x)$ s'obtient par une réflexion de la courbe de f par rapport à l'axe d'équation $y = \dfrac{a}{2}$.

Exercice 5

Toutes ces limites sont a priori indéterminées. Il faut travailler sur les expressions pour lever les indéterminations. *Il ne faut pas oublier, dans un premier temps, de déterminer les domaines de validité des expressions.*

1. À l'aide d'une disjonction de cas on obtient $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{x^2 + 2|x|}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{x^2 + 2|x|}{x} = -2$ donc il n'y a pas de limite en 0.

2. Ici, le signe de x n'est plus à discuter. En effet, on peut supposer $x < 0$ puisqu'on est en $-\infty$.

   On obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 2|x|}{x} = -\infty$.

3. Le dénominateur s'écrit, pour tout x, $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ (il suffit de calculer Δ puis les racines).

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{1;\ 2\}$, $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 1)} = \dfrac{(x + 2)}{(x - 1)}$ donc $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = 4$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{(2k + 1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)} &= \frac{1 - \cos^2(x)}{1 + \cos(x)} \\
&= \frac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}{1 + \cos(x)} \\
&= 1 - \cos(x)
\end{aligned}$$

   Ainsi, on obtient $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)} = 2$

5. On utilise le conjugué. Pour tout $x \in [-1;\ +\infty[\backslash\{0\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} &= \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}\right)}{x} \times \frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \frac{1+x-(1+x^2)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \frac{x-x^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

On obtient finalement $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \dfrac{1}{2}$

6. Même technique ! Pour tout $x \geq 3$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} &= \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}\right) \times \frac{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}\right)}{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}\right)} \\
&= \frac{x+5-(x-3)}{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}\right)} \\
&= \frac{8}{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}\right)}
\end{aligned}$$

On obtient donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} = 0$.

7. C'est encore la même technique. Cette fois ci on exploite l'identité :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

On obtient ainsi, pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} &= \frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)}{x^2} \times \frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)} \\
&= \frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}
\end{aligned}$$

On obtient donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \dfrac{1}{3}$.

8. On reconnaît la formule de la somme des termes d'une suite géométrique. Pour tout $x \neq 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x^n-1} &= \frac{1}{\frac{x^n-1}{x-1}} \\
&= \frac{1}{1+x+\cdots+x^{n-1}}
\end{aligned}$$

On obtient ainsi $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1} = \dfrac{1}{n}$

Exercice 6

1. C'est faux.
   Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x$ sont croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
2. C'est vrai. Supposons f et g croissantes et positives sur I.
   Pour tous nombres $u \leq v$ de I, on a $0 \leq f(u) \leq f(v)$ et $0 \leq g(u) \leq g(v)$.
   Comme ces deux séries d'inégalités portent sur des nombres positifs, on peut les multiplier entre elles. On obtient $f(u)g(u) \leq f(v)g(v)$ et donc fg est croissante.
3. C'est vrai. Supposons f et g majorées sur I et posons M et N des majorants respectifs de f et g. On a, pour tout x de I, $f(x) \leq M$ et $g(x) \leq N$. Or, on peut ajouter membre à membre des inégalités. On en déduit $f(x) + g(x) \leq M + N$ et ainsi $f + g$ est majorée (par $M + N$ par exemple).
4. C'est faux.
   Les fonctions $x \mapsto -x^2$ et $x \mapsto -x^2$ sont majorées sur $\mathbb{R}$ (par 0 par exemple).
   Or la fonction $x \mapsto x^4$ n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$.
5. C'est vrai. Supposons que f et g sont bornées, ce qui est équivalent à dire que $|f|$ et $|g|$ sont majorées et notons M et N des majorants respectifs de $|f|$ et $|g|$.
   Pour tout x de I, $0 \leq |f|(x) \leq M$ et $0 \leq |g|(x) \leq N$. Comme ces séries d'inégalités portent sur des nombres positifs, on peut les multiplier. On obtient $0 \leq |f|(x) \times |g|(x) \leq M \times N$. Ainsi, $|fg|$ est majorée.
   Par suite, fg est bornée.

Exercice 7

Par l'absurde. On rappelle que le contraire de $A \Longrightarrow B$ est $(\neg A) \wedge B$.
On va donc supposer que $f \circ f$ est croissante, $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante mais que f n'est pas strictement décroissante.
En particulier, cela signifie qu'il existe deux nombres $u < v$ tels que $f(u) \leq f(v)$.
Comme $f \circ f$ est croissante, en composant cette inégalité par $f \circ f$, on obtient $f \circ f \circ f(u) \leq f \circ f \circ f(v)$ mais c'est absurde car $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante.

Exercice 8

On se place dans les hypothèses du problème et on suppose que f s'annule sur $\mathbb{R}_*^+$. Ainsi, il existe $a > 0$ tel que $f(a) = 0$.
Soit alors x un réel strictement positif.
Si on suppose $x \geq a$ alors on a

- $xf(x) \geq af(a) = 0$ car g est croissante ; ce qui donne $f(x) \geq 0$ (car $x > 0$) ;
- $f(x) \leq f(a) = 0$ car f est décroissante.

Donc, si $x \geq a$, on obtient $f(x) \geq 0$ et $f(x) \leq 0$ et ainsi $f(x) = 0$.
Le cas où $x < a$ se traite de manière similaire. On obtient également $f(x) = 0$.
Finalement, la fonction f est nulle.

Exercice 9

La fonction $f_1 : x \mapsto \dfrac{a}{x^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Par composition, la fonction proposée est aussi définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Sa dérivée est

$$f_1' : x \mapsto \frac{2a}{x^3} \mathrm{e}^{-\frac{a}{x^2}}$$

La fonction $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.
Par somme, la fonction étudiée est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et sa dérivée est :

$$f_2' : x \mapsto 1 - \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

Pour f_3, par définition, pour tout x d'un domaine valide, on a

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$$

On en déduit que la fonction est définie est dérivable pour $\left(1+\frac{a}{x}\right) > 0$ et pour $x \neq 0$. On résout, pour $x \neq 0$:

$$\left(1+\frac{a}{x}\right) > 0 \iff \frac{x+a}{x} > 0$$

On sait que $a > 0$. Un petit tableau de signes donne les solutions $]-\infty;\ -a[\cup]0;\ +\infty[$.
Ainsi, la fonction est définie et dérivable sur $]-\infty;\ -a[\cup]0;\ +\infty[$. On calcule sa dérivée en utilisant deux fois la formule de la dérivée d'une fonction composée. On obtient :

$$f_3' : x \mapsto \left(\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) - \frac{a}{a+x}\right) e^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$$

Pour tout x, on a $1+\cos^2(x) > 0$. On en déduit, par composition, que la fonction f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est :

$$f_4' : x \mapsto \frac{-\cos(x)\sin(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}$$

Pour f_5, on utilise la même technique que pour f_3. Le domaine de dérivabilité est $\left]\frac{-b}{a};\ +\infty\right[$. Après calcul, on obtient la dérivée :

$$f_5' : x \mapsto \left(\ln(ax+b) + \frac{a}{ax+b}\right) \mathrm{e}^{x\ln(ax+b)}$$

Le numérateur de f_6 ne pose pas de problème. La fonction est définie est dérivable dès que $\sin(x) \neq 0$, c'est à dire pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. On obtient la dérivée :

$$f_6' : x \mapsto -\frac{\cos(ax^2+b+c)\cos(x) + (2ax+b)\sin(ax^2+bx+c)\sin(x)}{\sin^2(x)}$$

Par composition f_7 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est :

$$f_7' : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$$

arcsin est définie sur $[-1;\ 1]$ et dérivable sur $]-1;\ 1[$.
Pour connaître le domaine de définition de f_8, il faut résoudre :

$$\begin{aligned} -1 \leq x^2 - 1 \leq 1 &\iff 0 \leq x^2 \text{ et } x^2 - 2 \leq 0 \\ &\iff x \in \left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right] \end{aligned}$$

La fonction est donc définie sur $\left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$ et dérivable sur $\left]-\sqrt{2};\ 0\right[\cup\left]0;\ \sqrt{2}\right[$.
Sa dérivée est :

$$f_8' : x \mapsto \frac{2x}{|x|\sqrt{x^2-2}}$$

Pour f_9, on applique la même stratégie qu'à la question précédente, on obtient une fonction définie sur $]-\infty;\ -2]\cup[0;\ +\infty[$ et dérivable sur $]-\infty;\ -2[\cup]0;\ +\infty[$.
La dérivée est :

$$f_9' : x \mapsto \frac{1}{|x+1|\sqrt{x(x+2)}}$$

La fonction f_{10} est définie et dérivable pour $\cos(x) \neq 1$, c'est à dire pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Sa dérivée est :

$$f_{10}' : x \mapsto -\frac{(\cos(x)-3)\cos^2(x)\sin(x)}{(\cos(x)-1)^3}$$

Exercice 10

Montrer les inégalités suivantes.

1. Soit la fonction $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ définie et dérivable sur $]-1;\ +\infty[$. Il s'agit de prouver que f est positive.
   Or, pour tout x du domaine :
   $$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{x}{x+1} \end{aligned}$$
   On en déduit le tableau de signes de f' puis le tableau de variations de f après avoir calculé $f(0) = 0$.

x	-1		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$x+1$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

   On en déduit que f est bien positive sur son domaine.
2. C'est la même stratégie mais en nettement plus brutal.
   On pose $g : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}\ln(x) - 2$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+ \backslash \{1\}$.
   Après calcul, on obtient
   $$g'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}\ln(x) + \frac{(x+1)}{x(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)^2}\left(-2x\ln(x) + (x+1)(x-1)\right)$$
   On connaît le signe de $x(x-1)^2$: il est positif. Le signe de $g'(x)$ est donc donné par le signe du numérateur que l'on note $\varphi(x)$ avec $\varphi : x \mapsto -2x\ln(x) + (x+1)(x-1)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.
   Un peu de calcul donne
   $$\varphi'(x) = -2\ln(x) - 2 + 2x$$
   Là encore le signe de φ' n'a rien d'évident.
   On calcule donc, pour tout x du domaine, $\varphi''(x) = \dfrac{-2}{x} + 2 = \dfrac{2(x-1)}{x}$.
   Finalement, on en déduit le tableau de signes de φ'' puis le tableau de variations de φ après avoir calculé $\varphi'(1) = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$\varphi''(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi'(x)$	$\Vert$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

En particulier, on en déduit que φ est strictement croissante. Mais comme $\varphi(1) = 0$, on peut déterminer le tableau de variations de g.

x	0		1		$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

Reste à déterminer la limite de g en 1. Or, pour tout x du domaine de g, on a

$$g(x) = (x+1) \times \frac{\ln(x)}{x-1} - 2$$

On reconnaît que $\dfrac{\ln(x)}{x-1} = \dfrac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1}$ est un taux d'accroissement. Ainsi :

$$\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} \xrightarrow[x \overset{\neq}{\to} 1]{} \ln'(1) = 1$$

Finalement, par produit et différence, on obtient $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} 1} g(x) = 0$, ce qui permet de conclure.

g est bien positive sur son domaine !

3. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} x\ln x - (x-1) \leq (x-1)^2 &\iff (x-1)^2 + (x-1) \geq x\ln(x) \\ &\iff x(x-1) \geq x\ln(x) \\ &\iff (x-1) \geq \ln(x) \text{ car } x > 0 \end{aligned}$$

Montrer l'inégalité $(x-1) \geq \ln(x)$ se fait en étudiant la fonction $x \mapsto (x-1) - \ln(x)$ de manière très similaire à ce qui a été fait en 1.

4. On étudie la fonction $h : x \mapsto 1 + x + \dfrac{\mathrm{e}x^2}{2} - \mathrm{e}^x$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x :

$$h'(x) = 1 + \mathrm{e}x - \mathrm{e}^x \qquad\qquad h''(x) = \mathrm{e} - \mathrm{e}^x$$

On en déduit que $h''(x)$ est positive pour $x \leq 1$. En particulier que h' est croissante sur $]-\infty;\ 1]$. Or, $h'(0) = 0$.

Ainsi, le signe de h' et les variations de h sur $]-\infty;\ 1]$ sont :

x	$-\infty$		0		1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

En effet, on calcule $h(0) = 0$.
Ainsi, pour tout $x \leq 1$, $h(x) \geq 0$, ce qui permet de conclure.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) Cette équation prend sens lorsque $x > -3$ et $x > 0$ simultanément, c'est à dire pour $x > 0$.
D'autre part, pour tout $x > 0$, on a la série d'équivalences :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{\ln x + \ln 3}{2} &\iff 2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) - (\ln x + \ln 3) = 0 \\
&\iff \ln\left(\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3x}\right) = 0 \\
&\iff \frac{(x+3)^2}{12x} = 1 \\
&\iff \frac{(x+3)^2 - 12x}{12x} = 0 \\
&\iff \frac{x^2 - 6x + 9}{12x} = 0 \\
&\iff \frac{(x-3)^2}{12x} = 0
\end{aligned}$$

On obtient la solution $x = 3$.

b) Cette équation prend sens pour tout x. De plus, pour tout x, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1} &\iff 3^{2x} + 3^{2x-1} = 2^{x+\frac{7}{2}} + 2^{x+\frac{1}{2}} \\
&\iff \mathrm{e}^{2x\ln(3)} + \mathrm{e}^{(2x-1)\ln(3)} = \mathrm{e}^{(x+7/2)\ln(2)} + \mathrm{e}^{(x+1/2)\ln(2)} \\
&\iff \mathrm{e}^{2x\ln(3)}\left(1 + \mathrm{e}^{-\ln(3)}\right) = \mathrm{e}^{x\ln(2)}\left(\mathrm{e}^{7/2\ln(2)} + \mathrm{e}^{1/2\ln(2)}\right) \\
&\iff \frac{\mathrm{e}^{2x\ln(3)}}{\mathrm{e}^{x\ln(2)}} = \frac{\left(\mathrm{e}^{7/2\ln(2)} + \mathrm{e}^{1/2\ln(2)}\right)}{\left(1 + \mathrm{e}^{-\ln(3)}\right)} \\
&\iff 2x\ln(3) - x\ln(2) = \ln\left(\frac{\left(\mathrm{e}^{7/2\ln(2)} + \mathrm{e}^{1/2\ln(2)}\right)}{\left(1 + \mathrm{e}^{-\ln(3)}\right)}\right) \\
&\iff x = \frac{1}{2\ln(3) - \ln(2)} \times \ln\left(\frac{\left(\mathrm{e}^{7/2\ln(2)} + \mathrm{e}^{1/2\ln(2)}\right)}{\left(1 + \mathrm{e}^{-\ln(3)}\right)}\right) \\
&\iff x = \frac{1}{2\ln(3) - \ln(2)} \times \ln\left(\frac{\left(8\sqrt{2} + \sqrt{2}\right)}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)}\right) \\
&\iff x = \frac{1}{2\ln(3) - \ln(2)} \times \ln\left(\frac{27\sqrt{2}}{4}\right)
\end{aligned}$$

c) L'expression est définie pour tout $x > 0$ et on a alors la série d'équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}} &\iff \mathrm{e}^{x\ln(\sqrt{x})} = \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln(x)} \\
&\iff e^{x\ln(x)/2} = \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln(x)} \\
&\iff x\ln(x) = 2\sqrt{x}\ln(x) \\
&\iff \ln(x)\left(x - 2\sqrt{x}\right) = 0 \\
&\iff \left(x - 2\sqrt{x}\right) = 0 \text{ ou } \ln(x) = 0 \\
&\iff x^2 = 4xoux = 1 \\
&\iff x(x-4) = 0 \text{ ou } x = 1 \\
&\iff x = 4 \text{ ou } x = 1
\end{aligned}$$

On a donc deux solutions : 4 et 1.

d) Cette inéquation est définie lorsque $|2x+1| > 0$ et $|x+3| > 0$. Ainsi, on doit avoir $x \neq \frac{-1}{2}$ et $x \neq -3$. Sous ces conditions on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\ln|2x+1| + \ln|x+3| < \ln 3 &\iff \ln\left(|2x+1| \times |x+3|\right) < \ln(3) \\
&\iff |(2x+1)(x+3)| < 3 \\
&\iff -3 < (2x+1)(x+3) < 3
\end{aligned}$$

Les solutions de l'inéquation de départ sont donc les intersections des solutions de $(2x+1)(x+3) < 3$ et des solutions de $(2x+1)(x+3) > -3$.
On obtient ainsi comme solutions :

$$\left(\left]-\frac{7}{2};\ -2\right[\cup \left]-\frac{3}{2};\ 0\right[\right) \setminus \left\{-3;\ \frac{-1}{2}\right\}$$

Exercice 12

f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right\}$. De plus, pour tout x de son domaine de définition, on a

$$f_1(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 3} = \frac{-x^3}{x^2 - 3} = -f_1(x)$$

Cette fonction est donc impaire.
De plus sa dérivée vaut, après calcul et factorisation :

$$f_1'(x) = \frac{x^2(x+3)(x-3)}{(x^2-3)^2}$$

On étudie le sens de variation de f_1 sur $\mathbb{R}^+\setminus\left\{\sqrt{3}\right\}$ puisqu'elle est impaire. Sur cet ensemble la dérivée change de signe en $x = 3$.
Reste à déterminer les limites de f_1 en $+\infty$ et à gauche et à droite de $\sqrt{3}$.
Pour tout x non nul du domaine de définition, on a

$$f_1(x) = \frac{x}{1 - \frac{3}{x^2}}$$

On en déduit

$$\lim_{+\infty} f_1 = +\infty$$

Pour la limite autour de $\sqrt{3}$, on écrit, pour tout x du domaine :

$$f_1(x) = \frac{x^3}{\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)}$$

On en déduit

$$\lim_{\sqrt{3}^+} f_1 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\sqrt{3}^-} f_1 = -\infty$$

Finalement, on peut reconstituer tout le tableau de variations de f_1 sur $\mathbb{R}^+$, l'ensemble des variations se déduisant par symétrie centrale.

x	0		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$

f_2 est définie pour $x > 1$ et $x > -1$, soit sur $]1;\ +\infty[$. Son domaine de définition n'est pas symétrique, elle n'est donc ni paire ni impaire.
Les fonctions $x \mapsto \ln(x-1)$ et $x \mapsto \ln(x+1)$ sont strictement croissantes par composition. Ainsi, f_2 est strictement croissante par somme.
D'autre part, $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x-1) = -\infty$ par composition et ainsi, $\lim\limits_{1^+} f_2 = -\infty$ par somme.
Enfin, $\lim\limits_{+\infty} f_2 = +\infty$ par somme.
f_3 est définie sur $]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[$
Elle est paire car $f_3(-x) = \ln\left((-x)^2 - 1\right) = \ln(x^2-1) = f_3(x)$.
De plus, pour tout $x > 1$, $\ln(x^2-1) = \ln\left((x-1)(x+1)\right) = \ln(x-1) + \ln(x-1) = f_2(x)$. Ainsi, on déduit de l'étude de f_2 celle de f_3 par symétrie.
f_4 est définie lorsque $x \neq 0$ et $\dfrac{\ln|x|}{x} > 0$.
Un petit tableau de signes de l'expression $\dfrac{\ln|x|}{x}$ donne

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\ln\lvert x\rvert$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{\ln\lvert x\rvert}{x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

On en déduit que le domaine de définition de f_4 est $[-1;\ 0[\cup[1;\ +\infty[$
On va étudier la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln|x|}{x}$ qui est définie sur $\mathbb{R}^*$ et impaire et on déduira de l'étude de cette fonction celle de f_4 par composition par racine.
Pour tout $x > 0$, $|x| = x$ et par suite, $g'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$.
g' est donc négative sur $[\mathrm{e};\ +\infty[$ et positive sur $]0;\ \mathrm{e}]$, ce qui nous donne les variations de g.
On calcule $g(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ par quotient.
Enfin, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ par croissance comparée.
Finalement, le tableau de variations de g est :

x	$-\infty$		$-e$		-1		0		1		e		$+\infty$
$g(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

L'étude de g nous permet d'en déduire f_4 par composition :

x	-1		0		1		e		$+\infty$
$f_4(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖		‖ 0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{e}}{e}$	$\searrow$	0

$f_5(x)$ existe dès que

- $2x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $\tan(x) \neq 0$, c'est à dire $x \notin \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

La conjonction de ces trois conditions donne le domaine de définition et de dérivabilité $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{k\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
De plus, comme le numérateur est périodique de période $\frac{\pi}{2}$ et que le dénominateur est périodique de période π, on en déduit que π est une période de f_5.
D'autre part, le domaine de définition de f_5 est symétrique par rapport à 0 et pour tout x de ce domaine

$$f_5(-x) = \frac{\tan(-2x)}{\tan(-x)} = \frac{-\tan(2x)}{-\tan(x)} = f_5(x)$$

Ainsi, f_5 est paire. Il suffit donc d'étudier cette fonction sur $\left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$.
Pour tout x de ce domaine :

$$\begin{aligned} f_5(x) &= \frac{\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}}{\tan(x)} \\ &= \frac{2}{1-\tan^2(x)} \end{aligned}$$

Cette dernière forme facilite l'étude de la fonction. Ainsi, pour tout $0 < u < v < \frac{\pi}{4}$, on a :

$$0 < \tan(u) < \tan(v) < 1 \Longrightarrow 1 - \tan^2(u) > 1 - \tan^2(v) > 0 \Longrightarrow f_5(u) < f_5(v)$$

en raison des sens de variations des fonctions carré et inverse sur $]0;\ +\infty[$.
En particulier, on en déduit que f_5 est strictement croissante sur $\left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[$.
De même, on peut prouver qu'elle est strictement croissante sur $\left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$.
Reste à calculer les limites.
On a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} \left(1 - \tan^2(x)\right) = 0^+$ et donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f_5(x) = +\infty$.
On prouve de même, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^+} f_5(x) = -\infty$.
Enfin, on sait que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ et ainsi $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f_5(x) = 0^-$.
Reste à calculer $f_5(0) = 2$ pour pouvoir dresser le tableau de variations sur une période en exploitant la parité.

x	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f_4(x)$	‖ 0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0 ‖

f_6 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
De plus, pour tout $x \neq 0$, $f_6(-x) = (-x) \times \arctan \dfrac{1}{-x} = x \arctan \dfrac{1}{x}$ car arctan est impaire. Donc f_6 est paire. On réduit donc le domaine d'étude à $\mathbb{R}^+$.
Sa dérivée vaut, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f_6'(x) &= \arctan \frac{1}{x} + x \times \frac{\frac{-1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \arctan \frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2} \end{aligned}$$

Il n'est pas évident de connaître le signe de f_6'. Pour tout $x \neq 0$, cette fonction est dérivable et on obtient, après calcul :

$$f_6''(x) = \frac{-2}{(1 + x^2)^2}$$

Ainsi, f_6' est strictement décroissante sur $]-\infty;\ 0[$ et sur $]0;\ +\infty[$.
Mais on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan \dfrac{1}{x} = 0$ par composition et on a $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{x}{x^2 + 1} = 0$ en utilisant les techniques de levée d'indétermination.
On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_6'(x) = 0$ par somme et on en déduit ainsi que f_6' est positive sur $\mathbb{R}^+$.
Ainsi, f_6 est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.
De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan \dfrac{1}{x} = 0$. Par produit on obtient donc $\lim\limits_{0^+} f_6 = 0$.
Pour la limite en $+\infty$, on fait le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$, c'est à dire $x = \dfrac{1}{u}$, pour $x > 0$.
Dire que x tend vers $+\infty$ est équivalent à dire que u tend vers 0^+. On a ainsi :

$$x \arctan \frac{1}{x} = \frac{\arctan u}{u} = \frac{\arctan u - \arctan 0}{u - 0}$$

On reconnaît là un taux d'accroissement et on en déduit :

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{\arctan u}{u} = \frac{1}{1 + 0^2} = 1$$

Ainsi,

$$\lim_{u \to 0^+} f_6(x) = 1$$

Exercice 19

$\tan(\arcsin x)$ existe pour $\arcsin x \notin \left\{\dfrac{-\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right\}$, c'est à dire pour $x \notin \{-1;\ 1\}$.
Pour tout $x \in]-1;\ 1[$, on pose $u = \arcsin x$, de sorte que $\sin(u) = x$. On cherche à déterminer la valeur de $\tan(u)$.
Remarquons que $u \in \left]\dfrac{-\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, de sorte que $\cos(u) > 0$. On peut donc écrire $\cos(u) = \sqrt{1 - \sin^2(u)} = \sqrt{1 - x^2}$.
Finalement, on a donc $\tan(\arcsin x) = \dfrac{\sin(u)}{\cos(u)} = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$\sin(\arccos x)$ existe pour $x \in [-1;\ 1]$.
Pour tout $x \in [-1;\ 1]$, on pose $u = \arccos x$, ce qui donne $x = \cos u$. On cherche à déterminer $\sin(u)$.
Remarquons que $u \in [0;\ \pi]$, de sorte que $\sin(u) \geq 0$. On peut donc écrire $\sin(u) = \sqrt{1-\cos(u)^2}$.
Finalement $\sin(\arccos x) = \sin(u) = \sqrt{1-\cos(u)^2} = \sqrt{1-x^2}$.

Avec la même méthode, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 20

L'expression $f(x)$ existe pour :

- $1 - x^2 \geq 0$, c'est à dire $x \in [-1;\ 1]$;
- $2x\sqrt{1-x^2} \in [-1;\ 1]$.

Pour $x \in [-1;\ 1]$, résolvons l'inéquation :

$$\begin{aligned}
2x\sqrt{1-x^2} \in [-1;\ 1] &\iff \left|2x\sqrt{1-x^2}\right| \leq 1 \\
&\iff 4x^2(1-x^2) \leq 1 \text{ car carré est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+ \\
&\iff -4x^4 + 4x^2 - 1 \leq 0 \\
&\iff -(2x^2-1)^2 \leq 0 \text{ ce qui est toujours vrai !}
\end{aligned}$$

Finalement le domaine de f est $[-1;\ 1]$.
L'allure de f nous pousse à poser pour tout $x \in [-1;\ 1]$, $\theta = \arcsin x$, c'est à dire $x =\in \theta$. On a ainsi :

$$f(x) = \arcsin\left(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$

Or $\theta \in \left]\dfrac{-\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right[\Bigg[$, ce qui donne $\cos\theta \geq 0$. Ainsi :

$$f(x) = \arcsin\left(2\sin\theta\cos\theta\right) = \arcsin\left(\sin(2\theta)\right)$$

Il faut maintenant faire une disjonction de cas :

- Pour $2\theta \in \left[\dfrac{-\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right] \iff \theta \in \left[\dfrac{-\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{4}\right]$, on a $\arcsin\left(\sin(2\theta)\right) = 2\theta$.
  Ainsi, pour $x \in \left[\dfrac{-\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, on a
  $$f(x) = 2\arcsin x$$
- Pour $2\theta \in \left]\dfrac{-\pi}{2};\ \pi\right] \iff \theta \in \left]\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\arcsin\left(\sin(2\theta)\right) = 2\theta - \pi$.
  Ainsi, pour $x \in \left]\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right]$, on a
  $$f(x) = \pi - 2\arcsin x$$
- Par un raisonnement semblable, pour $x \in \left[-1;\ \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right[$, on a
  $$f(x) = -\pi - 2\arcsin x$$

Exercice 21

1. On va utiliser le fait que $\cos(a) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)$.
   L'égalité que l'on doit démontrer est équivalente à $\arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$.
   Or, on sait que $0 \leq \arccos x \leq \pi$, ce qui donne $-\pi \leq -\arccos x \leq 0$ et donc $\dfrac{-\pi}{2} \leq \dfrac{\pi}{2} - \arccos x \leq \dfrac{\pi}{2}$.
   On peut donc appliquer sinus à cette égalité pour obtenir une égalité équivalente :
   $\arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x \iff \sin\arcsin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \arccos x\right) \iff x = \cos\arccos x$, ce qui est vrai.

2. Même stratégie. On va utiliser le fait que $\dfrac{1}{\tan(a)} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)$.

   L'égalité que l'on doit démontrer est équivalente à $\arctan x = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{1}{x}$.

   Or, pour tout $x > 0$, $0 < \arctan\dfrac{1}{x} < \dfrac{\pi}{2}$, ce qui donne $-\dfrac{\pi}{2} < -\arctan\dfrac{1}{x} < 0$ et donc $0 < \dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{1}{x} < \dfrac{\pi}{2}$.
   On peut donc appliquer tangente à cette égalité et obtenir une égalité équivalente :
   $\arctan x = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{1}{x} \iff \tan\arctan x = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{1}{x}\right) \iff x = \dfrac{1}{\tan\arctan\dfrac{1}{x}} \iff x = \dfrac{1}{\frac{1}{x}}$
   ce qui est vrai.

3. Une petite étude de signe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ nous montre qu'elle est positive sur $]-1;\ 1[$ donc l'égalité est bien valide.

   De plus, pour tout $x \in]-1;\ 1[$, on a $\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \in \left]0;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$. Sur cet intervalle cosinus est injectif.
   On a donc la série d'équivalences :

$$\begin{aligned}
\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}\arccos x &\iff 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \arccos x \\
&\iff \cos\left(2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = x \\
&\iff 2\cos^2\left(\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) - 1 = x
\end{aligned}$$

   Or, on sait que $\cos^2(a) = \dfrac{1}{1+\tan^2(a)}$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}\arccos x &\iff 2 \times \frac{1}{1+\tan^2\left(\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)} - 1 = x \\
&\iff 2 \times \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} - 1 = x \\
&\iff 2 \times \frac{1}{\frac{2}{1+x}} - 1 = x \\
&\iff 1 + x - 1 = x
\end{aligned}$$

   Ce qui est vrai !

> On a l'équivalence $\sin(u) = \sin(v) \iff u = v$ uniquement si u et v appartiennent à un intervalle sur lequel la fonction sinus est injective.
> Par exemple sur $[0;\ \pi[$, on n'a pas l'équivalence $\sin(u) = \sin(v) \iff u = v$ mais on l'a sur $\left[\dfrac{-\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.
> Le même genre de précautions s'imposent avec cosinus et tangente.

Exercice 22

a) Il faut $x \in [-1;\ 1]$ et $2x \in [-1;\ 1]$ en raison des domaines de définition de arcsin et arccos.
   Ainsi, il faut $x \in \left[\frac{-1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$.
   En raison des domaines images de ces deux fonctions, on en déduit aussi que $\arcsin(2x)$ et $\arccos(x)$ sont dans $\left[\frac{-\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right] \cap [0;\ \pi]$, c'est à dire $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

En particulier, x est forcément positif, c'est à dire dans $\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$.
Sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, sin est injective, on a donc les équivalences :

$$\arcsin(2x) = \arccos(x) \iff 2x = \sin\left(\arccos(x)\right)$$

Posons $u = \arccos(x)$. On sait que $u \in [0;\ \pi]$ et que $\cos(u) = x$. Or on cherche $\sin(u)$. Mais on sait que $\sin^2(u) = 1 - \cos^2(u)$, ce qui donne $\sin(u) = \sqrt{1-x^2}$ car $u \in [0;\ \pi]$ (et donc $\sin(u) \geq 0$).
Finalement, on a

$$\arcsin(2x) = \arccos(x) \iff 2x = \sqrt{1-x^2}$$

Cette dernière équation a comme solution $\frac{\sqrt{5}}{5}$ qui est bien dans le domaine de validité.

b) Cette expression est définie pour $x+1 \in [-1;\ 1]$, c'est à dire $x \in [-2;\ 0]$, et $x \in [-1;\ 1]$. On raisonne donc pour tout $x \in [-1;\ 0]$.
Dans ce cas, $\arcsin(x+1) \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$.
On va maintenant réécrire cette équation de deux manières. D'une part,

$$\arcsin(x+1) - \arcsin x = \frac{\pi}{6} \iff \arcsin(x+1) = \frac{\pi}{6} + \arcsin x$$

Sachant que $\arcsin(x+1) \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et que $\arcsin(x) \in \left[\frac{-\pi}{2};\ 0\right]$, on en déduit que nécessairement, $\arcsin x \in \left[\frac{-\pi}{6};\ 0\right]$, c'est à dire $x \in \left[\frac{-1}{2};\ 0\right]$
D'autre part, on a aussi :

$$\arcsin(x+1) - \arcsin x = \frac{\pi}{6} \iff \arcsin(x+1) - \frac{\pi}{6} = \arcsin x$$

Toujours en raison des domaines d'appartenance de ces nombres, on a ainsi nécessairement, $\arcsin(x+1) \in \left[0;\ \frac{\pi}{6}\right]$, c'est à dire $x+1 \in \left[\frac{-1}{2};\ 0\right]$, soit $x \in \left[-1;\ \frac{-1}{2}\right]$.
Une solution appartient donc nécessairement à $\left[\frac{-1}{2};\ 0\right] \cap \left[-1;\ \frac{-1}{2}\right] = \left\{\frac{-1}{2}\right\}$. Mais il est clair que $x = \frac{-1}{2}$ n'est pas solution.
Cette équation n'a donc pas de solutions !

c) Cette expression est a priori définie sur $\mathbb{R}$.
x ne peut pas être négatif car dans ce cas, on aurait $\arctan(x) < 0$ et $\arctan(2x) < 0$ et donc $\arctan(x) + \arctan(2x) < 0$.
De même, x ne peut pas être supérieur à 1 car dans ce cas, on aurait $\arctan(x) > \dfrac{\pi}{4}$ et $\arctan(2x) > \dfrac{\pi}{4}$ et donc $\arctan(x) + \arctan(2x) > \dfrac{\pi}{2}$.
On doit donc supposer que $x \in [0;\ 1[$. Dans ce cas, les deux membres de l'égalité appartiennent à $\left]\frac{-\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ et on peut raisonner par équivalences en appliquant tangente :

$$\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4} \iff \tan\left(\arctan(x) + \arctan(2x)\right) = \tan\frac{\pi}{4}$$

Cette dernière égalité donne :

$$\begin{aligned}\tan\left(\arctan(x) + \arctan(2x)\right) = \tan\frac{\pi}{4} &\iff \frac{x+2x}{1-2x^2} = 1\\ &\iff \frac{2x^2+3x-1}{1-2x^2} = 0\end{aligned}$$

On obtient la seule solution valide $\dfrac{\sqrt{17}-4}{4}$.

d) On raisonne pour tout $x \in [-1;\ 1]$:

$$\begin{aligned}
\arcsin x = \arccos\frac{1}{3} - \arccos\frac{1}{4} &\iff x = \sin\left(\arccos\frac{1}{3} - \arccos\frac{1}{4}\right)\\
&\iff x = \sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arccos\frac{1}{4}\right) - \cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right)\\
&\iff x = \frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{1}{16}}\\
&\iff x = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{15}}{12}
\end{aligned}$$

e) On pose pour tout x, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. En étudiant cette fonction, on montre qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ et que ses valeurs sont dans l'intervalle $[-1;\ 1]$.
En particulier, on en déduit que $\arcsin(f(x))$ existe pour tout x.
Et comme à la fois $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ et $\dfrac{\pi}{3}$ sont dans $\left[\frac{-\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, on peut raisonner par équivalences :

$$\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{3} \iff \frac{2x}{1+x^2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff x^2\sqrt{3} - 4x + \sqrt{3} = 0$$

En résolvant cette dernière équation, on obtient les solutions $\sqrt{3}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

f) Notons que $(\arctan 2;\ \arctan 3) \in \left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[^2$ en raison du sens de variation de arctan.

En particulier, $\arctan 2 + \arctan 3 \in \left]\frac{\pi}{2};\ \pi\right[$. Ainsi, cette équation n'a pas de solutions !

Exercice 23

Pour tout $(a;\ b)$ tels que $a \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$, $b \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $a+b \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

Posons $a = \arctan(2)$ et $b = \arctan(5)$. On a donc :

$$\tan(a+b) = \frac{2+5}{1-10} = \frac{-7}{9}$$

$\arctan 2$ et $\arctan 7$ sont des nombres de $\left]\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.
On en déduit que $a+b \in \left]\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right[$ et donc :

$$a+b = -\arctan\frac{7}{9} + \pi$$

Posons enfin $c = \arctan(8)$. Là encore, $c \in \left]\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que $a+b+c \in \left]\dfrac{3\pi}{4};\ \dfrac{3\pi}{2}\right[$.
De plus, on a :

$$\tan(a+b+c) = \frac{\tan(a+b)+\tan(c)}{1-\tan(a+b)\tan(c)} = \frac{\frac{-7}{9}+8}{1+\frac{7}{9}\times 8} = 1$$

On en déduit que $a+b+c = \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4}$

Planche n° 6: Barycentres

Exercice 1

Soient $(A;\ 3)$ et $(B;\ 2)$ un système de deux points distincts pondérés dont G est le barycentre. Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

a) L'abscisse de G dans le repère de droite $\left(A;\ \overrightarrow{AB}\right)$ est $\frac{2}{5}$.

b) $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$.

c) $2\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AG}$.

d) G est barycentre de $(A;\ 6)$ et $(B;\ 4)$.

e) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

Exercice 2

Les points A et B sont donnés. Quels sont, parmi les points C, D et E définis ci-après, ceux qui appartiennent au segment $[AB]$?

- C est barycentre de $(A;\ -1)$ et $(B;\ -4)$.
- $2\overrightarrow{DA} + 5\overrightarrow{BD} = \vec{0}$.
- B est barycentre de $(A;\ 1)$ et $(E;\ -3)$.

Exercice 3

Le triangle OAB est isocèle en O.

Étudier la nature du triangle OCD sachant que O est barycentre de $(A;\ 2)$ et $(C;\ 1)$ et que D est barycentre de $(O;\ 1)$ et $(B;\ -2)$.

Exercice 4

On suppose que A et B sont deux points tels que $AB = 3$.

On considère l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 3$.

Montrer que (Γ) est un cercle de centre G le barycentre de $(A;\ 1)$ et $(B;\ 2)$.
On précisera le rayon de ce cercle.

Exercice 5

On munit le plan d'un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soient les points $A\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les coordonnées de G barycentre de $(A;\ 2)$ et $(B;\ 3)$.
2. Montrer que $C\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ est aligné avec A et B puis trouver des poids α et β tels que C soit le barycentre de $(A;\ \alpha)$ et $(B;\ \beta)$.

Exercice 6

Tracer un quadrilatère $ABCD$ tel que le barycentre G de $(A;\ 2)$ et $(B;\ 3)$ soit aussi le barycentre de $(C;\ 1)$ et $(D;\ 4)$.

1. Calculer pour tout point du plan $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD}$.
2. En déduire que D est le barycentre de $(A;\ 2)$, $(B;\ 3)$ et $(C;\ -1)$.
3. Montrer que A est le barycentre de B, C et D avec des coefficients que l'on calculera.

Exercice 7

On considère un triangle ABC et l'on désigne par G le barycentre de $(A;\ 1)$, $(B;\ 4)$ et $(C;\ -3)$.

1. Construire le barycentre I de $(B;\ 4)$ et $(C;\ -3)$.
2. Montrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \vec{0}$ et en déduire la position de G sur (AI).

Exercice 8

Soit ABC un triangle. I et J désignent les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. *La dernière n'a rien à voir avec le triangle ABC.*

a) Le barycentre de $(A;\ 2)$, $(B;\ 1)$ et $(C;\ 1)$ est le milieu de $[IJ]$.

b) Le point C est barycentre de $(B;\ 1)$, $(I;\ -2)$ et $(J;\ 2)$.

c) Si G est le barycentre de $(A;\ 3)$, $(B;\ 1)$ et $(C;\ -1)$, alors la droite (AG) coupe la droite (BC) en dehors du segment $[BC]$.

d) Le barycentre de $(I;\ 1)$, $(J;\ 1)$ et $(A;\ -1)$ est l'isobarycentre de B et C.

e) L'isobarycentre d'un trapèze est le point d'intersection de ses diagonales.

Exercice 9

Soient trois points fixés A, B et C.
M désigne un point quelconque du plan.

1. Montrer que $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est indépendant de M.
2. Montrer que l'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$ forment un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 10

Construction de barycentre de deux points à la règle et au compas.

Soient $A \neq B$ deux points.

On va construire G le barycentre de $(A;\ 3)$ et $(B;\ 2)$.

1. Première méthode.
   Soit P un point non aligné avec A et B.
   (a) Construire à la règle et au compas les points A_1, B_1 et S tels que :
   $$\overrightarrow{PA_1} = 3\overrightarrow{PA} \qquad \overrightarrow{PB_1} = 2\overrightarrow{PB} \qquad \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1}$$
   (b) Montrer qu'alors (PS) et (AB) sont sécantes en G.
2. Seconde méthode.
   Soit $\vec{u}$ un vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
   (a) Construire à la règle et au compas des points A' et B' tels que :
   $$\overrightarrow{AA'} = 2\vec{u} \qquad \overrightarrow{BB'} = -3\vec{u}$$
   (b) Montrer que $(A'B')$ et (AB) sont sécantes en G.

Exercice 11

Soient $(A;\ \alpha)$, $(B;\ \beta)$ et $(C;\ \gamma)$ un système de trois points pondérés et non alignés dont le barycentre est G.

Les deux questions sont indépendantes.

1. On suppose que $\alpha = \beta$.
   Montrer que G est barycentre de C et I, avec I le milieu de $[AB]$. On précisera les pondérations de I et C.
2. On suppose que $\alpha + \beta = 0$.
   Montrer que G appartient à la parallèle à (AB) passant par C.

Exercice 12

Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$.
On suppose que (AD) et (CB) sont sécantes en un point O et on pose $a = AB$, $b = CD$.
Enfin, on appelle O' le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.
Commencer par faire une figure avant de répondre aux questions.

1. Montrer que O est le barycentre de $(A;\ b)$ et $(D, -a)$ mais aussi le barycentre de $(B;\ b)$ et $(C;\ -a)$.
2. Montrer que O' est le barycentre de $(A;\ b)$ et $(C;\ a)$ mais aussi le barycentre de $(B;\ b)$ et $(D;\ a)$.

Exercice 13

Soient A, B et C trois points.

Lorsque c'est possible, écrire A comme barycentre de B et C.

a) Dans le cas où les trois points vérifient :

$$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

b) Dans le cas où les trois points vérifient :

$$\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{AC}$$

c) Dans le cas où les trois points vérifient :

$$2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

d) Dans le cas où les trois points vérifient :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA}$$

Exercice 14

Étant donné un triangle ABC, construire les points I, J et K définis par :

- I est barycentre de $(A;\ 2)$ et $(C;\ 1)$;
- J est barycentre de $(A;\ 1)$ et $(B;\ 2)$;
- K est barycentre de $(C;\ 1)$ et $(B;\ -4)$;

1. Démontrer que B est barycentre de $(K;\ 3)$ et $(C;\ 1)$.
2. Quel est le barycentre de $(A;\ 2)$, $(K;\ 3)$ et $(C;\ 1)$?
3. En déduire que I, J et K sont alignés et que J est le milieu de $[IK]$.
4. L étant le milieu de $[CI]$ et M celui de $[KC]$, démontrer que $IJML$ est un parallélogramme dont le centre G est l'isobarycentre de A, B et C.

Exercice 15

Cet exercice permet de prouver une propriété fondamentale du barycentre mais qui ne figure pas au programme.

Soient $(A_i;\ \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(B_i;\ \beta_i)_{1\leq i\leq p}$ deux systèmes de points pondérés. On note G et H les barycentres respectifs de ces deux systèmes.

On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \sum_{i=1}^{p}\beta_i \neq 0$.

Montrer que le barycentre du système de $n+p$ points pondérés $(A_1;\ \alpha_1)$, $(A_2;\ \alpha_2)$, $\cdots$, $(A_n;\ \alpha_n)$, $(B_1;\ \beta_1)$, $(B_2;\ \beta_2)$, $\cdots$, $(B_p;\ \beta_p)$ est le barycentre de $(F;\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i)$ et $\left(G;\ \sum_{i=1}^{p}\beta_i\right)$

Corrigé de la planche n° 6: Barycentres

Exercice 1

On fait un dessin sur le cahier pour visualiser les choses.

a) Par définition, on a :

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} = \vec{0} &\iff 3\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AG} = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

L'assertion est donc vraie.

b) D'après ce qui précède, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, ce qui donne :

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} - \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$$

L'assertion est donc vraie.

c) En raison de l'égalité obtenue à la question a), c'est encore vrai.

d) En raison de l'homogénéité du barycentre, c'est vrai.

e) En exploitant ce qui précède :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \frac{-2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$$

C'est encore vrai.

Exercice 3

Ici, il faut encore faire un dessin sur le cahier sinon c'est incompréhensible.

Par hypothèse, on a d'une part $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{DO} - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$.
La première égalité donne $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{AO}$.
Travaillons sur la seconde égalité :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DO} - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0} &\iff \overrightarrow{DO} - 2\overrightarrow{DO} - 2\overrightarrow{OB} = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

On obtient donc, en distance, $OC = 2AO$ et $OD = 2BO$. Or $AO = BO$, par hypothèse.
Finalement, $OC = OD$, ce qui prouve que le triangle OCD est isocèle en O.

Exercice 4

Pour tout point M, on a $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$ avec G le barycentre de $(A;\ 1)$ et $(B;\ 2)$.

Ainsi, on a $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 3 \iff 3MG = 3 \iff MG = 1$.

L'ensemble des points qui vérifient cette égalité forment donc un cercle de centre G et de rayon 1.

Exercice 5

1. On obtient $G\begin{pmatrix}(2\times 4+3\times(-1))/(2+3)\\(2\times 3+3\times(-2))/(2+3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.
2. On calcule $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}$, ce qui donne $\overrightarrow{CB}=6\overrightarrow{CA}$ et prouve que les trois points sont bien alignés.

   De cette égalité, on déduit aussi $\overrightarrow{CB}-6\overrightarrow{CA}=\vec{0}$. C est donc le barycentre de $(A;\ -6)$ et $(B;\ 1)$.

Exercice 7

1. I vérifie $4\overrightarrow{IB}-3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, ce qui donne, après calcul
$$\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{CB}$$
   Cette égalité permet de placer le point I.
2. On sait que $\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
   Or, par définition de I, $4\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=(4-3)\overrightarrow{GI}$.
   On obtient donc bien :
$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GI}=\vec{0}$$
   Ainsi, G est le milieu de $[AI]$.

Exercice 8

Bien sûr, avant de se lancer, il faut faire un dessin sur le cahier.

a) Notons H ce barycentre. On a :
$$\begin{aligned}2\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0} &\iff \overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HC}\\ &\iff 2\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{HJ}=\vec{0}\\ &\iff \overrightarrow{HI}+\overrightarrow{HJ}=\vec{0}\end{aligned}$$
   Donc l'assertion est vraie.

b) On a $-2\overrightarrow{CI}+2\overrightarrow{CJ}=2\left(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IC}\right)=2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{BC}$, en raison du théorème de Thalès.

   Ainsi, $-2\overrightarrow{CI}+2\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$, ce qui permet de conclure : l'assertion est vraie.

c) On va utiliser un système de coordonnées.

   On se place dans le repère $\left(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right)$.

   Dans ce repère les coordonnées de G sont $G\begin{pmatrix}1/3\\-1/3\end{pmatrix}$.

   En particulier la droite (AG) a pour équation $y=-x$ et la droite (BC) a pour équation $y=1-x$. Ces deux droites sont parallèles. L'assertion est donc fausse.

   Une autre manière de voir les choses est de partir de l'égalité vérifiée par G :
$$\begin{aligned}3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0} &\iff 3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}\\ &\iff 3\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$
   Ce qui prouve de la même manière que les droites (AG) et (BC) sont parallèles.

d) Notons K ce barycentre. K vérifie :

$$\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ} - \overrightarrow{KA} = \vec{0}$$

Or on sait que $2\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB}$ et $2\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC}$. On en déduit :

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC}\right) - \overrightarrow{KA} = \vec{0} \iff \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}\right) = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

L'assertion est donc vraie.

e) C'est faux. Prenons un exemple dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soient ainsi les points :

$$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \qquad D\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

L'isobarycentre G a pour coordonnées $G\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

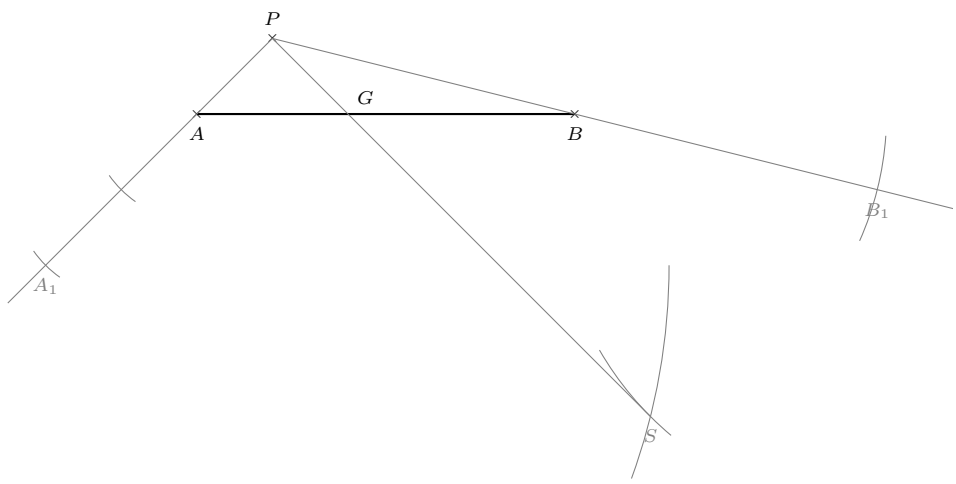
Les diagonales ont pour équations $(AC) : y = \frac{2}{3}x$ et $(BD) : y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$.

Après calcul, leur intersection a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\4/3\end{pmatrix}$, ce qui ne correspond pas à G.

Exercice 10

1. Première méthode.

(a)



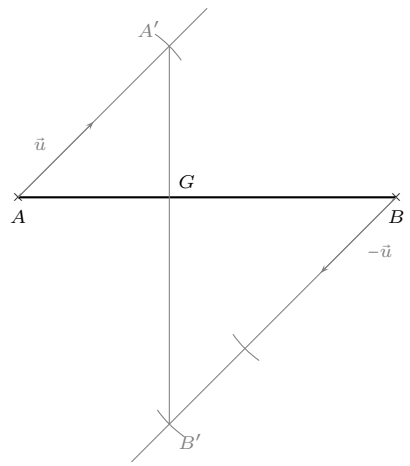
(b) On sait que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1}\\ &= 3\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB}\\ &= 3\overrightarrow{PG} + 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{GB}\\ &= 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 5\overrightarrow{PG} \text{ or } 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}. \text{ Donc :}\\ \overrightarrow{PS} &= 5\overrightarrow{PG}\end{aligned}$$

Ainsi, les points P, G et S sont alignés. Comme de plus, on sait que A, B et G sont alignés, on en déduit qu'effectivement (PS) et (AB) s'intersectent en G.

2. Seconde méthode.

   (a)



   (b) On va montrer que G est barycentre de $(A';\ 3)$ et $(B';\ 2)$. Pour ce faire, on calcule :

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{GA'} + 2\overrightarrow{GB'} &= 3\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'}\right) + 2\left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'}\right) \\ &= \underbrace{3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB}}_{=\vec{0}} + 6\vec{u} - 6\vec{u} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

   Cela prouve notre conjecture.
   Ainsi A', G et B' sont alignés, de même que A, G et B ; qui permet de conclure : G est bien l'intersection de (AB) et $(A'B')$.

Exercice 11

1. G vérifie, dans ce cas :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \iff 2\alpha\overrightarrow{GI} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ car } I \text{ le milieu de } [AB]$$

   Ainsi G est le barycentre de $(I;\ 2\alpha)$ et $(C;\ \gamma)$.

2. G vérifie dans ce cas :

$$\begin{aligned} \alpha\overrightarrow{GA} - \alpha\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} &\iff \alpha\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BG}\right) + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ &\iff \alpha\overrightarrow{BA} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ or } \gamma \neq 0 \text{ car } \alpha + \beta + \gamma = \gamma \neq 0 \end{aligned}$$

   Cela prouve que les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{GC}$ forment une famille liée. Ainsi, $\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires.

Planche n° 7: Sommes, produits et récurrence

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. α est un réel. Calculer les sommes suivantes en utilisant la formule du binôme de Newton $(a+b)^n$ pour des nombres a et b bien choisis.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$;

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$;

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha^k \binom{n}{k}$.

Exercice 2

En utilisant l'un des résultats de l'exercice précédent, retrouver le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Exercice 3

Pour tout $n \geq 2$, on pose $f_n : x \mapsto (1+x)^n$.

a) Donner la forme développée de f_n.

b) En dérivant ce résultat, déterminer :

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

c) En poursuivant ce procédé, déterminer :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}$$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$;

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$;

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$;

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 5

1. Soit $(p,q,m) \in \mathbb{N}^3$ tel que $q \leq p \leq m$. En développant de deux façons différentes $(1+x)^m$, montrer la formule :
$$\binom{m}{p} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \binom{m-q}{p-k}.$$
2. En donner une interprétation combinatoire. (On pourra s'inspirer de l'interprétation combinatoire de la formule de Pascal.)
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

Soient n et p des entiers naturels.

a) Montrer $\sum_{0\le k\le n}\binom{p+k}{k}=\binom{p+n+1}{n}$

b) On suppose $n\ge p$. Montrer $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$

Exercice 7

En calculant $(1+i)^{4n}$, déterminer les valeurs de

$$\sum_{p=0}^{2n}(-1)^p\binom{4n}{2p} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^p\binom{4n}{2p+1}$$

Exercice 8

Calculer les sommes et produits suivants :

$$A=\sum_{i=1}^{4} i;\quad B=\sum_{i=0}^{6} 1;\quad C=\sum_{i=-3}^{3} 4;\quad D=\sum_{r=0}^{4}(r^2-r+1);\quad E=\prod_{k=0}^{4} k;$$

$$F=\prod_{k=1}^{4} k;\quad G=\prod_{j=1}^{3} 2;\quad H=\prod_{t=-10}^{10} t^3;\quad I=\prod_{p=-1}^{1}\cos\frac{p\pi}{4};\quad J=\prod_{k=1}^{10} i.$$

Exercice 9

Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=2}^{n+1} k$; b) $\sum_{k=1}^{n} 2k$; c) $\sum_{k=n+1}^{2n} 2k$. d) $\sum_{k=0}^{n} e^{-k}$; e) $\sum_{k=n+1}^{2n} e^{-k}$.

Exercice 10

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\sum_{k=0}^{n} a_k=n(n+2)$.

1. Calculer les sommes suivantes.

$$S_1=\sum_{k=0}^{6} a_k;\ S_2=\sum_{k=0}^{n+1} a_k;\ S_3=\sum_{k=0}^{2n} a_k;\ S_4=\sum_{k=0}^{n} 2a_k;\ S_5=\sum_{k=0}^{n}(a_k-1);\ S_6=\sum_{k=n+1}^{2n} a_k.$$

2. Déterminer a_n en fonction de n.

Exercice 11

Soit $n\in\mathbb{N}$. On note S_n la somme des nombres impairs compris entre 0 et $2n+1$.

(a) Exprimer S_n à l'aide d'un symbole $\sum$.

(b) Montrer que $S_n=(n+1)^2$.

Exercice 12

Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n} k^2$.

1. Calculer de deux façons différentes $\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)$.
2. En déduire la valeur de S_n.
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$.

Exercice 13

Calculer $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ puis $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-1)}\right)$.

Exercice 14

($\star$)

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2}$.

(b) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \geq \frac{m}{2}$.

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Calculer $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ et $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$. Que se passe-t-il si on commence le produit à 1 au lieu de 2 ?

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire à l'aide de factorielles les expressions suivantes.

a) $\prod_{i=1}^{n} (2i)$;

b) $\prod_{i=1}^{n} i^2$;

c) $\prod_{i=3}^{n} i^2$;

d) $\prod_{i=n+1}^{2n} i^2$;

e) $\prod_{i=1}^{n} (2i+1)$.

Exercice 17

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\prod_{k=0}^{n} e^{-k}$;

b) $\prod_{k=0}^{n} e^{(\sqrt{2}-k)}$;

c) $\prod_{k=0}^{n} 2^k$;

d) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$;

e) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k}$.

Exercice 18

Soit $(a;\ r) \in \mathbb{R}^2$. Montrer par récurrence que la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n + r \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + nr$.

Exercice 19

Soit $(a;\ q) \in \mathbb{R}^2$. Montrer par récurrence que la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = qu_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = aq^n$.

Exercice 20

Soit $a \geq 0$ un nombre. Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Exercice 21

Soit la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite.
2. Montrer que la suite vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n+1)$.

Exercice 22

Montrer par récurrence la formule du binôme de Newton :

$$\forall (a;\ b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exercice 23

Montrer par récurrence la formule des nombres triangulaires :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 24

Montrer par récurrence la formule des nombres pyramidaux :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Corrigé de la planche n° 7: Sommes, produits et récurrence

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. α est un réel. Calculer les sommes suivantes en utilisant la formule du binôme de Newton $(a+b)^n$ pour des nombres a et b bien choisis.

a) 2^n

b) 0

c) 3^n

d) $(1+\alpha)^n$

Exercice 2

Soit un ensemble E de cardinal n. Parmi les sous-ensembles de E, il y a ceux :

- de cardinal 0, au nombre de $\binom{n}{0}$;
- de cardinal 1, au nombre de $\binom{n}{1}$;
- de cardinal 2, au nombre de $\binom{n}{2}$;
- ...
- de cardinal n, au nombre de $\binom{n}{n}$;

On en déduit :

$$\#\mathcal{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Exercice 3

a) Pour tout x, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ (c'est le binôme de Newton).

b) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x :

$$f_n'(x) = n(1+x)^{n-1} \qquad \text{et aussi} \qquad f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

En prenant $x = 1$, on obtient $n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

c) Pour tout x, on a aussi :

$$f_n''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \qquad \text{et aussi} \qquad f_n''(x) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}$$

En prenant $x = 1$, on trouve $n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.

Exercice 4

a) **Méthode n° 1 :**

Le premier terme étant nul, on a $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

Pour tout $k \in [\![1;\ n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= \frac{kn!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \end{aligned}$$

Or, $(n-k)! = (n-1-(k-1))!$ et $n! = n \times (n-1)!$. On a ainsi :

$$k\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Finalement, on peut réécrire la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\end{aligned}$$

On procède maintenant à un changement d'indice. On pose $k' = k-1$, c'est à dire $k = k'+1$. De plus, $k \in [\![1;\ n]\!] \iff k'[\![0;\ n-1]\!]$. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k'=0}^{n-1}\binom{n-1}{k'} = n2^{n-1}$$

Méthode n° 2 :

Soit la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$. Pour tout x, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

Et en particulier, par dérivation de la somme :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$$

Mais on a aussi :

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$$

Pour $x = 1$, on obtient donc l'égalité :

$$f'(1) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

b) On reprend la fonction f. f est dérivable deux fois. On a ainsi, pour tout x :

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

Pour $x = 1$, on obtient l'égalité :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

Travaillons sur le premier membre :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} &= \sum_{k=2}^{n}(k^2-k)\binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} k^2\binom{n}{k} - \sum_{k=2}^{n} k\binom{n}{k}\end{aligned}$$

Pour rappel, on cherche la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$. Or :

$$\sum_{k=2}^{n} k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} - 1^2 \binom{n}{1} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} - n$$

D'autre part, on a déjà calculé $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$. On en déduit :

$$\sum_{k=2}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} - 1 \binom{n}{1} = n2^{n-1} - n$$

À partir de ces deux calculs et en reprenant l'égalité de départ, on obtient par équivalences :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} &\iff \sum_{k=2}^{n} k^2 \binom{n}{k} - \sum_{k=2}^{n} k \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} \\
&\iff \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} - n - \left(n2^{n-1} - n\right) = n(n-1)2^{n-2} \\
&\iff \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n2^{n-2}\,(n-1+2) = n(n+1)2^{n-2}
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(3n-1)2^{n-2}$$

Pour rappel, on peut toujours tester la formule pour éviter les erreurs de calcul grossières. Par exemple pour $n = 3$:

$$1^2 \binom{3}{1} + 2^2 \binom{3}{2} + 3^2 \binom{3}{3} = 3 + 4 \times 3 + 9 = 24 = 3 \times 2 \times 2^{3-2}$$

Ce test valide la formule au rang 3.

c) Ici, on peut appliquer une technique similaire à la méthode n° 1 du a. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

On fait le changement d'indice $k' = k+1$. Ainsi, $k \in [\![0;\ n]\!] \iff k' \in [\![1;\ n+1]\!]$ et donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n+1}{k'} \\
&= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k'=0}^{n+1} \binom{n+1}{k'} - \binom{n+1}{0} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left(2^{n+1} - 1\right)
\end{aligned}$$

d) C'est à peu près la même chose que la question précédente ! Par des calculs similaires, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k'=0}^{n+1} (-1)^{k'-1} \binom{n+1}{k'} - (-1)^{-1} \binom{n+1}{0} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left(- \sum_{k'=0}^{n+1} (-1)^{k'} \binom{n+1}{k'} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left(-(1-1)^{n+1} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

On peut tester cette formule avec $n = 2$:

$$\frac{1}{1}\binom{2}{0} - \frac{1}{2}\binom{2}{1} + \frac{1}{3}\binom{2}{2} = 1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Exercice 5

Cet exercice est délicat et s'appuie sur la propriété suivante des fonctions polynômiales :
Deux fonctions polynômiales sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux, degré par degré.

> Une conséquence de cette proposition est que l'on peut procéder à des identifications de coefficients dans des égalités de fonctions polynômiales. D'ailleurs, nous avons déjà exploité cela lorsque nous avons factorisé des polynômes de degré trois grâce à une racine évidente.

1. On suit l'indication. D'une part :

$$(1+x)^m = \sum_{p=0}^{m} \binom{p}{m} x^p$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= (1+x)^q (1+x)^{m-q} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} x^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{m-q} \binom{m-q}{k} x^k\right) \\ &= \left[\binom{q}{0} + \binom{q}{1} x + \cdots + \binom{q}{q} x^q\right] \times \left[\binom{m-q}{0} + \binom{m-q}{1} x + \cdots + \binom{m-q}{q} x^{m-q}\right]\end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, le coefficient de degré $p \geq q$ obtenu par développement est donc :

$$\binom{q}{0} \times \binom{m-q}{p} + \binom{q}{1} \times \binom{m-q}{p-1} + \cdots + \binom{q}{q} \times \binom{m-q}{p-q} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k}\binom{m-q}{p-k}$$

Mais, dans le développement direct obtenu par le binôme de Newton, le coefficient de degré p est aussi $\binom{m}{p}$. On obtient donc l'égalité recherchée, par identification des coefficients de degré p :

$$\binom{m}{p} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k}\binom{m-q}{p-k}$$

2. Considérons un ensemble E de cardinal m et un sous-ensemble $F \subset E$ de cardinal q. Pour fabriquer un sous-ensemble de cardinal $p \geq q$, on peut :
   - choisir 0 éléments de F et p éléments de $E \backslash F$: il y a $\binom{q}{0}\binom{m-q}{p}$ manières de faire ;
   - choisir 1 éléments de F et $p-1$ éléments de $E \backslash F$: il y a $\binom{q}{1}\binom{m-q}{p-1}$ manières de faire ;
   - $\cdots$
   - choisir q éléments de F et $p-q$ éléments de $E \backslash F$: il y a $\binom{q}{q}\binom{m-q}{p-q}$ manières de faire.

   Finalement il y a en tout $\binom{q}{0}\binom{m-q}{p} + \binom{q}{1}\binom{m-q}{p-1} + \cdots + \binom{q}{q}\binom{m-q}{p-q}$ sous-ensembles à p éléments de E. On obtient la formule escomptée.
3. On obtient le résultat en appliquant la formule avec $m = 2n$, $p = n$ et $q = n$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2n-n}{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \text{ car } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}\end{aligned}$$

Exercice 5

a) Par récurrence sur n.

On pose, pour tout n, P_n : $\sum_{0\leq k\leq n}\binom{p+k}{k}=\binom{p+n+1}{n}$.

Initialisation :

P_0 s'écrit : $\sum_{0\leq k\leq 0}\binom{p+k}{k}=\binom{p+0+1}{0} \iff 1=1$, ce qui est vrai.

Hérédité :

Pour un certain entier n, on suppose P_n vraie, c'est à dire $\sum_{0\leq k\leq n}\binom{p+k}{k}=\binom{p+n+1}{n}$. Travaillons sur la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq k\leq n+1}\binom{p+k}{k} &= \sum_{0\leq k\leq n}\binom{p+k}{k}+\binom{p+n+1}{n+1}\\ &= \binom{p+n+1}{n}+\binom{p+n+1}{n+1} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= \binom{p+n+2}{n+1} \text{ d'après la formule du triangle de Pascal.}\end{aligned}$$

On obtient donc bien $\sum_{0\leq k\leq n+1}\binom{p+k}{k}=\binom{p+n+2}{n+1}$, ce qui correspond à P_{n+1}.

Conclusion :

La formule est initialisée et héréditaire donc, par récurrence, vraie pour tout n.

b) Par récurrence sur n.

On pose, pour tout n, Q_n : $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$. Attention, ici l'initialisation commence avec $n=p$.

Initialisation :

Q_p s'écrit : $\sum_{k=p}^{p}\binom{k}{p}=\binom{p+1}{p+1} \iff 1=1$, ce qui est vrai.

Hérédité :

Pour un certain entier n, on suppose Q_n vraie, c'est à dire $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$. Travaillons là encore sur la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p} &= \sum_{0\leq k\leq n}\binom{k}{p}+\binom{n+1}{p}\\ &= \binom{n+1}{p+1}+\binom{n+1}{p} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= \binom{n+2}{p+1} \text{ d'après la formule du triangle de Pascal.}\end{aligned}$$

On obtient donc bien $\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p}=\binom{n+2}{p+1}$, ce qui correspond à Q_{n+1}.

Conclusion :

La formule est initialisée et héréditaire donc, par récurrence, vraie pour tout n.

Exercice 7

$A = 10$	$B = 7$	$C = 28$	$D = 25$	$E = 0$
$F = 24$	$G = 8$	$H = 0$	$I = \dfrac{1}{2}$	$J = i^{10}$

Exercice 8

a) $\dfrac{n(n+3)}{2}$ b) $n(n+1)$ c) $n(3n+1)$ d) $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{-1}}$ e) $\mathrm{e}^{-(n+1)} \times \left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{1-\mathrm{e}^{-1}}\right)$

Exercice 11

1. Calculons $\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)$ d'une première manière. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right) &= \cancel{1^3}-0^3+\cancel{2^3}-\cancel{1^3}+\cancel{3^3}-\cancel{2^3}+\cdots+(n+1)^3-\cancel{n^3}\\ &= (n+1)^3\end{aligned}$$

Mais, d'autre part, pour tout $k \in [\![0;\ n]\!]$, on a $(k+1)^3-k^3 = 3k^2+3k+1$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(3k^2+3k+1\right)\\ &= 3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1\\ &= 3S_n+3\frac{n(n+1)}{2}+n\end{aligned}$$

2. La question précédente permet d'obtenir l'égalité :

$$(n+1)^3 = 3S_n+3\frac{n(n+1)}{2}+n \iff S_n = \frac{(n+1)^3-\frac{3n(n+1)}{2}-n}{3}$$

Un peu de calcul permet d'obtenir :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k(k+1) &= \sum_{k=0}^{n}k^2+\sum_{k=0}^{n}k\\ &= S_n+\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)}{6}\left[(2n+1)+3\right]\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

Exercice 15

a) $2^n \times n!$

b) $(n!)^2$

c) $\dfrac{(n!)^2}{4}$

d) $\dfrac{(2n!)^2}{(n!)^2}$

e) $\dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$

Exercice 17

Pour tout n, on pose $P_n : u_n = a + nr$.

Initialisation :
P_0 s'écrit $u_0 = a + 0 \times r = a$, ce qui est vrai.

Hérédité :
On suppose P_n vraie pour un certain rang n.
Au rang $n+1$, on exploite l'hypothèse de récurrence et la définition de la suite :

$$u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion :
(P_n) est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout n.

Exercice 18

Pour tout n, on pose $P_n : u_n = aq^n$.

Initialisation :
P_0 s'écrit $u_0 = aq^0 = a$, ce qui est vrai.

Hérédité :
On suppose P_n vraie pour un certain rang n.
Au rang $n+1$, on exploite l'hypothèse de récurrence et la définition de la suite :

$$u_{n+1} = qu_n = qaq^n = aq^{n+1}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion :
(P_n) est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout n.

Exercice 19

Pour tout n, on pose $P_n : (1+a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation :
P_0 s'écrit $(1+a)^0 \geq 1 + 0 \times a \iff 1 \geq 1$, ce qui est vrai.

Hérédité :
On suppose P_n vraie pour un certain rang n.
Au rang $n+1$, on exploite l'hypothèse de récurrence, sachant que le nombre $(1+a)$ est positif.

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a)$$

Or, $(1+na)(1+a) = 1+na+a+na^2 = 1+(n+1)a+na^2$. Or $na^2 \geq 0$. On en déduit, $(1+na)(1+a) \geq 1+(n+1)a$.
Finalement, on a

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) \geq 1 + (n+1)a$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion :
(P_n) est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout n.

Exercice 20

On répond directement à la seconde question.
Pour tout n, on pose $P_n : u_n = n(n+1)$.

Initialisation :
P_0 s'écrit $u_0 = 0 \times 1$, ce qui est vrai.

Hérédité :
On suppose P_n vraie pour un certain rang n.
Au rang $n+1$, on exploite l'hypothèse de récurrence et la définition de la suite.

$$u_{n+1} = u_n + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion :
(P_n) est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout n.

Planche n° 8: Èquations différentielles

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $4y' + y = 0$ avec $y(0) = e$;

b) $y' = 0$ avec $y(1) = 3$;

c) $y' + y = \mathrm{e}^x$ avec $y(1) = \mathrm{e}$;

d) $y' + 2y = x + 3$ avec $y(0) = 1$;

e) $y' - 2y = \cos(2x)$ avec $y(0) = 1$;

f) $y' + y = x\mathrm{e}^x$;

g) $y' - 2y = x\cos(x)$;

h) $y' - y = \mathrm{e}^x$;

i) $2yy' + y^2 = \mathrm{e}^x$;

Exercice 2

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

a) $4y'' + 9y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$;

b) $y'' + 2y' + y = 0$ avec $y(2) = 0$ et $y'(2) = 1$;

c) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} + x^2 - x + 1$;

d) $y'' - y = e^x + e^{-x}$;

e) $y'' - 3y' + y = \sin x + \cos x$;

f) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}\sin(3x)$;

g) $y'' - 2y' + 5y = 4e^x\cos(2x)$;

h) $y'' - 4y' + 3y = 3e^{3x}$;

i) $y'' + y' - 2y = \cos(x)$;

j) $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$. (Poser $z = xy$).

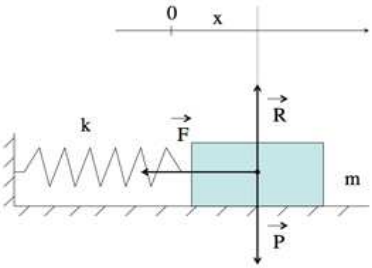
Exercice 3

Déterminer les applications f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(-x) = e^x.$$

Exercice 4

Un peu de mécanique...
On considère le système mécanique « masse-ressort » suivant :



On souhaite étudier les oscillations du solide de masse m lorsque, après l'avoir écarté de sa position de repos, on l'abandonne à lui-même. On suppose que le ressort a un coefficient de raideur k et une masse négligeable. Le solide est soumis à trois forces : $\vec{P}$ son poids, $\vec{R}$ l'action du support sur le solide et $\vec{F}$ l'action du ressort sur le solide, proportionnelle à l'étirement. Le principe fondamental de la dynamique donne l'équation (E) : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$ où $\vec{a}$ est le vecteur-accélération du solide.

1. Dans un premier temps, on considère qu'il y a absence de frottement (système non-amorti). L'action du support sur le solide est donc normale au mouvement. La composante horizontale de (E) donne : $-kx = mx''$. Résoudre cette équation différentielle. À l'instant $t = 0$, on lâche le solide, sans vitesse, en position $x_0 > 0$. Esquisser le graphe de la fonction x.

2. On suppose maintenant qu'il y a du frottement entre le solide et le support. L'action du support sur le solide n'est donc plus normale au mouvement, mais possède une composante tangentielle que l'on suppose proportionnelle à la vitesse du solide, de coefficient de proportionnalité a, appelé coefficient d'amortissement. La composante horizontale de (E) devient donc : $-ax' - kx = mx''$. Résoudre cette équation différentielle en discutant selon les valeurs de m, k et a. À l'instant $t = 0$, on lâche le solide, sans vitesse, en position $x_0 > 0$. Esquisser le graphe de la fonction x dans les différents cas.

Corrigé de la planche n° 8: Équations différentielles

Exercice 1

a) Les solutions de l'équation sont :

$$\left\{x \mapsto K\mathrm{e}^{-x/4};\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

La condition initiale entraîne $K = \mathrm{e}$.
Ainsi, la solution est $x \mapsto \mathrm{e}^{-x/4+1}$

b) On obtient la solution $x \mapsto 3$.

c) On cherche a tel que $f : x \mapsto a\mathrm{e}^x$ est solution particulière. On obtient, après identification, $a = \frac{1}{2}$.
Finalement, les solutions sont :

$$\left\{x \mapsto K\mathrm{e}^{-x};\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \in \mathbb{R}\right\}$$

La condition initiale entraîne $K = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2$.
Ainsi, la solution est $x \mapsto \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2-x} + \mathrm{e}^x\right)$.

d) On cherche a et b tels que $f : x \mapsto ax + b$ est solution particulière. On obtient, après identification, $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{5}{4}$.
La condition initiale impose la valeur de la constante dans les solutions homogènes.
Finalement, la solution est $x \mapsto \frac{-1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$.

e) On cherche a et b tels que $f : x \mapsto a\cos(2x) + b\sin(2x)$ est solution particulière.

Après résolution complète et application de la condition initiale, on obtient la solution :
$x \mapsto \frac{5}{4}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{4}\left(\sin(2x) - \cos(2x)\right)$.

f) On cherche a et b tels que $x \mapsto (ax + b)\mathrm{e}^x$ est solution particulière.

Après résolution complète, on obtient les solutions :

$$\left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{4}\left(2x - 1\right)\mathrm{e}^x \text{ avec } k \in \mathbb{R}\right\}$$

g) Ici, c'est un peu plus lourd. On doit chercher a, b, c et d tels que $f : x \mapsto (ax+b)\cos(x)+(cx+d)\sin(x)$ est solution particulière. Le principe reste le même : il s'agit de « réinjecter » la valeur de $f'(x)-2f(x)$ et de faire en sorte, par identification, que cette expression soit égale, pour tout x, à $x\cos(x)$.

On obtient, après calculs, les solutions :

$$\left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{25}\left((5x+4)\sin(x) - (10x+3)\cos(x)\right) \text{ avec } k \in \mathbb{R}\right\}$$

h) Ici, le piège, c'est que, pour tout a, la fonction $x \mapsto a\mathrm{e}^x$ est solution homogène.
L'astuce consiste à augmenter le degré. On cherche donc a tel que $f : x \mapsto ax\mathrm{e}^x$ soit solution particulière.

Après calculs, on obtient les solutions :

$$\left\{x \mapsto \left(k\mathrm{e}^x + x\right)\mathrm{e}^x \text{ avec } k \in \mathbb{R}\right\}$$

i) A priori cette équation n'est pas linéaire en y car on y trouve un terme y^2. On peut cependant remarquer que $(y^2)' = 2y'y$, ce qui conduit à faire le changement de variable $z = y^2$.
On résout donc $z' + z = \mathrm{e}^x$. On obtient les solutions $\left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \text{ avec } k \in \mathbb{R}\right\}$.

La question que l'on se pose ensuite, c'est pour quelles valeurs de k $z(x)$ reste-t-il positif pour tout x ?

En effet, comme on a $y^2 = z$, seules les solutions positives nous intéressent.

On étudie donc, pour k fixé, la fonction $z : x \mapsto k\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$.

Cette fonction est du même signe que $u : x \mapsto k + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ (on a multiplié par e^{x} qui est positif). Or cette dernière fonction est strictement croissante et on a $\lim\limits_{-\infty} u = k$ et $\lim\limits_{-\infty} u = +\infty$.

Ainsi, la fonction z reste positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $k \geq 0$.

On obtient donc les solutions pour y :

$$\left\{x \mapsto \sqrt{k\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}} \text{ avec } k \in \mathbb{R}^+\right\} \cup \left\{x \mapsto -\sqrt{k\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}} \text{ avec } k \in \mathbb{R}^+\right\}$$

Exercice 3

a) Après résolution de l'équation caractéristique, et détermination des deux constantes grâce aux conditions initiales, on obtient l'unique solution

$$x \mapsto \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{2}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$$

b) Après résolution de l'équation caractéristique, et détermination des deux constantes grâce aux conditions initiales, on obtient l'unique solution

$$x \mapsto (x-2)\,\mathrm{e}^{2-x}$$

c) Après résolution de l'équation homogène et utilisation de la méthode de superposition pour déterminer les solutions particulières, on obtient les solutions :

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{8} + (K_1x + K_2)\mathrm{e}^{-2x}$$

avec $(K_1;\ K_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés.

> Pour trouver la solution particulière avec le second membre e^{-2x}, il fallait aller jusqu'au polynôme du second degré puisque n'importe quelle fonction de la forme $f(x)\mathrm{e}^{-2x}$ avec f affine est déjà solution de l'équation homogène.

d) On utilise la même technique que précédemment en remarquant que e^{x} et e^{-x} sont déjà solutions de l'équation homogène, ce qui contraint à aller jusqu'à la fonction affine pour la recherche de solution particulière. On obtient :

$$x \mapsto \frac{x}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) + K_1\mathrm{e}^{x} + K_2\mathrm{e}^{-x}$$

avec $(K_1;\ K_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés.

e) On peut plonger dans les complexes pour déterminer la solution particulière. On obtient :

$$x \mapsto \frac{1}{3}(\cos(x) - \sin(x)) + K_1\mathrm{e}^{r_1x} + K_2\mathrm{e}^{r_2x}$$

avec $r_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $r_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $(K_1;\ K_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés.

f) On peut ici plonger dans les complexes en résolvant l'équation E_c :

$$y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x}$$

En effet, le second membre de l'équation de départ vaut $\Im\left(\mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x}\right)$.

On obtient alors les solutions

$$x \mapsto \frac{-\mathrm{e}^{2x}}{30}(\cos(3x) + 3\sin(3x)) + K_1\mathrm{e}^{x} + K_2\mathrm{e}^{2x}$$

avec $(K_1;\ K_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés.

g) On applique la même technique qu'à la question précédente à l'exception qu'ici, la fonction à valeurs complexes $x \mapsto \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}$ est solution de l'équation homogène !
On obtient :
$$x \mapsto x\sin(2x)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\left(K_1\cos(2x) + K_2\sin(2x)\right)$$
avec $(K_1;\ K_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés.

h) Encore une fois le second membre est solution de l'équation homogène.
On obtient :
$$x \mapsto \frac{3}{2}x\mathrm{e}^{3x} + K_1\mathrm{e}^x + K_2\mathrm{e}^{3x}$$
avec $(K_1;\ K_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés.

i) On obtient :
$$x \mapsto \frac{1}{10}\left(-3\cos(x) + \sin(x)\right) + K_1\mathrm{e}^x + K_2\mathrm{e}^{-2x}$$
avec $(K_1;\ K_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés.

j) En suivant l'indication, on pose $z = xy$. Il vient :
$$z' = xy' + y = (x+1)y' \text{ et } z'' = xy'' + 2y'$$
Dans l'équation de départ, on substitue xy'' par $z'' - 2y'$, xy' par $z' - y$ et enfin xy par z. Ainsi :
$$\begin{aligned} xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0 &\iff xy'' + 2xy' + 2y' + xy + 2y = 0 \\ &\iff z'' - 2y' + 2(z' - y) + 2y' + z + 2y = 0 \\ &\iff z'' + 2z' + z = 0 \end{aligned}$$
Cette équation en z donne les solutions :
$$x \mapsto (K_1x + K_2)\mathrm{e}^{-x}$$
On en déduit les solutions sur $\mathbb{R}^*$ pour l'équation de départ en y :
$$x \mapsto \frac{K_1x + K_2}{x}\mathrm{e}^{-x}$$

Exercice 4

Notons E cette équation. On va raisonner par implications successives.
Soit f une solution de cette équation. On a, pour tout x, $f'(x) = \mathrm{e}^x - f(-x)$. Sachant que f est dérivable, on en déduit que $x \mapsto f(-x)$ est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables.
Ainsi, $f'(x) = \mathrm{e}^x - f(-x)$ est dérivable. Dérivons cette égalité, pour tout x, cela donne : $f''(x) = \mathrm{e}^x + f'(-x)$.
Or, $f'(-x) = \mathrm{e}^{-x} - f\left(-(-x)\right) = \mathrm{e}^{-x} - f(x)$.
On en déduit que f vérifie l'équation $f''(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - f(x) \iff f''(x) + f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ qui est une équation différentielle du second ordre « classique ». En utilisant les techniques de l'exercice 2, on obtient que f doit nécessairement être de la forme
$$x \mapsto \underbrace{K_1\cos(x) + K_2\sin(x)}_{\text{solutions homogènes}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)}_{\text{solution particulière}}$$

> ⚠ Mais, pour autant cela ne signifie pas forcément que f vérifie l'équation de départ car nous avons ici raisonné par implications successives et non par équivalences !

Il faut donc vérifier si f satisfait bien l'équation de départ. On réinjecte donc les solutions proposées.

On doit donc avoir pour tout x :

$$\underbrace{-K_1\sin(x)+K_2\cos(x)+\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)}_{f'(x)}+\underbrace{K_1\cos(x)-K_2\sin(x)+\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}\right)}_{f(-x)}=\mathrm{e}^{x}$$

$$\iff (K_2+K_1)(\cos(x)-\sin(x))+\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x}$$

$$\iff K_2+K_1=0$$

$$\iff K_2=-K_1$$

On obtient donc finalement les solutions de l'équation de départ :

$$x\mapsto K_1(\cos(x)-\sin(x))+\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)$$

Planche n° 9: Nombres complexes

Exercice 1

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique et calculer leur module :

$$z_1 = \frac{1}{i}; \quad z_2 = \frac{1+i}{1-i}; \quad z_3 = \frac{1+2i}{1-3i}; \quad z_4 = \frac{(2+3i)^2}{4-2i}; \quad z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}; \quad z_6 = \frac{(5-i)^6}{(3+2i)^5}.$$

Exercice 2

a) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{z+i}{z-3i} \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{2z+1}{iz-2} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Montrer l'égalité $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$ et en donner une interprétation géométrique.

Exercice 4

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $\lambda \neq -i$. Montrer l'équivalence : $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left|\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$.

Exercice 5

Soient a et b deux entiers naturels. On suppose que a et b sont chacun la somme de deux carrés d'entiers. Montrer qu'alors leur produit ab est aussi la somme de deux carrés d'entiers.
Indication : Voir a et b comme les carrées de modules de nombres complexes bien choisis.

Exercice 6

Montrer :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \frac{|\Re(z)| + |\Im(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|.$$

Exercice 7

Montrer : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}, \quad \left|\dfrac{1-z^n}{1-z}\right| \leq \dfrac{1-|z|^n}{1-|z|}$.

Exercice 8

(Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire). Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Montrer :

$$|z+z'| = |z| + |z'| \Longleftrightarrow \arg(z) \equiv \arg(z')[2\pi] \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z = \lambda z'.$$

Exercice 9

Montrer : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{C}^3, |1+a| + |a+b| + |b+c| + |c| \geq 1$.

Exercice 10

Déterminer le module et un argument de

$$z_1 = (1+i)^{18}; \quad z_2 = (\sqrt{15}+i\sqrt{5})^{2013}; \quad z_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}.$$

Exercice 11

On considère les deux nombres complexes $z_1 = e^{i\pi/3}$ et $z_2 = e^{-i\pi/4}$.

a) Écrire z_1 et z_2 sous formes algébrique.

b) Écrire $z_1 z_2$ sous formes algébrique et trigonométrique.

c) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 12

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $(\sqrt{3}+i)^n \in \mathbb{R}_-$.

Exercice 13

Montrer : $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \left(\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ |2 + z_1 z_2| = 1 \end{cases} \Longrightarrow z_1 z_2 = -1\right)$.

L'implication réciproque est-elle vraie ?

Exercice 14

Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser les expressions trigonométriques suivantes :

$$\cos^2 x, \quad \sin^2 x, \quad \cos^3 x, \quad \sin^3 x, \quad \cos^4 x, \quad \sin^4 x, \quad \sin^3 x \cos^3 x.$$

Exercice 15

Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer les quantités suivantes en à l'aide de puissances de $\sin x$ et $\cos x$:

$$\sin 3x, \quad \cos 3x, \quad \sin 4x, \quad \cos 4x, \quad \sin 5x.$$

Exercice 16

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Factoriser les expressions suivantes :

$$\cos x + \cos y, \quad \sin x + \sin y, \quad \cos x + \sin y.$$

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $3z - (3-i)\overline{z} = 1 - 2i$.

b) $4z^2 - 16z + 11 - 12i = 0$.

c) $z^2 + 4 = 5z - 10i$.

d) $z(z+5) = i - 7$.

e) $z^5 = 16\sqrt{2} + 16i\sqrt{2}$.

f) $z^8 - 3z^4 + 2 = 0$.

g) $z^7 - 4z^5 - z^2 + 4 = 0$.

h) $z^8 + 2z^7 - 2z - 4 = 0$.

Exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme et le produit des racines n-ième de l'unité.

Exercice 19

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.

Exercice 20

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.

Exercice 21

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $e^z = i$.

b) $e^z = 1 + i$.

Exercice 22

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Montrer l'inégalité $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
2. Soient A, B et C trois points du plan. Montrer l'inégalité $AB + BC \geq AC$.

Exercice 23

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2 - i\sqrt{3}$ et $z_C = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Tracer le triangle ABC, et montrer qu'il est rectangle.
2. On note E l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie : $|z|^2 - 5|z| + 4 \leq 0$.
   i) Les points A, B et C appartiennent-ils à E ?
   ii) Déterminer l'ensemble E, et le hachurer sur le dessin.

Exercice 24

Déterminer géométriquement et par le calcul l'ensemble des nombres complexes z tels que $\left|\dfrac{z-8}{z-4}\right| = 1$.

Exercice 25

Déterminer géométriquement l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| = \dfrac{1}{|z|} = |z-1|$.

Exercice 26

Déterminer l'ensemble des points d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que :

1. $1, z$ et z^2 soient les affixes de trois points alignés.
2. z et $\dfrac{1}{z}$ soient les affixes de deux vecteurs orthogonaux.
3. $1, z$ et $z + i$ soient les affixes de trois sommets d'un triangle dont le centre du cercle circonscrit est l'origine O du repère.

Exercice 27

Soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \cos(a) + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 \\ \sin(a) + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0 \end{cases}$$

Corrigé de la planche n° 9: Nombres complexes

Exercice 1

$z_1 = -\mathrm{i}$	$z_2 = \mathrm{i}$	$z_3 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$	$z_4 = \frac{-11}{5} + \frac{19}{10}\mathrm{i}$	$z_5 = \mathrm{i}$	$z_6 = -16 + 24\mathrm{i}$
$\lvert z_1\rvert = 1$	$\lvert z_2\rvert = 1$	$\lvert z_3\rvert = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\lvert z_4\rvert = \frac{13\sqrt{5}}{10}$	$\lvert z_5\rvert = 1$	$\lvert z_6\rvert = 8\sqrt{13}$

Exercice 2

a) Il faut que $z \neq 3\mathrm{i}$.
Soient M l'image de z, A, l'image de $3\mathrm{i}$ et B l'image de $-\mathrm{i}$.
Cette condition s'écrit « $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ colinéaires », c'est à dire $M \in (AB)$.
Or (AB) est l'axe des imaginaires. On en déduit donc l'ensemble des solutions

$$\{\lambda\mathrm{i},\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{3\}\}$$

b) Il faut que $\mathrm{i}z \neq 2$, c'est à dire $z \neq -2\mathrm{i}$.
On va essayer de traduire cette condition géométriquement, en terme de vecteurs. Or cette condition s'écrit

$$\begin{aligned}\exists\lambda \in \mathbb{R}/\ \frac{2z+1}{iz-2} = \mathrm{i}\lambda &\iff \frac{2}{\mathrm{i}} \times \frac{z+\frac{1}{2}}{z+2\mathrm{i}} = \mathrm{i}\lambda \\ &\iff \frac{z+\frac{1}{2}}{z+2\mathrm{i}} = \frac{-\lambda}{2}\end{aligned}$$

Lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, $\frac{-\lambda}{2}$ décrit également $\mathbb{R}$.
Cette condition est donc équivalente à dire que les vecteur $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{DM}$ sont colinéaires avec M qui est l'image de z, C, celle de $\frac{-1}{2}$ et D celle de $-2\mathrm{i}$.
Or l'équation de (CD) est $y = -4x - 2$. Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\{a + \mathrm{i}(-4a-2),\ a \in \mathbb{R}^*\}$$

Exercice 3

On a l'identité suivante

$$\forall(z;\ z') \in \mathbb{C}^2,\ \lvert z+z'\rvert^2 = (z+z') \times \overline{(z+z')} = \cdots = \lvert z\rvert^2 + \lvert z'\rvert^2 + 2\Re\left(z\overline{z'}\right)$$

qui est équivalente au théorème d'Al Kashi.
Cela conduit, après calcul, à

$$\lvert z+z'\rvert^2 + \lvert z-z'\rvert^2 = \cdots = 2\left[\lvert z\rvert^2 + \lvert z'\rvert^2\right]$$

Cela correspond à l'identité du parallélogramme.

Exercice 4

On va raisonner par équivalences. On considère ainsi $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{-\mathrm{i}\}$ et on pose $a = \Re(\lambda)$ et $b = \Im(\lambda)$.
On calcule ensuite $1 + \lambda\mathrm{i} = 1 + \mathrm{i}(a + \mathrm{i}b) = 1 - b + a\mathrm{i}$ et $1 - \lambda\mathrm{i} = 1 + b - a\mathrm{i}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1+\lambda\mathrm{i}}{1-\lambda\mathrm{i}}\right| = 1 &\iff \sqrt{\frac{(1-b)^2+a^2}{(1+b)^2+a^2}} = 1 \\
&\iff (1-b)^2 + a^2 = (1+b)^2 + a^2 \\
&\iff b^2 + 1 - 2b + a^2 = b^2 + 1 + 2b + a^2 \\
&\iff 4b = 0 \\
&\iff b = 0 \qquad\qquad \iff \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Exercice 6

Pour cet exercice, il s'agit de poser $z = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$.
La série d'inégalité à prouver s'écrit alors

$$\frac{|a| + |b|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$$

On travaille par équivalences sur la première inégalité, sachant que les deux membres sont positifs et que $|a|^2 = a^2$.

$$\begin{aligned}
\frac{|a| + |b|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a^2 + b^2} &\iff a^2 + b^2 + 2|a||b| \leq 2\left(a^2 + b^2\right) \\
&\iff 0 \leq a^2 + b^2 - 2|a||b| \\
&\iff 0 \leq (|a| - |b|)^2
\end{aligned}$$

Ce qui est vrai !
On montre de manière similaire que la seconde inégalité est équivalente à

$$0 \leq 2|a||b|$$

Ce qui est également vrai !

Exercice 7

Ici, il s'agit de remarquer que, pour $|z| \neq 1$, on a

$$\frac{1 - z^n}{1 - z} = \sum_{0 \leq k \leq n} z^k$$

et

$$\frac{1 - |z|^n}{1 - |z|} = \sum_{0 \leq k \leq n} |z|^k$$

Ainsi, l'inégalité à prouver peut se réécrire :

$$\left|\sum_{0 \leq k \leq n} z^k\right| \leq \sum_{0 \leq k \leq n} |z|^k$$

Ce qui est vrai puisque le module vérifie l'inégalité triangulaire.

Exercice 10

On utilise les propriétés du module et de l'argument. Dans ce genre d'exercice, il est inutile de chercher une forme algébrique des nombres ! Pour donner la valeur principale des arguments, on se ramène au multiple de 2π le plus proche. Après calcul, on obtient :

$$|z_1| = 512 \qquad |z_2| = \left(2\sqrt{3}\right)^{2013} \qquad |z_3| = 1024$$

$$\arg(z_1) = \frac{\pi}{2} \qquad \arg(z_2) = \frac{-\pi}{2} \qquad \arg(z_3) = \frac{-\pi}{3}$$

Exercice 11

a)

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \qquad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$

b) Après calcul, on obtient :

$$z_1 z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

c) En identifiant les parties réelles et imaginaires de $z_1 z_2$, on obtient :

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Exercice 13

Soient z_1 et z_2 deux complexes tels que $|z_1| = |z_2|$ et $|2 + z_1 z_2| = 1$.
On pose $\alpha = z_1 z_2$ puisque la propriété à prouver porte sur α.
On sait que $|\alpha| = |z_1||z_2| = 1$ et que $|2 + \alpha| = 1$, c'est à dire $|\alpha - (-2)| = 1$.
Posons Γ' le cercle de centre $(-2;\ 0)$ et de rayon 1. Posons Γ le cercle trigonométrique.
Et enfin, soit M l'image de α.
La relation $|\alpha| = 1$ se traduit par $M \in \Gamma$ et la relation $|\alpha - (-2)| = 1$ se traduit par $M \in \Gamma'$. Ainsi $M \in \Gamma \cap \Gamma'$.
Or l'intersection de ces deux cercles est réduite au point de coordonnées $(-1;\ 0)$.
Ainsi $\alpha = -1$.
La réciproque est fausse, prendre par exemple $z_1 = \frac{1}{2}$ et $z_2 = -2$.

Exercice 14

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient, en utilisant la méthode du cours et après calcul sur le binôme de Newton :

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\left(\cos(3x) + 3\cos(x)\right) \qquad \sin^3(x) = \frac{1}{4}\left(-\sin(3x) + 3\sin(x)\right)$$

$$\cos^4(x) = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3\right) \qquad \sin^4(x) = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3\right)$$

$$\sin^3(x)\cos^3(x) = \frac{1}{32}\left(3\sin(2x) - \sin(6x)\right)$$

Exercice 15

En développant $(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^k$, et en identifiant partie réelle et partie imaginaire, on obtient :

$$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos^2(x)\sin^2(x) \qquad \sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)$$

$$\cos(4x) = \cos^4(x) - 6\cos^(x)\sin^2(x) + \sin^4(x) \qquad \sin(4x) = 4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x)$$

$$\sin(5x) = 5\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^2(x)\sin^3(x) + \sin^5(x)$$

Exercice 17

a) Poser $a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$. L'équation se traduit alors par (après calculs) :

$$b + \mathrm{i}(6b + a) = 1 - 2\mathrm{i}$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire on obtient le système

$$\begin{cases} b = 1 \\ 6b + a = -2 \end{cases}$$

Ce qui donne $b = 1$ et $a = -8$, c'est à dire $z = -8 + \mathrm{i}$.

b) On applique la méthode de résolution par calcul du discriminant. On obtient les solutions $z_1 = \frac{1-2\mathrm{i}}{2}$ et $z_2 = \frac{7+\mathrm{i}}{2}$

c) Cette équation est équivalente à $z^2 - 5z + 4 + 10\mathrm{i} = 0$. On la résout à l'aide de la méthode du cours, on obtient les solutions $z_1 = 5 - 2\mathrm{i}$ et $z_2 = 2\mathrm{i}$.

Autre option :
Pour tout z, cette équation est équivalente à $(z - 2\mathrm{i})(z + 2\mathrm{i}) = 5(z - 2\mathrm{i}) \iff (z - 2\mathrm{i})(z - 5 + 2\mathrm{i}) = 0$. On retrouve ainsi les solutions.

d) Cette équation est équivalente à $z^2 + 5z + 7 - \mathrm{i} = 0$.
On obtient, après calcul, les solutions $z_1 = -3 - \mathrm{i}$ et $z_2 = -2 + \mathrm{i}$

e) On pose $\alpha = 16\sqrt{2} + 16i\sqrt{2}$. On obtient $|\alpha| = 32$ et $\arg(\alpha) = \dfrac{\pi}{4}$.
Le module et l'argument de z vérifient donc

$$\begin{cases} |z|^5 = 32 \\ 5\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On obtient donc les cinq solutions :

$$\left\{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/20};\ 2\mathrm{e}^{9\mathrm{i}\pi/20};\ 2\mathrm{e}^{17\mathrm{i}\pi/20};\ 2\mathrm{e}^{25\mathrm{i}\pi/20};\ 2\mathrm{e}^{33\mathrm{i}\pi/20}\right\}$$

f) On réalise un changement de variable, on pose $Z = z^4$. On obtient l'équation :
$Z^2 - 3Z + 2 = 0$ qui a pour solutions $Z = 1$ et $Z = 2$.
On résout ensuite les deux équations $z^4 = 1$ et $z^4 = 2$. On obtient ainsi les huit solutions :

$$\left\{1;\ i;\ -1;\ -i;\ 2^{1/4};\ 2^{1/4}i;\ -2^{1/4};\ -2^{1/4}i\right\}$$

g) On constate que 1, 2 et -2 sont des racines évidentes. On peut donc factoriser le polynôme $z^7 - 4z^5 - z^2 + 4$ par $(z - 1)(z - 2)(z + 2)$.
On obtient, après calcul, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^7 - 4z^5 - z^2 + 4 = (z - 1)(z + 2)(z - 2)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

Or, on sait que, pour $z \neq 1$, $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \dfrac{z^5 - 1}{z - 1}$. On obtient donc l'expression simplifiée :

$$z^7 - 4z^5 - z^2 + 4 = (z + 2)(z - 2)(z^5 - 1)$$

Cette expression est nulle pour $z = 2$ ou $z = -2$ ou $z^5 = 1$. On obtient donc les sept racines

$$\left\{2;\ -2;\ 1;\ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/5};\ \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/5};\ \mathrm{e}^{6\mathrm{i}\pi/5};\ \mathrm{e}^{8\mathrm{i}\pi/5}\right\}$$

Autre option : Pour tout z, cette équation est équivalente à $z^5(z^2-4)-(z^2-4) = 0 \iff (z^5-1)(z^2-4) = 0$. On obtient ensuite les solutions plus simplement.

h) Dans cette expression, -2 est une racine évidente. Après factorisation, on obtient

$$z^8 + 2z^7 - 2z - 4 = (z + 2)(z^7 - 2)$$

Il y a donc huit racines :

$$\left\{-2;\ 2^{1/7};\ 2^{1/7}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/7};\ 2^{1/7}\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/7};\ 2^{1/7}\mathrm{e}^{6\mathrm{i}\pi/7};\ 2^{1/7}\mathrm{e}^{8\mathrm{i}\pi/7};\ 2^{1/7}\mathrm{e}^{10\mathrm{i}\pi/7};\ 2^{1/7}\mathrm{e}^{12\mathrm{i}\pi/7}\right\}$$

Autre option : Pour tout z, cette équation est équivalente à $z^7(z+2)-2(z+2) = 0 \iff (z+2)(z^7-2) = 0$. On obtient ensuite les solutions plus simplement.

Exercice 18

On note pour tout $k \in [\![0;\ n-1]\!]$, $\alpha_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}$. Ce sont les racines n-ièmes de l'unité.

On veut calculer :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}\right)^k\end{aligned}$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$. Il faut distinguer deux cas :

- Pour $n = 1$, la raison vaut $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/1} = 1$ et la somme vaut donc 1.
- Pour $n \geq 2$, la somme vaut :

$$\frac{1 - \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}}{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}} = 0$$

Calculons maintenant le produit :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} \alpha_k &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n} \\ &= \mathrm{e}^{\sum_{k=0}^{n-1} 2\mathrm{i}k\pi/n} \\ &= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n \sum_{k=0}^{n-1} k} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n} \times \frac{n(n-1)}{2}} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\pi} \\ &= (-1)^{n-1}\end{aligned}$$

Exercice 19

On pose $Z = \frac{z+1}{z-1}$ et on résout $Z^n = 1$. Il y a n solutions qui correspondent aux racines n-ièmes de l'unité, que l'on note pour tout $k \in [\![0;\ n-1]\!]$, $\alpha_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}$.
Reste à trouver les solutions de l'équation de départ. Il s'agit de résoudre, pour tout $k \in [\![0;\ n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z-1} = \alpha_k &\iff (z-1)\alpha_k = z+1 \\ &\iff z(\alpha_k - 1) = 1 + \alpha_k\end{aligned}$$

Ici, il faut distinguer deux cas :

- Pour $\alpha_k = 1$, cette équation n'a pas de solution. Il convient donc d'éliminer $\alpha_0 = 1$;
- Pour $\alpha_k \neq 1$, c'est à dire pour $k \geq 1$, cette équation a pour unique solution : $\frac{1+\alpha_k}{\alpha_k - 1}$.

Finalement, l'équation possède $n-1$ solutions :

$$\left\{\frac{1+\alpha_1}{\alpha_1 - 1};\ \frac{1+\alpha_2}{\alpha_2 - 1};\ \ldots;\ \frac{1+\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1} - 1}\right\}$$

Exercice 20

Ici, $z = 1$ n'est pas solution. On raisonne donc pour tout $z \neq 1$:

$$\begin{aligned}27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0 &\iff (z+1)^6 = -27(z-1)^6 \\ &\iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -27\end{aligned}$$

On pose $Z = \frac{z+1}{z-1}$ et on résout $Z^6 = -27 = 27\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$. On reconnaît ici une équation « classique » que l'on résout facilement par passage au module et à l'argument. Il y six solutions, notées, pour tout $k \in [\![0;\ 5]\!]$, $\beta_k = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6 + 2k\pi/6} = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}(2k+1)}$.

Ensuite, on résout, pour tout $k \in [\![0;\ 5]\!]$, l'équation

$$\frac{z+1}{z-1} = \beta_k \iff (z-1)\beta_k = z+1 \iff z(\beta_k - 1) = \beta_k + 1$$

Aucun des β_k n'est égal à 1. Il y a donc exactement six solutions sur z :

$$\left\{\frac{1+\beta_1}{\beta_1 - 1};\ \frac{1+\beta_2}{\beta_2 - 1};\ \ldots;\ \frac{1+\beta_5}{\beta_5 - 1}\right\}$$

Exercice 23

1. Voir le dessin plus bas. On peut obtenir $\sqrt{3}$ à la règle et au compas car c'est la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 2. En effet, $2^2 - 1^2 = 3$.

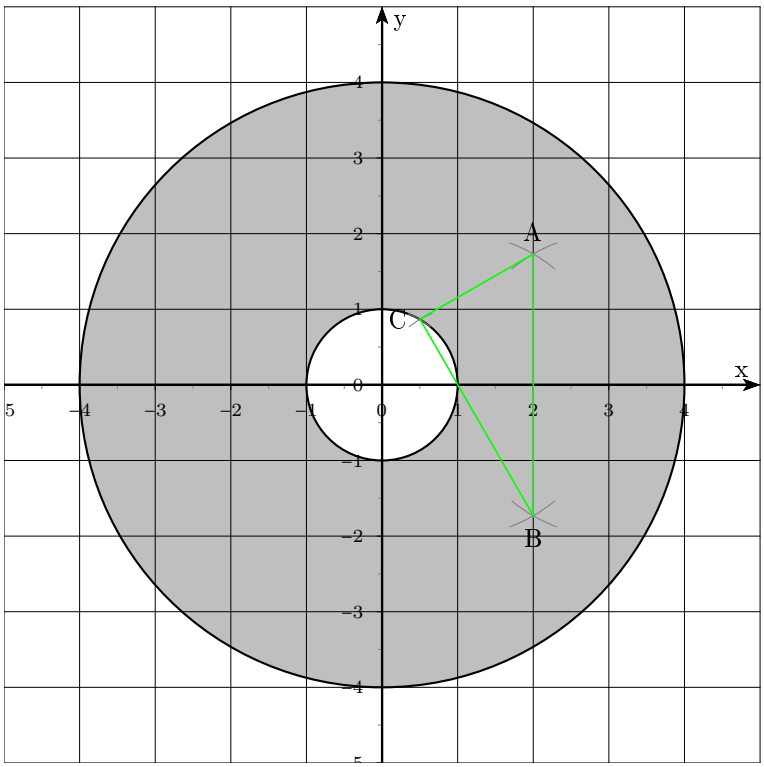
   De plus, un peu de calcul donne $\dfrac{z_a - z_c}{z_b - z_c} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$, ce qui prouve que le triangle est rectangle en C.

2. i) Après calcul du discriminant et des racines, on a les équivalences :

   $$|z|^2 - 5|z| + 4 \leq 0 \iff (|z| - 1)(|z| - 4) \leq 0 \iff |z| \in [1;\ 4]$$

   Le calcul de $|z_a| = \sqrt{7}$, $|z_b| = \sqrt{7}$ et $|z_c| = 1$ montrent que ces trois points appartiennent à E.

   ii) L'ensemble E forme une couronne centrée en O délimitée par les rayons 1 et 4.



Exercice 24

C'est très facile. Pour tout $z \neq 4$, on a l'équivalence :

$$\left|\frac{z-8}{z-4}\right| = 1 \iff |z-8| = |z-4|$$

Cela donne donc les complexes dont l'image est sur la médiatrice des points d'affixe 8 et 4, c'est à dire l'ensemble des complexes de partie réelle égale à 6.

Exercice 25

Cela revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} |z| = |z-1| \\ |z| = \dfrac{1}{|z|} \end{cases}$$

On va se placer dans le plan complexe. Soit O le centre du repère et A le point d'affixe 1. Soit enfin M le point d'affixe z.

On a $|z-1| = AM$ et $|z| = OM$. Ce problème est donc équivalent à trouver l'ensemble des points M tels que

$$\begin{cases} OM = AM \\ OM = \dfrac{1}{OM} \end{cases} \iff \begin{cases} OM = AM \\ OM = 1 \end{cases}$$

- La première condition $AM = OM$ est équivalente à « M est sur la médiatrice de $[OA]$ ».
- La seconde condition $OM = 1$ est équivalente à « M est sur le cercle de centre O de rayon 1 ».

Les solutions sont donc les intersections de la médiatrice de $[OA]$ et du cercle de centre O de rayon 1.

On obtient assez facilement les points d'affixes $e^{i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/3}$.
Les nombres $e^{i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/3}$ sont donc les solutions du problème de départ !

Exercice 26

1. On note E le point d'affixe 1.
   E fait partie du lieu. Un point $M \neq E$ fait partie de ce lieu si et seulement si son affixe z vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{z^2-1}{z-1} \text{ est un réel pur} &\iff z+1 \text{ est un réel pur} \\ &\iff z \text{ est un réel pur} \end{aligned}$$

   Le lieu considéré est donc l'axe des réels.

2. Ici, O ne peut pas faire partie du lieu. Un point M fait partie du lieu si et seulement si son affixe z vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{z}{\frac{1}{z}} \text{ est un imaginaire pur} &\iff z^2 \text{ est un imaginaire pur} \\ &\iff a^2 - b^2 = 0 \text{ avec } a \text{ et } b \text{ les parties réelles et imaginaires de } z \\ &\iff a = b \text{ ou } a = -b \end{aligned}$$

   Le lieu considéré est donc formé de la réunion des deux bissectrices d'équations $y = x$ et $y = -x$.

3. La condition sur l'affixe z s'écrit :

$$|1| = |z| = |z+i| \iff |z| = 1 \text{ et } |z+i| = 1$$

   Le lieu est donc l'intersection du cercle trigonométrique et du cercle de centre d'affixe $-i$ et de rayon 1.
   On obtient donc les deux points d'affixes respectives $e^{-i\pi/6}$ et $e^{-5i\pi/6}$.

Exercice 27

On examine le système

$$\begin{cases} \cos(a) + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 & (L_1) \\ \sin(a) + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0 & (L_2) \end{cases}$$

En faisant $L_1 + iL_2$, on obtient :

$$e^{ia} + e^{i(a+x)} + e^{i(a+y)} = 0 \qquad (E)$$

Cette équation est équivalente car si on prend la partie réelle de cette équation on retrouve L_1 et si on prend la partie imaginaire, on retrouve L_2.
L'équation E donne, après factorisation :

$$1 + e^{ix} + e^{iy} = 0$$

Posons $\alpha = e^{ix}$ et $\beta = e^{iy}$. α et β vérifient :

$$\begin{cases} |\alpha| = 1 \\ |\beta| = 1 \\ \alpha + \beta = -1 \end{cases}$$

Méthode géométrique :
Exploitons la géométrie pour résoudre ce problème. Soit A l'image de α, B le point tel que $\overrightarrow{AB}$ est l'image de β et enfin C le point d'affixe -1.
La relation $\beta = -1 - \alpha$ se traduit vectoriellement par $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ ce qui donne $B = C$.
L'égalité $|\alpha| = |\beta| = 1$ donne $OA = AB = 1$. On en déduit que le point A est sur le cercle trigonométrique mais aussi sur le cercle de centre $B = C$ et de rayon 1. Il y a donc deux possibilités :

- A a pour affixe $\alpha = e^{2i\pi/3} = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et dans ce cas $\beta = -1 - \alpha = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{-2i\pi/3}$.
- A a pour affixe $\alpha = e^{-2i\pi/3} = \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et dans ce cas $\beta = -1 - \alpha = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3}$.

Dans les deux cas, on obtient $\beta = \overline{\alpha}$.
Finalement, il y a deux couples de solutions, aux multiples de 2π près :

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \\ y = \frac{-2\pi}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{-2\pi}{3} \\ y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Méthode calculatoire :
On pose $p = \frac{x+y}{2}$ et $q = \frac{x-y}{2}$ de sorte $x = p + q$ et $y = p - q$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} e^{ix} + e^{iy} = -1 &\iff e^{i(p+q)} + e^{i(p-q)} = -1 \iff e^{ip}\left(e^{iq} + e^{-iq}\right) = -1 \\ &\iff 2\cos q e^{ip} = -1 \\ &\iff \begin{cases} 2\,|\cos(q)| = 1 \\ \arg(\cos q) + p = \pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} q = \frac{\pi}{3} \\ p = \pi \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} q = \frac{2\pi}{3} \\ \pi + p = \pi \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} q = \frac{-\pi}{3} \\ p = \pi \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} q = \frac{-2\pi}{3} \\ \pi + p = \pi \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient ainsi les solutions :

$$\begin{cases} x = \frac{4\pi}{3} \\ y = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \\ y = \frac{-2\pi}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \\ y = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{-2\pi}{3} \\ y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

En examinant ces solutions et en tenant compte des égalités aux multiples de 2π près, on retrouve bien les deux solutions géométriques précédemment obtenues :

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \\ y = \frac{-2\pi}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{-2\pi}{3} \\ y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Planche n° 10: Géométrie dans l'espace

Dans toute la feuille, sauf indication contraire, l'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Exercice 1

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ quatre vecteurs. Calculer $\det(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{w}, \vec{u} \wedge \vec{t})$.

Exercice 2

Déterminer une base orthonormale directe dont le premier vecteur est colinéaire au vecteur $(-1, 2, -2)$.

Exercice 3

Pour quelles valeurs de a les vecteurs $(1, 0, a), (a, 1, 0)$ et $(0, a, 1)$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne ainsi qu'une représentation paramétrique du plan considéré :

1. $\mathcal{P}_1$ est le plan passant par le point $A(4, 3, 2)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u_1}(1, 1, -2)$ et $\vec{v_1}(-1, 3, 0)$;
2. $\mathcal{P}_2$ est le plan passant par le point $B(5, 7, -1)$ et orthogonal au vecteur $\vec{u_2}(2, 3, 3)$;
3. $\mathcal{P}_3$ est le plan passant par les les points $C(-4, 1, 2)$, $D(-1, -1, -1)$ et $E(0, 2, -1)$;
4. $\mathcal{P}_4$ est le plan dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2 + \lambda - 2\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = 1 + 2\lambda + \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$

Exercice 5

1. Les points $A(-4, 1, 2)$, $B(-1, -1, -1)$, $C(0, 2, -1)$ et $D(-5, 2, 0)$ sont-ils coplanaires ?
2. Les points $E(-4, 1, -2)$, $F(1, -1, 1)$ et $G(11, -5, 7)$ sont-ils alignés ?

Exercice 6

Calculer le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$ dans les cas suivants :

1. A est le point de coordonnées $(1, 2, 1)$ et $\mathcal{P}$ est le plan passant par $B(-1, -1, -1)$ et dirigé par $\vec{u}(-2, 1, 2)$ et $\vec{v}(3, 1, 0)$;
2. A est le point de coordonnées $(-3, 1, 0)$ et $\mathcal{P}$ est le plan passant par $C(-1, 4, 2)$ et orthogonal à $\vec{w}(-2, 3, 1)$;
3. A est le point de coordonnées $(1, 0, 3)$ et $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne $3x + 3y - 2z + 6 = 0$.

Exercice 7

Dans chacun des cas suivant, dire si les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles et, si c'est le cas, calculer la distance qui les sépare :

1. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont respectivement les plans d'équations $3x + 4y + 3z + 1 = 0$ et $3x + 4y + 4z + 1 = 0$.
2. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont respectivement les plans d'équations $3x + 3y + 3z + 1 = 0$ et $3x + 3y + 3z + 3 = 0$.
3. $\mathcal{P}_1$ passe par $A_1(1, 1, 1)$, $\mathcal{P}_2$ passe par $A_2(3, 1, 1)$ et $\vec{u}(1, 1, 1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, déterminer un système d'équations cartésiennes ainsi qu'une représentation paramétrique de la droite considérée :

1. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par le point $A(4,-3,2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u_1}(3,1,-2)$;
2. $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par le point $B(5,0,-1)$ et orthogonale au plan d'équation $x-y+z-1=0$;
3. $\mathcal{D}_3$ est la droite passant par les les points $C(-4,1,2)$ et $D(-1,-1,-1)$.
4. $\mathcal{D}_4$ est la droite égale à l'intersection des plans d'équations $2x-y+z+2=0$ et $x-y-z-1=0$.

Exercice 9

Calculer le projeté orthogonal du point $M(1,3,-2)$ sur la droite $(D) : \left\{ \begin{array}{rl} x+y+z-2 & =0 \\ 2x+y-5z & =0 \end{array} \right.$.

Exercice 10

1. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $A(-1,0,3)$ sur la droite passant par $B(1,1,1)$ et dirigée par $\vec{u}(-1,2,3)$.
2. Déterminer les coordonnées du symétrique du point $B(-1,2,-1)$ par rapport au plan d'équation $x+2y-3z+1=0$.
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $M(\alpha,\beta,\gamma)$ sur le plan passant par $A(1,2,3)$, $B(0,1,5)$ et $C(2,3,4)$.

Exercice 11

Soient (D_1) et (D_2) les droites $(D_1) : \left\{ \begin{array}{rl} x+y & =2 \\ y-2z & =3 \end{array} \right.$ et $(D_2) : \left\{ \begin{array}{rl} x+y+z & =1 \\ x-2y+3z & =a \end{array} \right.$.

1. (D_1) et (D_2) sont-elles parallèles ?
2. Déterminer a pour qu'elles soient coplanaire. Donner alors les coordonnées du point d'intersection de (D_1) et (D_2) et une équation du plan contenant (D_1) et (D_2).

Exercice 12

Déterminer une équation cartésienne des sphères suivantes :

1. la sphère $\mathcal{S}_1$ de centre $\Omega(1,3,-1)$ et de rayon 5 ;
2. la sphère $\mathcal{S}_2$ de diamètre $[A,B]$ avec $A(3,5,0)$ et $B(-1,1,1)$.

Exercice 13

Soient $\mathcal{S}$ la sphère de centre O et de rayon 5 et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+\sqrt{8}y-4z+12=0$.

1. Déterminer une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par O et orthogonale à $\mathcal{P}$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de la droite $\mathcal{D}$ et de la sphère $\mathcal{S}$.
3. Déterminer une équation des plans tangents à la sphère aux points A et B.

Exercice 14

Déterminer une équation cartésienne de la sphère contenant les cercles d'équations $\left\{ \begin{array}{l} z=0 \\ x^2+y^2=9 \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} z=2 \\ x^2+y^2=25 \end{array} \right.$.

Exercice 15

Montrer qu'il existe une unique sphère contenant les cercles d'équations cartésiennes respectives : $\begin{cases} x = 1 \\ y^2 + z^2 - 4y = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$. En déterminer une équation cartésienne.

Exercice 16

Soient A et B deux points distincts. Montrer que l'ensemble des points M tels que $AM = BM$ forme un plan dont on précisera un point et un vecteur normal.
Indication: On pourra par exemple raisonner sur le triangle ABM

Exercice 17

Écrire les fonctions Python suivantes :

- `produit_scal` qui prend en entrée deux listes, correspondant aux coordonnées de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé, et qui renvoie la valeur de $\vec{u} \cdot \vec{v}$;
- `norm` qui prend en entrée une liste, correspondant aux coordonnées de $\vec{u}$ dans un repère orthonormé, et qui renvoie la valeur de $\|\vec{u}\|$;
- `produit_vect` qui prend en entrée deux listes, correspondant aux coordonnées de deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ dans un repère orthonormé direct, et qui renvoie les coordonnées du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$;
- `aire` qui prend en entrée trois listes, correspondant aux coordonnées de trois points A, B et C dans un repère orthonormé, et qui renvoie l'aire du triangle ABC ;
- `equation` qui prend en entrée trois listes, correspondant aux coordonnées de trois points A, B et C dans un repère orthonormé, et qui renvoie, si possible, les coefficients a, b, c et d de l'équation cartésienne $ax + by + cz = d$ du plan $(A;\ B;\ C)$

Corrigé de la planche n° 10: Géométrie dans l'espace

Exercice 1

Ce déterminant est nul. Pour le prouver, on va faire une disjonction de cas :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ donc le déterminant est nul ;
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires mais que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{w}$ sont colinéaires. Ainsi, le déterminant est également nul ;
- Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires, alors ces trois vecteurs forment une base. Ainsi, il existe trois nombres λ, μ et ν tel que
$$\vec{t} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w}$$
Ainsi, $\vec{u} \wedge \vec{t} = \mu\vec{u} \wedge \vec{v} + \nu\vec{u} \wedge \vec{w}$.
En exploitant la trilinéarité du déterminant, il vient :
$$\begin{aligned}\det(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{w}, \vec{u} \wedge \vec{t}) &= \mu \det(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{w}, \vec{u} \wedge \vec{v}) + \nu \det(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{w}, \vec{u} \wedge \vec{w}) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Exercice 3

Une condition nécessaire et suffisante de coplanarité est que le déterminant de ces trois vecteurs est nul. Après calcul, cela donne la condition
$$a^3 + 1 = 0 \iff a = -1$$

Exercice 4

Voici les solutions pour les équations cartésiennes.

1. On obtient
$$3x + y + 2z = 19$$
2. On obtient
$$2x + 3y + 3z = 28$$
3. On obtient
$$9x - 3y + 11z = -17$$
4. On obtient
$$-x - 5y + 3z = 1$$

Exercice 5

Il faut utiliser le déterminant (critère de coplanarité) et le produit vectoriel (critère de colinéarité).

Exercice 6

1. Notons $A'\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ce point.

   A' appartient au plan et $\overrightarrow{AA'}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

   Il existe donc deux nombres $(s;\ t) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\begin{cases} x = -1 - 2s + 3t \\ y = -1 + s + t \\ z = -1 + 2s \end{cases}$$

   D'autre part on calcule $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}-2-2s+3t\\-3+s+t\\-2+2s\end{pmatrix}$. Les conditions $\overrightarrow{AA'}\cdot\vec{u} = 0$ et $\overrightarrow{AA'}\cdot\vec{v} = 0$ donnent, après calcul, le système :

$$\begin{cases} -2(-2-2s+3t) + (-3+s+t) + 2(-2+2s) = 0 \\ 3(-2-2s+3t) + (-3+s+t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 9s - 5t = 3 \\ -5s + 10t = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} s = \frac{15}{13} \\ t = \frac{96}{65} \end{cases}$$

   On obtient ainsi $A'\begin{pmatrix}73/65\\106/65\\17/13\end{pmatrix}$.

2. Notons $A'\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ce projeté. On sait que $\overrightarrow{AA'}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires donc il existe t tel que :

$$\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = t \end{cases}$$

   D'autre part, le point appartient au plan ce qui signifie que $\overrightarrow{CA'}\cdot\vec{w} = 0$.

   On calcule $\overrightarrow{CA'}\begin{pmatrix}-2-2t\\-3+3t\\-2+t\end{pmatrix}$. Ainsi la condition d'appartenance au plan s'écrit :

$$-2(-2-2t) + 3(-3+3t) + (-2+t) = 0 \iff 14t = 7 \iff t = \frac{1}{2}$$

   Finalement, on obtient $A'\begin{pmatrix}-4\\5/2\\1/2\end{pmatrix}$

3. Même principe.

   On détermine une équation paramétrique de la droite passant par A et orthogonale au plan :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 3 - 2t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}$$

   Ensuite, la condition d'appartenance au plan permet de calculer t :

$$3(3t+1) + 3\times 3t - 2(-2t+3) - 6 = 0 \iff 22t = 9 \iff t = \frac{9}{22}$$

   Ce qui donne les coordonnées du projeté orthogonal $\begin{pmatrix}49/22\\27/22\\24/11\end{pmatrix}$.

Exercice 7

1. Les vecteurs normaux des deux plans (obtenus depuis les équations cartésiennes) sont non colinéaires.
   Les deux plans ne sont donc pas parallèles.
2. Les deux vecteurs normaux sont colinéaires donc les plans sont parallèles.
   On calcule un point A_2 appartenant à $\mathcal{P}_2$.
$$A_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   On utilise ensuite la formule de la distance entre A_2 et $\mathcal{P}_1$. On obtient :
$$\frac{2\sqrt{3}}{9}$$
3. Les deux plans ont le même vecteur normal, ils sont donc parallèles.
   Pour déterminer leur distance, on calcule
$$\frac{\left|\vec{u} \cdot \overrightarrow{A_1A_2}\right|}{\|\vec{u}\|} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Exercice 8

1. Une équation paramétrique est
$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -3 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$
   Pour trouver le système d'équation cartésienne, il suffit de substituer t par $y + 3$.
   On obtient
$$\begin{cases} x = 4 + 3y + 12 \\ z = 2 - 2y - 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y = 16 \\ z + 2y = -4 \end{cases}$$
2. Un vecteur directeur de la droite est un vecteur normal du plan. On obtient donc une équation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}$$
   Avec la même technique que précédemment on obtient un système d'équations cartésiennes
$$\begin{cases} x = 5 - y \\ z = -1 - y \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 5 \\ z + y = -1 \end{cases}$$
3. Un vecteur directeur est $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. On obtient une équation paramétrique :
$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$
   Avec la même technique que précédemment on obtient un système d'équations cartésiennes (on substitue t par $\dfrac{1-y}{2}$
$$\begin{cases} 2x = -2 + 3 - 3y \\ 2z = -2 - 3 + 3y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 2z - 3y = -5 \end{cases}$$

4. Le système d'équation est obtenu directement

$$\begin{cases} 2x - y + z + 2 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

En faisant $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$, on obtient

$$\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

En faisant $L_1 \longleftarrow L_1 - \dfrac{1}{2}L_2$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + z = -\frac{3}{2} \\ 3x - 2y = -1 \end{cases}$$

On peut donc exprimer z et y en fonction de x :

$$\begin{cases} z = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x \\ y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x \end{cases}$$

En posant $x = t$, on a ainsi l'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \\ z = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \end{cases}$$

Exercice 9

On détermine une équation paramétrique de cette droite, grâce à la célèbre méthode de l'escroc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \quad (L_1) \\ 2x + y - 5z = 0 \quad (L_2) \end{cases} &\iff \begin{cases} x + y + z = 2 \quad (L_1) \\ -y - 7z = -4 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 6z = -2 \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ y + 7z = 4 \quad (L_2 \leftarrow -L_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -2 + 6t \quad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ y = 4 - 7t \quad (L_2 \leftarrow -L_2) \\ z = t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Cela permet d'extraire un vecteur directeur $\vec{d}\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ de la droite.

Pour obtenir le projeté orthogonal M', on cherche ainsi t tel que $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{d} = 0$.

On calcule $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} -3 + 6t \\ 1 - 7t \\ 2 + t \end{pmatrix}$. Ainsi t vérifie :

$$6(-3 + 6t) - 7(1 - 7t) + (2 + t) = 0 \iff 86t = 23 \iff t = \frac{23}{86}$$

Ce qui donne $M'\begin{pmatrix} -17/43 \\ 183/86 \\ 23/86 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

1. Le projeté A' vérifie :
   - A' est sur la droite $(B;\vec{u})$;
   - $\overrightarrow{AA'}\cdot\vec{u}=0$

   Il faut donc déterminer une équation paramétrique de la droite $(B;\vec{u})$ puis écrire la seconde condition.
   Cela donne une unique équation portant sur un paramètre.
   Après résolution, on obtient :
   $$\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\ \frac{13}{7}\\ \frac{16}{7}\end{pmatrix}$$

2. Le symétrique B' vérifie :
   - $\overrightarrow{BB'}$ est orthogonal au plan, c'est à dire que B' est sur la droite passant par B et dirigée par un vecteur normal du plan ;
   - $m[BB']$ est sur le plan.

   La première condition se traduit sous forme d'équation paramétrique :
   $$\begin{cases}x=-1+t\\ y=2+2t\\ z=-1-3t\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$$
   Les coordonnées du milieu de $[BB']$ sont
   $$m[BB']\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2+t\\ 4+2t\\ -2-3t\end{pmatrix}$$
   La seconde condition donne donc l'équation sur t :
   $$\frac{1}{2}(-1+t)+2\times\frac{1}{2}(2+2t)-3\times\frac{1}{2}(-1-3t)+1=0$$
   Après résolution, on obtient
   $$B'\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$$

3. On commence par déterminer un vecteur normal de ce plan. On calcule :
   $$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$$
   Ainsi, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}0$ est un vecteur normal du plan.

   On cherche ensuite le point $M'\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ tel que :
   - M' est sur la droite $(M;\ \vec{n})$;
   - M' est dans le plan.

   On commence à avoir l'habitude des équations paramétriques et des conditions d'appartenance à un plan.
   On cherche donc directement à résoudre le système suivant dont x, y, z et λ sont les inconnues.
   $$\begin{cases}x=\alpha-\lambda\\ y=\beta+\lambda\\ z=\gamma\\ -(x-1)+(y-2)=0\end{cases}$$

On obtient :

$$M'\begin{pmatrix}(\alpha+\beta-1)/2\\(\alpha+\beta+1)/2\\\gamma\end{pmatrix}$$

Exercice 11

1. Pour déterminer un vecteur directeur de (D_1), on peut utiliser la méthode de l'escroc ou bien utiliser les deux vecteurs normaux des deux plans.
   Une direction de (D_1) est donnée par le produit vectoriel de ces deux vecteurs.
   On obtient ainsi un vecteur directeur de (D_1) :

$$\vec{d_1}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

   Avec la même technique, on détermine un vecteur directeur de (D_2) :

$$\vec{d_2}\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix}$$

   Il est clair que ces deux vecteurs sont non colinéaires.
   Donc (D_1) et (D_2) sont non parallèles.
2. On sait que ces droites sont non parallèles. Donc elles sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes.
   Il convient donc de résoudre le système :

$$\begin{cases}x+y=2\\y-2z=3\\x+y+z=1\\x-2y+3z=a\end{cases}$$

   En faisant $L_3 \longleftarrow L_3-L_1$, puis $L_4 \longleftarrow L_4-L_1$ il vient :

$$\begin{cases}x+y=2\\y-2z=3\\z=-1\\-3y+3z=a-2\end{cases}$$

   En faisant maintenant $L_4 \longleftarrow L_4+3L_2$, on obtient :

$$\begin{cases}x+y=2\\y-2z=3\\z=-1\\-3z=a-2+9\end{cases}$$

   Enfin, en faisant $L_4 \longleftarrow L_4+3L_3$, on obtient :

$$\begin{cases}x+y=2\\y-2z=3\\z=-1\\0=a+4\end{cases}$$

   Finalement, ce système n'a de solutions que pour $a=-4$.

Dans ce cas, on obtient le point d'intersection des deux droites, après résolution du système :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Un vecteur normal du plan est donc $\vec{n} = \vec{d_1} \wedge \vec{d_2}\begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix}$.

Finalement, l'équation cartésienne du plan est

$$4x + y + 6z = -1$$

Exercice 12

1. C'est une application directe de la formule. L'équation est :

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 25$$

2. Il y a deux approches possibles. On peut calculer le milieu de $[AB]$ puis le rayon $\dfrac{AB}{2}$ et appliquer la formule. Ou bien, on peut utiliser l'équivalence suivante :

$$M \in \mathcal{S}_2 \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

Les deux approches donnent les deux équations équivalentes :

$$(x-3)(x+1) + (y-5)(y-1) + z(z-1) = 0 \iff (x-1)^2 + (y-3)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{33}{4}$$

En utilisant ce que l'on sait sur les formes canoniques, on peut montrer l'équivalence :

$$(x-3)(x+1) + (y-5)(y-1) + z(z-1) = 0 \iff (x-1)^2 + (y-3)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{33}{4}$$

On retrouve ainsi le centre de la sphère $\begin{pmatrix}1\\3\\1/2\end{pmatrix}$ et le rayon $\dfrac{\sqrt{33}}{2}$ obtenu grâce à la première approche.

Exercice 13

1. Son vecteur directeur est un vecteur normal de (P). On obtient donc aisément l'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{8}t \\ z = -4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

2. L'équation de la sphère est $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Il faut donc maintenant résoudre le système pour déterminer les éventuelles intersections :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{8}t \\ z = -4t \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$$

Par substitution la dernière équation donne une équation du second degré sur t :

$$t^2 + 8t^2 + 16t^2 = 25 \iff t^2 = 1 \iff t \in \{-1;\ 1\}$$

On en déduit les coordonnées des deux points $A\begin{pmatrix}1\\\sqrt{8}\\-4\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{8}\\4\end{pmatrix}$.

3. Ces deux plans notés (P_a) et (P_b) contiennent respectivement les points A et B et ont tous les deux pour vecteur normal $\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{8}\\ -4\end{pmatrix}$ puisque $[AB]$ est un diamètre de la sphère. On en déduit les équations des deux plans :

$$\begin{cases}(x-1)+\sqrt{8}\left(y-\sqrt{8}\right)+4(z+4)=0 & (P_a)\\ (x+1)+\sqrt{8}\left(y+\sqrt{8}\right)+4(z-4)=0 & (P_b)\end{cases} \iff \begin{cases}x+\sqrt{8}y+4z=-7 & (P_a)\\ x+\sqrt{8}y+4z=7 & (P_b)\end{cases}$$

Exercice 14

On note (C_1) et (C_2) ces cercles qui sont contenus dans les plans $z=0$ et $z=2$. Leurs centres respectifs sont $A_1\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $A_2\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ et leurs rayons respectifs sont 3 et 5.

Les deux plans ont le même vecteur normal $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ donc le centre de la sphère est situé sur l'axe (OZ).

Ainsi, il existe un réel t tel que les coordonnées du centre Ω sont $\begin{pmatrix}0\\0\\t\end{pmatrix}$.

Considérons un plan de coupe (n'importe lequel), contenant la droite (A_1A_2). On note M_1 une intersection du premier cercle avec ce plan et M_2, une intersection du second cercle avec ce plan.
Par le théorème de Pythagore, le rayon R de la sphère vérifie $R^2=\Omega A_1^2+A_1M_1^2=t^2+9$ et $R^2=\Omega A_2^2+A_2M_2^2=(t-2)^2+25$. On obtient donc :

$$(t-2)^2+25=t^2+9 \iff t^2-4t+29=t^2+9 \iff t=5$$

Finalement les coordonnées du centre Ω de la sphère sont $\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$.

Le rayon de la sphère vaut $R=\sqrt{A_1\Omega^2+A_1M^2}=\sqrt{34}$.

L'équation cartésienne de la sphère est donc :

$$x^2+y^2+(z-5)^2=34$$

Exercice 15

Notons respectivement $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ces cercles.
Supposons que cette sphère existe. Il s'agit dans un premier temps de déterminer son centre. Or, lorsqu'on intersecte une sphère par un plan $\mathcal{P}$, la droite qui passe par le centre du cercle de cette intersection et le centre de la sphère est orthogonal au plan $\mathcal{P}$.
Fort de cette remarque, on va déterminer

- l'équation de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par le centre de $\mathcal{C}_1$ et orthogonale au plan $x=1$;
- l'équation de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par le centre de $\mathcal{C}_2$ et orthogonale au plan $z=1$.

En utilisant les résultats sur la forme canonique, on détermine le centre de $\mathcal{C}_1$ noté $O_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et le centre de $\mathcal{C}_2$ noté $O_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

On obtient donc les équations de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$:

$$\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=2\\ z=0\end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}\ (\mathcal{D}_1) \qquad \begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=1+\lambda\end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}\ (\mathcal{D}_1)$$

Donc, si la sphère existe, son centre est forcément le point

$$\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Toujours selon cette même hypothèse d'existence de la sphère unique, on doit donc avoir les deux équivalences :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y^2 + z^2 - 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$$

Il s'agit donc de trouver R^2. Exploitons la première équivalence. $x = 1 \iff (x-1)^2 = 0$ donc on peut directement identifier R.
En effet : $y^2 + z^2 - 4y = 0 \iff (y-2)^2 + (z-0)^2 = 4$. On obtient ainsi $R = 2$. Sous ces conditions, on a bien :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y^2 + z^2 - 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Reste à voir si la seconde équivalence fonctionne sous ces conditions. Mais $z = 1$ entraîne $z^2 = 1$. On a donc, en exploitant les résultats sur la forme canonique :

$$\begin{aligned} \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 + z^2 + 2 = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = 1 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 - 4 - 1 + 2 = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = 1 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Le cercle $\mathcal{C}_2$ est donc bien à l'intersection de la sphère de centre Ω et de rayon 2 et du plan $z = 1$.
Finalement cette sphère contient bien les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Planche n° 11: Remédiation pour le calcul

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $(x+1)^2 = 3(x+1)$

b) $x^2 + x \geq -1$

c) $(x+3)^2 \geq \frac{1}{4}(x-1)^2$

d) $x^3 \geq 3x^2 + 2x$

e) $\frac{1}{(x-3)} < \frac{(x+1)}{(x-3)^2}$

f) $\frac{6}{(x+1)^2} \geq \frac{1}{(x-1)}$

g) $\sqrt{x^2-4} = (x-2)$

h) $\sqrt{x^2+3x-4} \leq (x-5)$

i) $|x+2| = 4$

j) $\left|x^2+2x\right| \leq 3$

k) $\left|x^2-5x\right| \geq 3x$

l) $\sqrt{x^2-x-5} \geq x-3$

m) $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} \geq 3$

n) $|x+3| \leq x-1$

o) $\frac{3}{(x-1)^2} \leq -1$

p) $\frac{|x+1|}{x-1} < 4$

Exercice 2

Soient $(a;\ b;\ c;\ d;\ m) \in \mathbb{R}^5$. Résoudre les inéquations suivantes :

a) $ax + b \geq c$

b) $(ax+b)^2 = m$

c) $x + m = \frac{1}{x}$

d) $\frac{ax+b}{cx+d} = 1$

Exercice 3

Résoudre :

a) $\cos(x) = \sin(x)$

b) $\sin(x) = \sin(2x)$

c) $\sin(2x) = \cos(5x)$

d) $\tan(x) = -\sqrt{3}$

e) $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$

f) $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$

g) $\sin^2(x) - \frac{3}{2} \geq 0$

h) $\sin(x) = \tan(x)$

i) $\cos(x) + 2\sin(x) = 1$

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes, si elles existent

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x^2}{x-\ln(x)}\right) \qquad \lim_{x\to+\infty} \arcsin\left(\frac{x^2-x}{x^2+\ln(x)}\right) \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3-1} - \sqrt{x^2+x}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} \frac{x^3+x}{x^2\ln(x)+\sqrt{x}\ln(x)} \qquad \lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2}{x+1}\right) + \sin(\pi x) \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{\cos(\mathrm{e}^x)-1}{\mathrm{e}^x}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-1} \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) \qquad \lim_{x\to+\infty} \cos(x)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Exercice 5

1. Étudier la fonction $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \ln(x)$: domaines, parité et périodicités éventuelles, variations, limites aux bornes de l'ensemble de définition.
2. Étudier la fonction $f_2 : x \mapsto \ln(|\cos x|)$: domaines, parité et périodicités éventuelles, variations, limites aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Étudier la fonction $f_3 : x \mapsto \ln(1 + e^x) - x$: domaines, parité et périodicités éventuelles, variations, limites aux bornes de l'ensemble de définition.
4. On veut étudier la fonction $f_4 : x \mapsto x \mapsto \sin^2(x) + x$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tout x, $f_4(x + \pi) = f_4(x) + \pi$.
   (b) Que peut-on en déduire concernant la courbe de cette fonction ?
   (c) Étudier la fonction sur $[0;\ \pi]$ puis tracer l'allure de la courbe sur $[-2\pi;\ 2\pi]$.
5. On veut étudier la fonction $f_5 : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   (a) Déterminer la parité éventuelle de f_5.
   (b) Déterminer les limites de f_5 en 0 et $+\infty$.
   (c) Prouver que, pour tout $x > 0$, $-x \leq f_5(x) \leq x$.
   (d) Prouver que, pour tout $x \neq 0$, $f_5'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$.
   (e) Pour étudier le signe de f_5', on pose $\varphi : X \mapsto \sin(X) - X\cos(X)$.
      i. Déterminer le tableau de variations de φ sur $[0;\ \pi]$.
      ii. En déduire que, pour tout $x > \dfrac{1}{\pi}$, $f_5'(x) > 0$.
   (f) Déterminer les solutions positives des équations $f_5(x) = 0$, $f_5(x) = x$, $f_5(x) = -x$.
   (g) À partir des éléments qui précèdent tracer l'allure de la courbe de f_5.
6. On veut étudier la fonction $f_6 : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.
   (a) Déterminer les domaines, les parités et périodicités éventuelles, les variations, les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   (b) Montrer que f_6 est en fait une fonction bien connue.

Corrigé de la planche n° 11: Remédiation pour le calcul

Exercice 1

a) Annuler l'un des membres et factoriser. On obtient : $\{-1;\ 2\}$

b) Annuler l'un des membres et chercher le signe à l'aide du discriminant. On obtient $\mathbb{R}$.

c) Annuler l'un des membres et factoriser puis chercher le signe à l'aide d'un tableau de signes ou des résultats sur le second degré. On obtient : $]-\infty;\ -7] \cup \left[\frac{-5}{3};\ +\infty\right[$

d) Annuler l'un des membres et factoriser puis chercher le signe à l'aide d'un tableau de signes. On obtient : $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2};\ 0\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{17}}{2};\ +\infty\right[$.

e) Annuler l'un des membres, réduire au même dénominateur, puis déterminer le signe. On obtient : $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

f) Annuler l'un des membres, réduire au même dénominateur, puis déterminer le signe. On obtient : $]-\infty;\ 1[\setminus \{-1\}$

g) Étudier le domaine de validité de l'expression puis raisonner par implications successives. À la fin, vérifier la validité de la solution. On obtient : $\{2\}$

h) Étudier le domaine de validité de l'expression puis faire une disjonction de cas sur le signe de $(x-5)$. On obtient $\varnothing$.

i) Utiliser l'équivalence suivante $|y| = 4 \iff y = 4$ ou $y = -4$. On obtient, en prenant la réunion des solutions des deux équations, $\{2;\ -6\}$

j) Utiliser l'équivalence suivante $|y| \leq 3 \iff y \leq 3$ et $y \geq -3$. On obtient en prenant l'intersection des solutions des deux inéquations, $[-3;\ 1]$.

k) Utiliser la définition de valeur absolue en tant que racine. On obtient $]-\infty;\ 2] \cup [8;\ +\infty[$.

l) On vérifie le domaine de validité puis on fait une disjonction de cas sur le signe de $x-3$.
On obtient $\left]-\infty;\ \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{21}}{2};\ +\infty\right[$.

m) Toujours avec les mêmes techniques, on obtient $\left]2;\ \frac{19}{8}\right]$.

n) Même technique, on obtient $\varnothing$. On aurait pu s'en douter car, pour tout x,
$|x+3| \geq x+3 > x-1$.

o) Cette inéquation n'a pas de solutions puisque, pour tout $x \neq 1$, $\frac{3}{(x-1)^2} \geq 0$.

p) Après d'affreux calculs, on obtient $]-\infty;\ 1[\cup \left]\frac{5}{3};\ +\infty\right[$.

Voici les instructions `XCas` permettant de vérifier les résultats des dix premières.

Console

```
resoudre((x+1)^2=3*(x+1),x)
```

$$[-1, 2]$$

```
resoudre(x^2+x >= -1,x)
```

$$[x]$$

```
resoudre((x+3)^2 >= (1/4)*(x-1)^2,x)
```

$$[x \leq -7, x \geq \frac{-5}{3}]$$

```
resoudre(x^3 >= 3x^2+2x, x)
```

$$[((x>=(1/2*(3-sqrt(17)))) \text{ and } (x<=0)), x \geq (\frac{1}{2}(3+\sqrt{17}))]$$

```
resoudre(1/(x-3) < (x+1)/((x-3)^2),x)
```

$$[x < 3, x > 3]$$

```
resoudre(6/((x+1)^2) >= 1/(x-1),x)
```

$$[x < -1, ((x>-1) \text{ and } (x<1))]$$

```
resoudre(sqrt(x^2-4) =(x-2),x)
```

$$[2]$$

```
resoudre(sqrt(x^3+3*x-4)<=(x-5),x)
```

$$[]$$

```
resoudre(abs(x^2+2*x)<=3,x)
```

$$[((x>=-3) \text{ and } (x<=1))]$$

```
?
```

Exercice 2

a) Il faut discuter a :
   - Pour $a = 0$, on obtient $\mathbb{R}$ dans le cas où $b \geq c$ et $\varnothing$ dans le cas contraire.
   - Pour $a > 0$, on obtient $\left[\frac{c-b}{a};\ +\infty\right[$.
   - Pour $a < 0$, on obtient $\left]-\infty;\ \frac{c-b}{a}\right]$.

b) Ici, il faut discuter m :
   - Dans le cas où $m < 0$, il n'y a pas de solutions.
   - Dans le cas où $m \geq 0$, on doit résoudre $ax + b = \sqrt{m}$ et $ax + b = -\sqrt{m}$. Il faut maintenant discuter a
     - Dans le cas où $a = 0$, tous les réels sont solutions pour $b = m$ ou $b = -\sqrt{m}$ mais aucun réel n'est solution pour $b \neq \sqrt{m}$ et $b \neq -\sqrt{m}$.
     - Dans le cas où $a \neq 0$, l'équation admet comme solutions : $\dfrac{\sqrt{m}-b}{a}$ et $\dfrac{-\sqrt{m}-b}{a}$. Ces deux solutions sont éventuellement confondues pour $m = 0$.

c) Cette expression existe pour $x \neq 0$. D'autre part, pour tout $x \neq 0$, on a :

$$x + m = \frac{1}{x} \iff x^2 + mx - 1 = 0$$

On calcule le discriminant $m^2 + 4 > 0$. Il y a donc deux solutions distinctes $\dfrac{-m+\sqrt{m^2+4}}{2}$ et $\dfrac{-m-\sqrt{m^2+4}}{2}$. On vérifie que ces deux solutions sont bien non nulles.
En effet, il est impossible d'avoir $-m + \sqrt{m^2+4} = 0$ car $\sqrt{m^2+4} > |m|$.
Et il est également impossible d'avoir $-m - \sqrt{m^2+4} = 0$ pour la même raison.

d) Discutons du domaine de définition de l'expression. Il faut donc résoudre $cx + d = 0$ et donc discuter c :
   - Dans le cas où $c = 0$. Pour $d = 0$, l'expression n'est valide pour aucune valeur de x et pour $d \neq 0$, l'expression est toujours valide. Ainsi, pour $c = 0$ et $d \neq 0$, on va résoudre $\frac{ax+b}{d} = 1 \iff ax + b = d$. Dans ce cas, il faut discuter a.
     - Pour $a = 0$, tous les réels sont solutions lorsque $b = d$ et aucun réel n'est solution pour $b \neq d$.
     - Pour $a \neq 0$, il y a une unique solution : $\dfrac{d-b}{a}$.

- Dans le cas où $c \neq 0$, l'expression est valide pour $x \neq \dfrac{-d}{c}$. On raisonne donc pour tout $x \neq \dfrac{-d}{c}$. On a alors $\frac{ax+b}{cx+d} = 1 \iff ax+b = cx+d \iff (a-c)x = d-b$. Ici, il faut de nouveau faire une disjonction :
  - Pour $a = c$, tous les réels sauf $\dfrac{-d}{c}$ sont solutions dans le cas où $d = b$ et aucun réel n'est solution dans le cas où $d \neq b$.
  - Pour $a \neq c$, il y a une unique solution $\dfrac{d-b}{a-c}$. Il faut tout de même vérifier si cette solution n'est pas égale à $\dfrac{-d}{c}$. Pour ce faire, on va résoudre $\dfrac{d-b}{a-c} = \dfrac{-d}{c} \iff c(d-b) = -d(a-c) \iff da-cb = 0$. Finalement, cette solution n'est valide que lorsque $da - cb \neq 0$. Dans le cas contraire, il n'y a pas de solutions.

Les précautions prises dans ce raisonnement peuvent paraître exagérées pourtant elles sont nécessaires. Prenons un exemple pour illustrer le dernier cas, la résolution de :

$$\frac{2x+1}{4x+2} = 1$$

Ici, on est dans le cas où $c \neq 0$ et où $a \neq c$ mais où $ad = bc$. Si on ne faisait pas attention, on obtiendrait par équivalences :

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{4x+2} = 1 &\iff 2x+1 = 4x+2\\ &\iff x = \frac{-1}{2}\end{aligned}$$

Mais $\dfrac{-1}{2}$ ne convient pas (car il annule le dénominateur) !

Exercice 3

a) Pour tout x :

$$\begin{aligned}\cos(x) = \sin(x) &\iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \text{ ou } x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } 0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\end{aligned}$$

On obtient donc sur $]-\pi;\ \pi]$ les solutions $\left\{\frac{\pi}{4};\ \frac{-3\pi}{4}\right\}$.

b) Pour tout x :

$$\begin{aligned}\sin(x) = \sin(2x) &\iff \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2x = x + 2k\pi \text{ ou } 2x = \pi - x + 2k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = 2k\pi \text{ ou } 3x = \pi + 2k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\end{aligned}$$

On obtient donc sur $]-\pi;\ \pi]$ les solutions $\left\{0;\ \frac{\pi}{3};\ \pi;\ \frac{-\pi}{3}\right\}$.

c) Pour tout x :

$$\begin{aligned}\sin(x) = \cos(5x) &\iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(5x)\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}/\ \frac{\pi}{2} - x = 5x + 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} - x = -5x + 2k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}/\ 6x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \text{ ou } 4x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{12} - \frac{k\pi}{3}\pi \text{ ou } x = \frac{-\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\end{aligned}$$

On obtient donc sur $]-\pi;\ \pi]$ les solutions
$\left\{\frac{\pi}{12};\ \frac{5\pi}{12};\ \frac{9\pi}{12};\ \frac{-3\pi}{12};\ \frac{-7\pi}{12};\ \frac{-11\pi}{12};\ \frac{-\pi}{8};\ \frac{-5\pi}{8};\ \frac{3\pi}{8};\ \frac{7\pi}{8}\right\}$.

d) On obtient sur $\left]\frac{-\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ la solution $x = \frac{-\pi}{3}$.
Toutes les solutions se déduisent à partir de la périodicité de tangente (de période π).

e) Pour tout x :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} \iff \cos(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On obtient donc sur $]-\pi;\ \pi]$ les solutions $\left\{\frac{\pi}{4};\ \frac{-\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4};\ \frac{-3\pi}{4}\right\}$

f) Les solutions sur $]-\pi;\ \pi]$ sont $\left[\frac{-\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right]$.

g) Pour tout x, on a :

$$\sin^2(x) - \frac{3}{2} \geq 0 \iff \sin^2(x) \geq \frac{3}{2}$$

Or, pour tout x, $|\sin(x)| \leq 1$, ce qui donne $\sin^2(x) \leq 1 < \dfrac{3}{2}$. En effet, sinus est borné par -1 et 1.
Ainsi, cette inéquation n'a pas de solutions !

h) Pour tout $x \notin \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \text{avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$\begin{aligned}
\sin(x) = \tan(x) &\iff \frac{\sin(x)\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x)} = 0 \\
&\iff \frac{\sin(x)\,(\cos(x) - 1)}{\cos(x)} = 0 \\
&\iff \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = 1
\end{aligned}$$

On obtient donc les solutions 0 et π aux multiples de 2π près.

i) On utilise la tangente de l'angle moitié. $x = \pi$ n'est pas solution.
Pour tout x de $]-\pi;\ \pi[$, on pose $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On résout ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{1-u^2}{1+u^2} + 2 \times \frac{2u}{1+u^2} = 1 &\iff \frac{1 - u^2 + 4u - 1 - u^2}{1+u^2} = 0 \\
&\iff \frac{-2u^2 + 4u}{1+u^2} = 0 \\
&\iff \frac{u(u-2)}{1+u^2} = 0 \\
&\iff u = 0 \text{ ou } u = 2 \\
&\iff \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \text{ ou } \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } x = 2\arctan(2)
\end{aligned}$$

On obtient ainsi les solutions $\{0;\ 2\arctan(2)\}$

Exercice 4

Étude de $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x^2}{x-\ln(x)}\right)$:

Pour tout x « assez grand » :

$$\frac{x^2}{x - \ln(x)} = \frac{x}{1 - \frac{\ln(x)}{x}}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-\ln(x)} = +\infty$, par quotient et croissances comparées. Ainsi, par composition, la limite recherchée est $\dfrac{\pi}{2}$.

Étude de $\lim\limits_{x\to+\infty} \arcsin\left(\frac{x^2-x}{x^2+\ln(x)}\right)$:

Pour x « assez grand » :

$$\frac{x^2 - x}{x^2 + \ln(x)} = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{\ln(x)}{x^2}}$$

On en déduit, par quotient et croissances comparées que $\frac{x^2-x}{x^2+\ln(x)}$ tend vers 1 par valeurs inférieures, ce qui par composition donne la limite recherchée : $\dfrac{\pi}{2}$.

Étude de $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^2+x}$:

Pour x « assez grand » :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^3-1}-\sqrt{x^2+x} &= x^{3/2}\sqrt{1-\tfrac{1}{x^3}}-x\sqrt{1+\tfrac{1}{x}}\\ &= x^{3/2}\left[\sqrt{1-\tfrac{1}{x^3}}-\tfrac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\tfrac{1}{x}}\right]\end{aligned}$$

On a levé l'indétermination et on obtient la limite recherchée : $+\infty$.

Étude de $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} \dfrac{x^3+x}{x^2\ln(x)+\sqrt{x}\ln(x)}$:

On raisonne pour x proche de 0 par valeurs supérieures :

$$\begin{aligned}\frac{x^3+x}{x^2\ln(x)+\sqrt{x}\ln(x)} &= \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{x}\ln(x)\left(1+x^{3/2}\right)}\\ &= \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}\times\left(\frac{1+x^2}{1+x^{3/2}}\right)\end{aligned}$$

On obtient alors, par quotient et produit la limite recherchée : 0.

Étude de $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2}{x+1}\right)+\sin(\pi x)$:

Ici l'astuce consiste à exploiter les formules de factorisation. Ainsi, pour tout x « assez grand » :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi x^2}{x+1}\right)+\sin(\pi x) &= 2\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi x^2}{x+1}+\pi x\right)\right)\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi x^2}{x+1}-\pi x\right)\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{2\pi x^2+\pi x}{2(x+1)}\right)\cos\left(\frac{-\pi x}{2(x+1)}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{2\pi x^2+\pi x}{2(x+1)}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)\end{aligned}$$

Mais, on a, par quotient et composition :

$$\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)=0$$

En particulier, sachant que sin est borné par -1 et 1, on en déduit :

$$\left|\sin\left(\frac{\pi x^2}{x+1}\right)+\sin(\pi x)\right|\leq 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)\right|$$

On peut alors conclure grâce au théorème des Gendarmes. La limite recherchée est nulle.

Étude de $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos(e^x)-1}{e^x}$:

Cette limite se calcule très facilement en faisant le changement de variable $X=e^x$. En particulier, on a :

$$\lim_{X\to0}\frac{\cos(X)-1}{X}=\sin(0)$$

En effet, cette expression est la limite d'un taux d'accroissement. On en déduit que la limite recherchée est nulle.

Étude de $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} \dfrac{1}{x+1}-\ln(x+1)$:

Cette limite n'est pas indéterminée et s'obtient par somme : $+\infty$.

Étude de $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$:

On exploite la technique de la quantité conjuguée. Pour tout x « suffisamment grand » :

$$\sqrt{x^2+1}-x = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

En particulier, sachant que cos est borné par -1 et 1, on a :

$$\left|\cos(x)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

On conclut ensuite grâce au théorème des Gendarmes : la limite recherchée est nulle.

Étude de $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$:

Pour étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, on fait le changement de variable $X=\frac{1}{x}$. On cherche donc :

$$\lim_{X\to0^+} \frac{\ln(1+X)}{X}$$

Mais on reconnaît ici le taux d'accroissement de la fonction $X\mapsto\ln(1+X)$ entre X et 0. On en déduit que :

$$\lim_{X\to0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Ainsi, par composition, la limite recherchée est e.

Exercice 5

1. Cette fonction n'est ni paire, ni impaire, ni périodique. Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ comme différence de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$.
   Cette fonction est la somme de $x\mapsto\frac{1}{x}$ et $x\mapsto-\ln(x)$ qui sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_*^+$. Elle est donc strictement décroissante.
   On a, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty$
   La limite en 0^+ s'obtient par somme : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f_1(x) = +\infty$.
2. Cette fonction est définie pour tout x tel que $|\cos(x)|>0$, c'est à dire pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\right\}$. On note D_2 cet ensemble.
   Pour tout x de D_2, $x+\pi\in D_2$ et on a $f_2(x+\pi)=\ln|\cos(x+\pi)|=\ln|-\cos(x)|=f_2(x)$. La fonction est donc périodique de période π. De plus elle est paire car cos est paire.
   On va donc l'étudier sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[$. Pour tout x de cet intervalle $\cos(x)>0$ et on a donc $f_2(x)=\ln(\cos x)$. Par composition, sur cet intervalle, la fonction est strictement décroissante.
   De plus, $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0^+$ et ainsi, par composition, $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}} f_2(x) = -\infty$. Enfin, on calcule $f_2(0)=0$.
   On peut donc maintenant, par parité, compléter pour obtenir le tableau de variations sur une période.

x	$\frac{-\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$f_2(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car, pour tout x, $1+\mathrm{e}^x > 0$. Elle n'est ni paire, ni impaire, ni périodique.
   Son sens de variation n'est pas évident donc, pour tout x, on calcule :

$$f_3'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} - 1 = \frac{-1}{1+\mathrm{e}^x} < 0$$

   La fonction est donc strictement décroissante.
   La limite en $-\infty$ se détermine par composition et somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = +\infty$.
   Il faut lever l'indétermination en $+\infty$. On calcule ainsi, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) - x \\ &= \ln\left(\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{-x}+1\right)\right) - x \\ &= x + \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) - x \\ &= \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) \end{aligned}$$

   On peut maintenant conclure par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = 0$.

4. (a) Pour tout x, $f_4(x+\pi) = \sin^2(x+\pi) + x + \pi = \left(-\sin(x)\right)^2 + x + \pi = f_4(x) + \pi$.

   (b) Soit un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartenant à la courbe. On a $f_4(x) = y$. On en déduit que $f_4(x+\pi) = f_4(x) + \pi = y + \pi$.
   Ainsi, le point $M'\begin{pmatrix} x+\pi \\ y+\pi \end{pmatrix}$ appartient aussi à la courbe. Ce qui signifie que la courbe est invariante par translation de vecteur $\vec{t}\begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$.

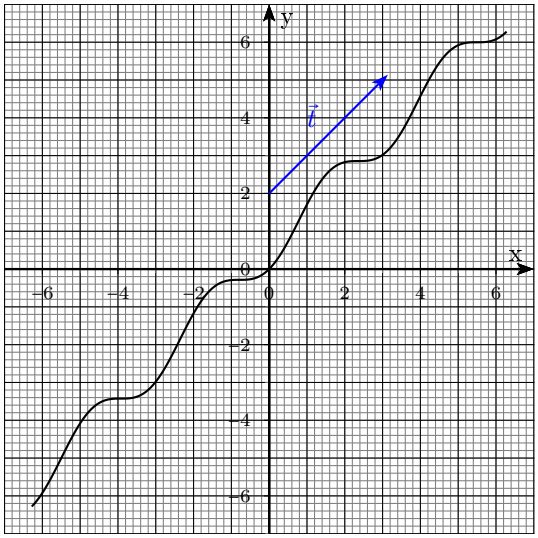
   (c) Pour faciliter l'étude, on va utiliser une technique de linéarisation. Pour tout x :

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \frac{1-\cos(2x)}{2} + x \\ &= x - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   On en déduit, pour tout x :

$$f_4'(x) = 1 + \sin(2x)$$

   L'étude du signe de la dérivée est facile. Elle est positive pour tout x de $[0;\ \pi]$ et s'annule pour $x = \dfrac{3\pi}{4}$ (pour pour $\sin(2x) = -1$).
   On en déduit que sur l'intervalle considéré, la fonction est strictement croissante et que sa courbe possède une tangente horizontale en $x = \dfrac{3\pi}{4}$.
   On calcule $f_4(0) = 0$ et $f_4(\pi) = \pi$. Enfin, on détermine sa courbe en exploitant l'invariance par translation de vecteur $\vec{t}$.



5. (a) Pour tout $x \neq 0$, $f_5(-x) = -x\sin\left(\frac{1}{-x}\right) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = f_5(x)$ donc f_5 est paire.

   (b) Pour tout $x \neq 0$, $|f_5(x)| \leq |x|$ car sin est bornée par -1 et 1. On en déduit, par le théorème des Gendarmes, la limite $\lim\limits_{x\to 0} f_5(x) = 0$.

   Pour la limite en $+\infty$, on fait le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$. On cherche donc :

$$\lim_{X\to 0^+} \frac{\sin(X)}{X}$$

   On reconnaît un taux d'accroissement de sin entre 0 et X. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x) = \cos(0) = 1$.

   (c) Cela a déjà été fait dans la recherche de limites.

   (d) Cette formule s'obtient facilement par dérivation.

   (e) i. φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Un petit calcul donne, pour tout X :

$$\varphi'(X) = X\sin(X)$$

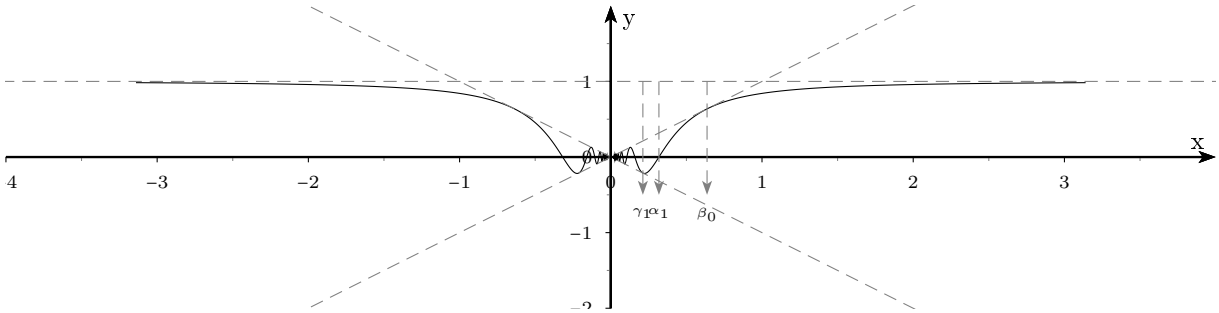
   Sur $[0;\ \pi]$, la fonction φ est donc strictement croissante. On calcule $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\pi) = \pi$. En particulier, sur cet intervalle φ est positive.

   ii. Notons que, pour tout x, $f_5'(x) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$. Or, pour $x > \frac{1}{\pi}$, on a $\frac{1}{x} \in]0;\ \pi[$. D'après la question précédente, on en déduit que $f_5'(x) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

   (f) Pour tout $x > 0$, on a $f_5(x) = 0 \iff \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff x \in \{k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$. On en déduit, que les solutions strictement positives de $f_5(x) = 0$ sont les nombres $\alpha_k = \dfrac{1}{k\pi}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
   De même, pour tout $x > 0$, on a $f_5(x) = x \iff \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \iff x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$. On en déduit, que les solutions strictement positives de $f_5(x) = x$ sont les nombres $\beta_k = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ avec $k \in \mathbb{N}$.
   Un raisonnement similaire conduit à déterminer les solutions strictement positives de $f_5(x) = -x$ qui sont les nombres $\gamma_k = \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

   (g) Les suites des $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement décroissantes et on a $\gamma_1 = \frac{2}{3\pi}$, $\alpha_1 = \frac{1}{\pi}$ et $\beta_0 = \frac{2}{\pi}$.
   On a donc $\gamma_1 < \alpha_1 < \beta_0$.
   Notons également que ces trois suites s'accumulent en 0, ce qui signifie que la courbe oscille de plus en plus vite en se rapprochant de 0.

Enfin, la courbe est contenue entre les deux bissectrices d'équations $y = x$ et $y = -x$ et, en raison de sa limite, elle se rapproche de la droite $y = 1$ en $+\infty$.
Avec tous ces éléments et en exploitant la parité, on peut tracer l'allure de la courbe sur $[-\pi;\ \pi]$



6. (a) Commençons par étudier la fonction $u : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
u est définie et dérivable pour $1 - x^2 > 0$, c'est à dire $x \in]-1;\ 1[$.
Ainsi, par composition, f_6 est définie et dérivable sur $]-1;\ 1[$. De plus, pour tout x de ce domaine $f_6(-x) = \arctan(u(-x))$.

Or, $u(-x) = \frac{-x}{\sqrt{1-(-x)^2}} = -u(x)$. On en déduit, $f_6(-x) = \arctan(-u(x)) = -\arctan(u(x)) = -f_6(x)$. La fonction est donc impaire.
On étudie donc f_6 sur $[0;\ 1[$. Son sens de variation n'est pas évident, on va donc calculer, pour tout $x \in [0;\ 1[$:

$$\begin{aligned}
f_6'(x) &= u'(x) \times \left(\frac{1}{1+u(x)^2}\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\right) \times \left(\frac{1}{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\right) \\
&= \left(\frac{\frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\right) \times \left(\frac{1}{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\right) \\
&= \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} \times (1-x^2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Sur $[0;\ 1[$ la fonction est donc strictement croissante. De plus, on a $f_6(0) = 0$ et, comme, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} u(x) = +\infty$ (par quotient), on en déduit, par composition, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f_6(x) = \frac{\pi}{2}$.
Finalement, on peut tracer le tableau de variations de f_6 sur son domaine :

x	-1		1
$f_6(x)$	‖	$\frac{-\pi}{2}$ ↗ $\frac{\pi}{2}$	‖

(b) On remarque qu'une primitive de f_6' est arcsin car pour tout $x \in]-1;\ 1[$, $f_6'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Mais on a $f_6(0) = \arcsin(0) = 0$. Sachant que toutes les primitives sont définies à une constante près, cette condition initiale nous prouve que f_6 est en fait arcsin.

Planche n° 12: Systèmes linéaires

Exercice 1

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \\ 10 & 21 & 30 & 39 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 4 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & -6 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 19 & -4 & 28 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -1 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & -6 \\ 4 & -4 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 & 6 & 8 \\ -4 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ -1 & 12 & 9 & 10 & 19 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(A) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases} \qquad (B) : \begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases} \qquad (C) : \begin{cases} x + 2y - z + 3t = 2 \\ -2x - 4y + 2z + t = 3 \\ 3x + 6y - 3z + 2t = 1 \end{cases}$$

$$(D) : \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \qquad (E) : \begin{cases} x + 2y + z + 4t = 2 \\ y + t = 0 \\ 3x + 2y + z = 3 \\ 4x + 4y + 6z = 6 \end{cases} \qquad (F) : \begin{cases} 2x - 2y + z + t = -1 \\ \frac{3}{2}x + y - 3z + \frac{t}{2} = 2 \\ y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$(G) : \begin{cases} x + 3y + z + 3t + 4u = 2 \\ -x + y - u = 5 \\ 3x + 2y + t + 4u = 2 \end{cases} \qquad (H) : \begin{cases} 9x + 15y + 18z - 6t + 3u = 3 \\ 2x + y - t + u = 5 \\ 3x + 5y + 6z - 2t + u = 1 \end{cases}$$

Exercice 3

Discuter et résoudre les systèmes suivants, où a, b, m sont des paramètres réels :

$$(I) : \begin{cases} 3x + y - z = -1 \\ 5x + 2y - 2z = a \\ 4x + y - z = b \end{cases} \qquad (J) : \begin{cases} x + y = 1 \\ ax + by = 0 \\ a^2x + b^2y = 1 \\ a^3x + b^3y = 0 \end{cases} \qquad (K) : \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + y + z = m \end{cases}$$

Exercice 4

En préparant l'itinéraire d'une sortie à bicyclette, un organisateur estime que l'on fera du 10 km/h en montée, du 15 km/h en terrain plat et du 18 km/h en descente. La longueur de la promenade est de 33 kilomètres (soit 66 kilomètres aller-retour). On met 2 heures et 32 minutes à l'aller et 2 heures et 16 minutes au retour. Combien de kilomètres de montée, de terrain plat et de descente la route comprend-elle ?

Exercice 5

1. Le vecteur $\vec{u} = (1, 2)$ est-il combinaison linéaire de $\vec{u}_1 = (1, -2)$ et $\vec{u}_2 = (2, 3)$?
2. Le vecteur $\vec{u} = (2, 5, 3)$ est-il combinaison linéaire de $\vec{u}_1 = (1, 3, 2)$ et $\vec{u}_2 = (1, -1, 4)$?
3. Le vecteur $\vec{u} = (3, 1, m)$ est-il combinaison linéaire de $\vec{u}_1 = (1, 3, 2)$ et $\vec{u}_2 = (1, -1, 4)$?

Exercice 6

On considère les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (4, 1, 4)$ et $\vec{u}_3 = (2, -1, 4)$.

1. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est-elle libre ?
2. Même question pour les familles $(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$ et $(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$.
3. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est-elle libre ?

Exercice 7

On considère les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, -2, 2)$ et $\vec{u}_3 = (2, -1, 2)$.

1. Existe-t-il un vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v})$ soit libre ? Si oui, en donner un.
2. Existe-t-il un vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{v})$ soit libre ? Si oui, en donner un.

Exercice 8

Déterminer si les familles suivantes sont libres et/ou génératrices de $\mathbb{R}^n$.

a) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

b) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

c) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

d) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

e) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

f) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

g) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

h) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

i) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dots$, $\vec{u}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Corrigé de la planche n° 12: Systèmes linéaires

Exercice 1

A est déjà échelonnée. Son rang est 3.
Pour B, l'algorithme du pivot de gauss requiert de faire des disjonctions de cas.
Après calcul, on obtient :

- Si $a = b = 0$, le rang est 0 ;
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, le rang est 3 ;
- Si $a \neq 0$ et $b \neq -a$, le rang est 3.
- Si $a \neq 0$ et $b = -a$, le rang est 2

Le rang de C est 1.
Le rang de D est 2.
Le rang de E est 3.
Le rang de F est 3.
Le rang de G est 2.
Le rang de H est 2.
Le rang de I est 4.
Le rang de J est 4.
Le rang de K est 5.
Le rang de L est 4.
Le rang de M est 4.
Le rang de N est 5.
Le rang de O est 5.
Le rang de P est 3.
Pour le rang de Q, il faut faire une disjonction de cas :

- Si deux des coefficients sont égaux, le rang de Q est 2 ;
- Si les trois coefficients sont égaux, le rang de Q est 1 ;
- Dans tous les autres cas, le rang de Q est 3.

Pour le rang de R, il faut également faire une disjonction de cas :

- Si $\lambda = 1$, le rang est 1 ;
- Si $\lambda = -2$, le rang est 2 ;
- Dans tous les autres cas, le rang est 3.

Exercice 2

Il est parfois intéressant de modifier l'ordre des inconnues ou des lignes pour faciliter la mise en œuvre du pivot. En revanche, on ne peut pas, dans la formulation matricielle échanger deux colonnes car on « perd » alors le nom des inconnues.

La résolution de (A) donne :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont donc :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Voici les étapes du pivot :

$$\begin{array}{l}
L_2 \longleftarrow L_2 + (-1) \times L_1 \\
L_3 \longleftarrow L_3 + (-1) \times L_1 \\
L_3 \longleftarrow L_3 + (2) \times L_2 \\
L_3 \longleftarrow \left(\frac{1}{5}\right) \times L_3 \\
L_1 \longleftarrow L_1 + (-1) \times L_3 \\
L_2 \longleftarrow L_2 + (-2) \times L_3 \\
L_1 \longleftarrow L_1 + (-1) \times L_2
\end{array}$$

(B) est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{llll}
x & +2y & +3z & = 2 \\
2x & +3y & -z & = -1 \\
3x & +4y & -5z & = -4
\end{array}\right.$$

La résolution de (B) donne :

$$\begin{cases} x - 11z = -8 \\ y + 7z = 5 \end{cases}$$

Les solutions sont donc :

$$\left\{\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix};\ \text{avec } z \in \mathbb{R}\right\}$$

Voici les étapes du pivot :

$$\begin{array}{l}
L_2 \longleftarrow L_2 + (-2) \times L_1 \\
L_3 \longleftarrow L_3 + (-3) \times L_1 \\
L_2 \longleftarrow (-1) \times L_2 \\
L_3 \longleftarrow L_3 + (2) \times L_2 \\
L_1 \longleftarrow L_1 + (-2) \times L_2
\end{array}$$

La résolution de (C) donne :

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ t = 1 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

Les solutions sont donc :

$$\varnothing$$

Voici les étapes du pivot :

$$\begin{array}{l}
L_2 \longleftarrow L_2 + (2) \times L_1 \\
L_3 \longleftarrow L_3 + (-3) \times L_1 \\
L_2 \longleftarrow \left(\frac{1}{7}\right) \times L_2 \\
L_3 \longleftarrow L_3 + (7) \times L_2 \\
L_1 \longleftarrow L_1 + (-3) \times L_2
\end{array}$$

(D) est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{lll}
y & +2x & = 5 \\
2y & +3x & = 2 \\
3y & +4x & = 2
\end{array}\right.$$

La résolution de (D) donne :

$$\begin{cases} y = -11 \\ x = 8 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

Les solutions sont donc :

$$\varnothing$$

Voici les étapes du pivot :

$$\begin{array}{l}
L_2 \longleftarrow L_2 + (-2) \times L_1 \\
L_3 \longleftarrow L_3 + (-3) \times L_1 \\
L_2 \longleftarrow (-1) \times L_2 \\
L_3 \longleftarrow L_3 + (2) \times L_2 \\
L_1 \longleftarrow L_1 + (-2) \times L_2
\end{array}$$

(E) est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{lllll}
t & & +y & & = 0 \\
 & z & +2y & +3x & = 3 \\
 & 6z & +4y & +4x & = 6 \\
4t & +z & +2y & +x & = 2
\end{array}\right.$$

La résolution de (E) donne :

$$\begin{cases}
t = \frac{1}{4} \\
z = \frac{1}{2} \\
y = -\frac{1}{4} \\
x = 1
\end{cases}$$

Les solutions sont donc :

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}\right\}$$

Voici les étapes du pivot :

$$\begin{array}{l}
L_4 \longleftarrow L_4 + (-4) \times L_1 \\
L_3 \longleftarrow L_3 + (-6) \times L_2 \\
L_4 \longleftarrow L_4 + (-1) \times L_2 \\
L_3 \longleftarrow \left(-\frac{1}{8}\right) \times L_3 \\
L_4 \longleftarrow L_4 + (4) \times L_3 \\
L_4 \longleftarrow \left(\frac{1}{5}\right) \times L_4 \\
L_2 \longleftarrow L_2 + (-3) \times L_4 \\
L_3 \longleftarrow L_3 + \left(-\frac{7}{4}\right) \times L_4 \\
L_1 \longleftarrow L_1 + (-1) \times L_3 \\
L_2 \longleftarrow L_2 + (-2) \times L_3
\end{array}$$

(F) est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{lllll}
y & & & +3z & = 2 \\
-2y & +t & +2x & +z & = -1 \\
y & +\frac{1}{2}t & +\frac{3}{2}x & -3z & = 2
\end{array}\right.$$

La résolution de (F) donne :

$$\begin{cases}
y + 3z = 2 \\
t + 45z = 9 \\
x - 19z = -3
\end{cases}$$

Les solutions sont donc :

$$\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 19 \\ -3 \\ 1 \\ -45 \end{pmatrix};\ \text{avec } z \in \mathbb{R}\right\}$$

Voici les étapes du pivot :

$$\begin{array}{l}
L_2 \longleftarrow L_2 + (2) \times L_1 \\
L_3 \longleftarrow L_3 + (-1) \times L_1 \\
L_3 \longleftarrow L_3 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times L_2 \\
L_3 \longleftarrow (2) \times L_3 \\
L_2 \longleftarrow L_2 + (-2) \times L_3
\end{array}$$

(G) est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{lllll} z & +3t & +x & +3y & +4u & = 2 \\ & t & +3x & +2y & +4u & = 2 \\ & & -x & +y & -u & = 5 \end{array}\right.$$

La résolution de (G) donne :

$$\begin{cases} z - 11y = -44 \\ t + 5y + u = 17 \\ x - y + u = -5 \end{cases}$$

Les solutions sont donc :

$$\left\{\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -44 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 11 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \text{avec } (y;\ u) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Voici les étapes du pivot :

$$\begin{array}{l} L_3 \longleftarrow (-1) \times L_3 \\ L_1 \longleftarrow L_1 + (-1) \times L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + (-3) \times L_3 \\ L_1 \longleftarrow L_1 + (-3) \times L_2 \end{array}$$

(H) est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{lllll} u & -2t & +3x & +5y & +6z & = 1 \\ 3u & -6t & +9x & +15y & +18z & = 3 \\ u & -t & +2x & +y & & = 5 \end{array}\right.$$

La résolution de (H) donne :

$$\begin{cases} u + x - 3y - 6z = 9 \\ t - x - 4y - 6z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Les solutions sont donc :

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix};\ \text{avec } (x;\ y;\ z) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Voici les étapes du pivot :

$$\begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 + (-3) \times L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + (-1) \times L_1 \\ L_3 \longleftrightarrow L_2 \\ L_1 \longleftarrow L_1 + (2) \times L_2 \end{array}$$

Exercice 3

On utilise la notation des matrices augmentées pour résoudre les systèmes.

$$
\begin{aligned}
I &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & -2 & a \\ 4 & 1 & -1 & b \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & a+2 \\ 1 & 0 & 0 & b+1 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 0 & 0 & a+b+3 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 3a+5 \\ -1 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 0 & 0 & a+b+3 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Il faut faire une disjonction de cas :

- Si $a+b+3 \neq 0$, il n'y a pas de solutions.
- Dans le cas contraire, c'est à dire $a+b=-3$. Dans ce cas les solutions sont les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-2 \\ 3a+5 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Pour résoudre le système J, on utilise l'égalité $b^n - a^n = (b-a)\left(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}\right)$.

$$
\begin{aligned}
J &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 0 \\ a^2 & b^2 & 1 \\ a^3 & b^3 & 0 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & -a \\ 0 & (b-a)(b+a) & 1-a^2 \\ 0 & (b-a)(b^2+ab+a^2) & -a^3 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & -a \\ 0 & 0 & 1-a^2+a(b+a) \\ 0 & 0 & -a^3+a(a^2+ba+b^2) \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & -a \\ 0 & 0 & 1+ab \\ 0 & 0 & ab(a+b) \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Ici encore, il faut faire une disjonction de cas.

- Si $1+ab=0$ et $ab(a+b)=0$, ce qui s'écrit $ab=-1$ et $a=-b$ alors le système devient :

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2b & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

  Or $b \neq 0$ (car $ab=-1$). On a donc une unique solution dans $\mathbb{R}^2$:

$$
\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}
$$

- Dans le cas contraire, il n'y a pas de solutions.

Exercice 3

On note x, y et z les distances de côte, descente et plat à l'aller.
Le temps à l'aller vaut :

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{15} + \frac{z}{18} = 2 + \frac{32}{60}$$

Le temps au retour vaut :

$$\frac{x}{18} + \frac{y}{15} + \frac{z}{10} = 2 + \frac{16}{60}$$

La longueur totale vaut :

$$x + y + z = 33$$

En résolvant le système formé par ces trois équations, on obtient

$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 15 \\ z = 6 \end{cases}$$

À l'aller, la montée est de 12 km, la descente est de 6 km et le plat est de 15 km.

Exercice 4

1. On cherche λ_1 et λ_2 tels que
$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = \vec{u}$$
En posant le système correspondant aux coordonnées, on obtient des solutions donc la réponse est oui.
2. Même démarche, on obtient un système incompatible donc la réponse est non.
3. Même démarche, on obtient un système compatible lorsque $m \neq 10$. Dans ce cas, la réponse est oui. Et lorsque $m = 10$ la réponse est non.

Exercice 7

On considère les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, -2, 2)$ et $\vec{u}_3 = (2, -1, 2)$.

1. Ces deux vecteurs sont colinéaires donc il est impossible d'obtenir une famille libre contenant ces deux vecteurs.
2. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Il suffit donc de trouver un vecteur $\vec{v}$ qui convient. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ fait l'affaire !
En effet, le produit mixte de ces trois vecteurs donne $-1 \neq 0$.

Exercice 8

Déterminer si les familles suivantes sont libres et/ou génératrices de $\mathbb{R}^n$.

1. $\vec{u}_1 = (1, 1)$, $\vec{u}_2 = (-1, 1)$, $\vec{u}_3 = (-1, -1)$;
2. $\vec{u}_1 = (1, 1)$, $\vec{u}_2 = (-1, 1)$;
3. $\vec{u}_1 = (1, 1)$;
4. $\vec{u}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, 1, 0)$;
5. $\vec{u}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$;
6. $\vec{u}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_4 = (1, 2, 3)$, $\vec{u}_5 = (-1, 1, -1)$;
7. $\vec{u}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (0, 0, 0)$;
8. $\vec{u}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{u}_3 = (0, -1, 0, 1)$, $\vec{u}_4 = (1, 0, 1, 1)$;
9. $\vec{u}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\vec{u}_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

Planche n° 13: Nombres réels

Exercice 1

Soient deux nombres entiers naturels a et b avec $b > a > 0$.

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ un autre entier. Montrer que
   « d est un diviseur de a et b si et seulement si d divise a et r, avec r est le reste de la division euclidienne de b par a. »
2. On rappelle que `b%a` renvoie le reste de la division euclidienne de a par b.
   En exploitant ce qui précède, montrer que l'algorithme suivant en `Python` renvoie le plus grand diviseur commun de a et b.

```
def pgcd(a,b):
    r=b%a
    while r>0:
        r=b%a
        b=a
        a=r
    return a
```

Exercice 2

Déterminer, si elles existent, les bornes des ensembles suivants et préciser s'il s'agit d'un maximum/minimum.

1. $\left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$;
2. $\left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$;
3. $\left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}^*\right\}$;
4. $\left\{\frac{1}{x} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$;
5. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 < 0\right\}$;
6. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 < 0 \text{ et } x \geq 0\right\}$;
7. $\{a + bn \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;
8. $\{a + (-1)^n b \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;
9. $\left\{a + \frac{b}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. On suppose que B est bornée. Montrer que A est bornée et comparer les bornes supérieures et inférieures de A et de B.

Exercice 4

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les ensembles suivants :

$$-A = \{-x \mid x \in A\}\,,\ A + B = \{x + y \mid (x,y) \in A \times B\}\,,\ A + \lambda = \{x + \lambda \mid x \in A\}\,,\ \lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\}\,.$$

1. Montrer que $A \cup B$ est majoré et que l'on a $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.
2. Montrer que $A \cap B$ est majoré et que l'on a $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}$. Donner un exemple où l'inégalité est stricte.
3. Montrer que $-A$ est minoré et que l'on a $\inf(-A) = -\sup(A)$.
4. Montrer que $A + \lambda$ est majoré et que l'on a $\sup(A + \lambda) = \sup(A) + \lambda$.
5. Montrer que $A + B$ est majoré et que l'on a $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
6. Si $\lambda > 0$, montrer que λA est majoré et que l'on a $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$. Que peut-on dire si $\lambda < 0$ ou $\lambda = 0$?

Établir des propriétés analogues lorsque l'on suppose que A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et minorées.

Exercice 5

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in A, \forall y \in B, x < y$. Montrer que A est majorée, que B est minorée et que l'on a $\sup A \leq \inf B$. Peut-on avoir égalité ?

Exercice 6

Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ telle que $\sup A > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

Exercice 7

Soient x et y deux réels. Montrer les assertions suivantes.

1. $x \leq y \Longrightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$. La réciproque est-elle vraie ?
2. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 8

Soit x un nombre réel.
Soit l'ensemble $P = \{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$.

Montrer que P admet un maximum. À quoi correspond ce maximum ?

Exercice 9

Dans les cas suivants, calculer si possible la valeur de u_{10}.

a) (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2 ;
b) (u_n) est arithmétique de raison 2 et $u_5 = 5$;
c) (u_n) est arithmétique et $u_4 = 5$ et $u_7 = 1$;
d) (u_n) est géométrique et $u_2 = 2$ et $u_4 = 4$;
e) (u_n) est géométrique et $u_1 = -2$ et $u_2 = -1$;
f) (u_n) est géométrique et $u_1 = 0$;
g) (u_n) est géométrique et $u_1 = -1$ et $u_4 = 2$;
h) (u_n) est géométrique et $u_1 = -2$ et $u_6 = -4$.

Exercice 10

Préciser si possible et démontrer le sens de variation de ces suites. Indiquer aussi si elles sont périodiques, stationnaires, majorées, minorées.

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n^2 - 3$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + 1 \ (\forall n) \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N}, r_n = \left\lfloor 3 + \dfrac{4}{n+1} \right\rfloor$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = \dfrac{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor}{n}$

$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = -2v_n + 4 \ (\forall n) \end{cases}$

Exercice 11

Soit x un nombre réel positif. Pour tout nombre entier n, on pose $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

1. Écrire les valeurs de a_0, a_1, a_2 dans le cas de $x = \sqrt{2}$.
2. Montrer, pour tout n, que $x \geq a_n$ et que $\dfrac{1}{10^n} \geq a_{n+1} - a_n \geq 0$.
3. Que représente la suite des a_n ?

Corrigé de la planche n° 13: Nombres réels

Exercice 1

1. Soit $(q;\ r)$ le quotient et le reste de la division de b par a. On a :

$$b = qa + r$$

   Supposons que d divise a et b. Alors il existe deux entiers k et k' tels que $a = kd$ et $b = k'd$ donc : $r = b - qa = k'd - qkd = (k' - qk)d$. Ainsi d divise r et a.

   Supposons maintenant que d divise r et a. Il est existe deux entiers l et l' tels que $r = ld$ et $a = l'd$. On a ainsi $b = qa + r = ql'd + ld = (ql' + l)d$. Ainsi d divise b et a.

2. À chaque étape on a $0 \leq r < a$ puis a devient r. La suite des valeurs de r est donc strictement décroissante, ce qui montre que l'algorithme s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes.
   À la dernière étape, on a $r = 0$, ce qui signifie que a divise b et donc, à cette étape, a est le plus grand diviseur commun de a et b (on renvoie b car on a mis dans b la valeur de a).

   Reste à vérifier que le p.g.c.d. de a et b ne change pas d'une étape à l'autre.
   D'après la question 1, à chaque étape, les diviseurs communs de a et b sont identiques aux diviseurs communs de a et r, ce qui signifie bien, qu'à chaque étape, les diviseurs communs de a et b ne changent pas. En effet, on affecte à b la valeur de a et à a la valeur de r.
   Et comme à la dernière étape, on renvoie ce p.g.c.d., il correspond aussi au p.g.c.d. des deux nombres a et b à l'entrée de la fonction.

Exercice 2

1. Le maximum est 1 et la borne inférieure est 0.
2. Le maximum est 1 et le minimum est 0.
3. Le maximum est 1 et le minimum est -1.
4. La borne inférieure est 0.
5. C'est l'intervalle $]-1;\ 2[$. La borne supérieure est 2 et la borne inférieure est -1.
6. C'est l'intervalle $[0;\ 2[$. Le minimum est 0 et la borne supérieure est 2.
7. Tout dépend du signe de b.
   Si b est positif, il y a un minimum qui est $a + b$.
   Si b est négatif, il y a un maximum qui est $a + b$.
8. Il y a un maximum et un minimum qui sont, selon le signe de b, $a + b$ et $a - b$.
9. Si b est positif, il y a un maximum qui est $a + b$ et une borne inférieure qui est a.
   Si b est négatif, il y a un minimum qui est $a + b$ et une borne supérieure qui est a.

Exercice 3

Pour tout $x \in A$, $x \in B$ et donc $\inf(B) \leq x \leq \sup(B)$. On en déduit que A est bornée.
De plus, $\inf(B)$ est un minorant de A et ainsi $\inf(A) \geq \inf(B)$ car $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A.
De même, on a $\sup(A) \leq \sup(B)$

Exercice 4

Dans toute la suite notons s et t les bornes supérieures respectives de A et B.

1. Les rôles de A et B peuvent être échangés sans nuire à la généralité du problème.

   On peut donc supposer $s \geq t$, c'est à dire $\max\{s;\ t\} = s$. On va montrer que s est la borne supérieure de $A \cup B$.

   Soit $x \in A \cup B$. Si $x \in A$, on a $x \leq s$ et si $x \in B$, on a $x \leq t \leq s$. Ainsi, s est bien un majorant.
   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x \in A$ tel que $s - \varepsilon < x \leq s$. Or $x \in A \cup B$.
   Ainsi s est bien la borne supérieure de $A \cup B$.
2. Soit $x \in A \cap B$. On a $x \in A$ donc $x \leq s$ et $x \in B$ donc $x \leq t$. Ainsi, $x \leq \min(s;\ t)$. On en déduit $\min(s;\ t)$ est un majorant de $A \cap B$ et donc $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}$.

   Cette inégalité n'est pas forcément toujours atteinte. En effet, en considérant $A = [0;\ 2] \cup [12;\ 13]$ et $B = [1;\ 2]$. On a $\sup(A \cap B) = 1$ et $\min\{\sup(A), \sup(B)\} = 2$.
3. Pour tout $x \in -A$, $x \in A$ et donc $-x \leq s$, ce qui donne $x \geq -s$. Ainsi, $-s$ est un minorant de $-A$.
   Et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $s - \varepsilon < x \leq s$, ce qui donne $-s \leq -x < -s + \varepsilon$. Or $-x \in A$.
   On en déduit que $-s$ est la borne inférieure de $-A$.
4. Par un procédé similaire, on montre que $s+\lambda$ est un majorant et que c'est le plus petit des majorants.
5. Ici, la méthode est un peu différente.
   Soit $x \in A+B$. Il existe $(a;\ b) \in A \times B$ tels que $x = a+b$. On obtient ainsi, par somme, $x = a+b \leq s+t$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(a;\ b) \in A \times B$ tels que $s - \dfrac{\varepsilon}{2} < a \leq s$ et $t - \dfrac{\varepsilon}{2} < b \leq t$.
   En sommant, on obtient $s + t - \varepsilon < a + b \leq s + t$. Or $a + b \in A + B$, ce qui montre que $s + t$ est le plus petit des majorants.

Exercice 5

A est majoré par n'importe quel élément de B et B est minoré par n'importe quel élément de A.

En particulier, pour tout $x \in A$, x est un minorant de B et ainsi $x \leq \inf(B)$ car $\inf(B)$ est le plus grand des minorants. On en déduit que $\inf(B)$ est un majorant de A et donc $\sup(A) \leq \inf(B)$ car $\sup(A)$ est le plus petit des majorants.

Il est possible d'avoir égalité en considérant par exemple $A = [0;\ 1[$ et $B =]1;\ 2[$.

Exercice 6

Il suffit de considérer $\varepsilon = \sup A$.

Exercice 7

1. On va montrer cela par contraposée.
   On note $n = \lfloor x \rfloor$ et $p = \lfloor y \rfloor$. On suppose que $n > p$. Or $x \in [n;\ n+1[$ et $y \in [p;\ p+1[$. Ces deux intervalles sont disjoints et tous les éléments de $[n;\ n+1[$ sont strictement supérieurs à ceux de $[p;\ p+1[$, ce qui permet de conclure.
2. On utilise les mêmes notations. On sait que $x \in [n;\ n+1[$ et $y \in [p;\ p+1[$ donc $x+y \in [n+p;\ n+p+2[$. On réalise alors une disjonction de cas.
   Si $x + y \in [n + p;\ n + p + 1[$ alors $\lfloor x + y \rfloor = n + p$ et on vérifie bien que la série d'inégalités est vraie.
   Si $x + y \in [n + p + 1;\ n + p + 2[$ alors $\lfloor x + y \rfloor = n + p + 1$ et on vérifie bien que la série d'inégalités est vraie.
3. On sait que $\lfloor nx \rfloor \leq nx$ donc $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$. Par suite, $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$ est un entier inférieur ou égal à x.

   Ainsi $\lfloor x \rfloor \geq \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$ car la partie entière de x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Mais on a aussi, $\lfloor x \rfloor \leq x$ qui entraîne $n\lfloor x \rfloor \leq nx$. On obtient donc $\lfloor nx \rfloor \geq n\lfloor x \rfloor$ car $n\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à nx. De cette dernière inégalité, on déduit $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \geq \lfloor x \rfloor$. Sachant que $\lfloor x \rfloor$ est un entier inférieur ou égal à $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$, on en déduit $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \geq \lfloor x \rfloor$.

Sachant que $\lfloor x \rfloor \geq \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$ et $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \geq \lfloor x \rfloor$, on obtient bien l'égalité attendue.

Exercice 10

Pour (a_n) :

Le comportement de (a_n) se déduit trivialement de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3$ sur $\mathbb{R}_*^+$. Cette suite est strictement croissante, donc minorée par son premier terme, et elle n'est pas majorée.

Pour (b_n) :

Le comportement de (b_n) se déduit de l'étude de la fonction $g : x \mapsto x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ comme produit et composée de fonctions définies et dérivables sur cet ensemble. En effet, pour tout $x > 0$ l'argument du logarithme $1 + \frac{1}{x}$ est strictement positif.
En particulier, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$$

Le signe de cette expression n'est pas évident. Or g' est encore dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et on a, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-(x+1) + x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

Ainsi, g' est strictement décroissante. Or, $\lim +\infty g' = 0$ par somme de limites. On en déduit que g' est strictement positive donc g est strictement croissante. Ainsi la suite (b_n) est strictement croissante, donc minorée par $b_1 = \ln(2)$. Pour montrer que (b_n) est majorée, on va calculer la limite de g en $+\infty$. Posons pour ce faire, pour tout $x > 0$, $X = \frac{1}{x}$. On cherche ainsi $\lim\limits_{X \to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X}$. On reconnaît le taux d'accroissement de $X \mapsto \ln(1 + X)$ entre 0 et X. La limite recherchée est donc $\frac{1}{1+0} = 1$.
Finalement, $\lim\limits_{+\infty} g = 1$, ce qui prouve que (b_n) est majorée par 1.

Pour (u_n) :

(u_n) est définie par récurrence, ce qui implique que l'on doit raisonner par récurrence. En calculant les premiers termes de (u_n) on en vient à chercher à prouver l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ H_n : \qquad 0 < u_n < u_{n+1} < 10$$

Ce qui permettra de montrer que (u_n) est bien définie, est strictement croissante (donc minorée par $u_0 = 1$) et est majorée par 10.
H_0 s'écrit $0 < u_0 < u_1 < 10$ et est vraie.

Supposons (H_n) vraie pour un certain n. On a donc $0 < u_n < u_{n+1} < 10$. Ainsi :
$\sqrt{0} < \sqrt{u_n} < \sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{10}$ car la fonction racine est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
On en déduit $1 < \sqrt{u_n} + 1 < \sqrt{u_{n+1}} + 1 < \sqrt{10} + 1$. Or $0 < 1$ et $\sqrt{10} + 1 < 10$, cela donne :

$$0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 10$$

Ainsi, l'hypothèse (H_n) est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout n.

Planche n° 14: Espaces vectoriels

Exercice 1

On définit sur $\mathbb{R}^2$ les opérations + et $\cdot$ par $\begin{cases} (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y') \\ \lambda\cdot(x,y) = (\lambda x, 0) \end{cases}$.

Le triplet $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 2

On définit sur $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ une addition + par $(a_1,b_1)+(a_2,b_2) = (a_1a_2, b_1+b_2)$ et une multiplication par un scalaire $\cdot$ de $\mathbb{R}$ sur E par $\lambda\cdot(a,b) = (a^\lambda, \lambda b)$. Le triplet $(E,+,\cdot)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 3

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (muni de sa structure usuelle de $\mathbb{R}$-espace vectoriel) ?

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+3y+4z = 0\}$

$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-z+1 = 0\}$

$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-z = 0 \text{ et } 2x+y-3z = 0\}$

$E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 4z\}$

Exercice 4

En utilisant éventuellement les notions de géométrie décrire :

a) tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel ;

b) tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 5

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

1. L'ensemble des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble des fonctions T-périodiques ($T \in \mathbb{R}_+^*$ fixé).
4. L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
5. L'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$ où a est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (fixée).
6. L'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$ où a et b sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ (fixées).

Exercice 6

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x = y\}$;
2. $\{(x,2x,3x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$;
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$;
4. $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0)+f(1) = f'(0)\}$;
5. l'ensemble des suites arithmétiques ;
6. l'ensemble des suites géométriques ;
7. l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène ;
8. l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Exercice 7

Soient F et G deux sous-espaces vectoriel d'un espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 8

Soient F, G, et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que :

$$F + H = G + H, \quad F \cap H = G \cap H \quad \text{et} \quad F \subset G.$$

Montrer qu'alors on a $F = G$.

Exercice 9

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B, C et D des sous-espaces vectoriels de E. Montrer les assertions suivantes :

1. $A \cap B = A + B \Leftrightarrow A = B$
2. $(A \cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B + C)$
3. $B \subset A \Rightarrow (A \cap B) + (A \cap C) = A \cap (B + C)$

Exercice 10

1. Le vecteur $(3, 3, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(2, 1, 0)$?
2. La fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est-elle combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$?

Exercice 11

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $a = (-1, 2, 1)$ et $b = (0, 1, -1)$.

1. Déterminer un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à $\mathrm{Vec}\,(a, b)$.
2. Soient $u = (1, 0, -3)$ et $v = (-2, 5, 1)$. Montrer que l'on a $\mathrm{Vec}\,(a, b) = \mathrm{Vec}\,(u, v)$.

Exercice 12

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$. On considère :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E / x = y \right\} \qquad G = \mathrm{Vec}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

1. (a) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

   (b) Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Déterminer la décomposition de $\vec{u}$ dans $F \oplus G$.
2. On considère l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

   (a) Montrer que φ est un endomorphisme.

   (b) Montrer que les restrictions de φ à F et G sont des endomorphismes bien connus.

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par le vecteur $(1, 1, \ldots, 1)$, et $G = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que les sous-espace vectoriels F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 14

Montrer que l'ensemble F des fonctions paires définies sur $\mathbb{R}$ et l'ensemble G des fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$ sont des sous-espace vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 15

Soient $u_1 = (2,3,-1)$, $u_2 = (1,-1,-2)$, $v_1 = (3,7,0)$ et $v_2 = (5,0,-7)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que l'on a $\mathrm{Vec}\,(u_1,u_2) = \mathrm{Vec}\,(v_1,v_2)$.

Exercice 16

Montrer que les fonctions $\cos, \sin, \exp$ sont linéairement indépendantes (sur $\mathbb{R}$).

Exercice 17

Montrer que les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes (sur $\mathbb{K}$).

Exercice 18

Sauf indication contraire, le corps considéré est $\mathbb{R}$. n désigne un entier naturel non nul.

Dans les cas suivants, déterminer si l'application proposée est linéaire. Si c'est le cas, déterminer son noyau et son image.

a)
$$\begin{array}{rccc} \varphi_a : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & \Re(z) \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rccc} \varphi_b : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & \arg(z) \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rccc} \varphi_c : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \overline{z} \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rccc} \varphi_d : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & |z| \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{rccc} \varphi_e : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{rccc} \varphi_f : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & 3z+1 \end{array}$$

g)
$$\begin{array}{rccc} \varphi_g : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & 2x+3y+z+1 \end{array}$$

h)
$$\begin{array}{rccc} \varphi_h : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & 2x+3y+z \end{array}$$

i)
$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x-2y \\ y-2z \end{pmatrix} \end{array}$$

j)
$$\begin{array}{rccc} \varphi_j : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & x_1 \end{array}$$

k)
$$\begin{array}{rccc} \varphi_k : & \{\text{Fonctions}\} & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f(2) \end{array}$$

l)
$$\begin{array}{rccc} \varphi_l : & \{\text{Fonctions}\} & \to & \{\text{suites}\} \\ & f & \mapsto & (f(n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

m)
$$\begin{array}{rccc} \varphi_m : & \{\text{Fonctions dérivables}\} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & f & \mapsto & \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix} \end{array}$$

n)
$$\begin{array}{rccc} \varphi_n : & \{\text{suites}\} & \to & \mathbb{R} \\ & (u_n) & \mapsto & u_0 \end{array}$$

Exercice 19

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. p et s désignent des endomorphismes de E tels que :

$$s \circ s = \mathrm{id} \qquad\qquad p \circ p = p$$

1. On s'intéresse à s.
   (a) Montrer que $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$ sont supplémentaires dans E.
   (b) Montrer que les restrictions de s à F et G sont des endomorphismes de F et G dont on déterminera l'expression simplifiée.
2. On s'intéresse à p.
   (a) Montrer que $K = \mathrm{Ker}(p)$ et $L = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id})$ sont supplémentaires dans E.
   (b) Montrer que les restrictions de p à K et L sont des endomorphismes de K et L dont on déterminera l'expression simplifiée.
   (c) Montrer que $L = \mathrm{Im}(p)$.

Exercice 20

Principe de superposition :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathrm{L}(E;\ F)$ un morphisme.
Soit $\vec{b} \in F$ fixé. On s'intéresse aux solutions de :

$$u(\vec{x}) = \vec{b} \qquad (P)$$

1. À quelle condition sur $\vec{b}$ ce problème possède-t-il au moins une solution ?
2. (a) On suppose que $\vec{x}_0$ est une solution. Montrer que, pour tout $\vec{x} \in E$:

$$\vec{x} \text{ est solution} \iff \vec{x} - \vec{x}_0 \in \mathrm{Ker}(u)$$

   (b) En déduire que u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker} u = \left\{\vec{0}_E\right\}$.
3. On suppose de plus que :
   - il existe $\left(\vec{b}_1;\ \vec{b}_2\right) \in F^2$ tels que $\vec{b} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$;
   - les équations $u(\vec{x}) = \vec{b}_1$ et $u(\vec{x}) = \vec{b}_2$ possèdent deux solutions $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$.

   Déterminer une solution du problème initial (P).

Corrigé de la planche n° 14: Espaces vectoriels

Exercice 1

Non ! En effet, la multiplication externe ne vérifie pas $1 \cdot (1;\ 12) = (1;\ 12)$ puisqu'on a $1 \cdot (1;\ 12) = (1;\ 0)$

Exercice 3

Dans chacun des exemples, on exploite le critère de stabilité par combinaison linéaire.

Dans toute la suite on pose $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs quelconques de E ainsi que α_1 et α_2 deux réels quelconques.

Tout le problème est de savoir si $\lambda\vec{X}_1 + \mu\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \end{pmatrix}$ appartient toujours à E.

Pour E_1 :
Ici, la réponse est oui. En effet :

$$2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + 3(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) + 4(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \alpha_1 \underbrace{(2x_1 + 3y_1 + 4z_1)}_{=0 \text{ car } \vec{X}_1 \in E} + \alpha_2 \underbrace{(2x_2 + 3y_2 + 4z_2)}_{=0 \text{ car } \vec{X}_2 \in E} = 0$$

Ainsi, E_1 est bien un s.e.v.

Pour E_2 :
Ici, la réponse est non. En effet, le vecteur nul n'est pas dans E_2.

Pour E_3 :
Ici, la réponse est oui. En effet, avec des techniques de recombinaisons similaires à la question 1 on obtient :

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + 2(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = 0 \quad \text{et} \quad 2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) - 3(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = 0$$

Pour E_4 : Là encore, la réponse est oui. En effet, $x = 2y = 4z \iff x - 2y = 0$ et $x - 4z = 0$. On est donc ramené au cas précédent.

Exercice 4

a) Notons E ce sous-espace. Faisons une disjonction de cas en fonction des vecteurs qui sont dans E.
   - Si E ne contient que $\vec{0}$ alors $E = \{\vec{0}\}$ qui convient.
   - Si E contient un vecteur non nul $\vec{u}$ alors E contient la droite dirigée par $\vec{u}$, c'est à dire $\mathrm{Vec}\,(\vec{u}) \subset E$. On refait une disjonction de cas :
     - ou bien $E = \mathrm{Vec}\,(\vec{u})$ qui convient en tant que sous-espace vectoriel ;
     - ou bien contient un vecteur $\vec{v}$ qui n'est pas colinéaire à $\vec{u}$ et dans ce cas E contient $\mathrm{Vec}\,(\vec{u};\ \vec{v}) = \mathbb{R}^2$, c'est à dire $E = \mathbb{R}^2$

   En résumé, E peut-être réduit à $\vec{0}$, ou bien être une droite vectorielle ou bien être $\mathbb{R}^2$ tout entier.

b) Par un raisonnement similaire, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont :
   - l'ensemble $\{\vec{0}\}$;
   - les droites vectorielles ;
   - les plans vectoriels ;
   - $\mathbb{R}^3$ tout entier.

Exercice 5

1. Non ! Car $x \mapsto x$ est strictement croissante, mais $x \mapsto -x$ ne l'est pas ! (stabilité par l'opposé).
2. Non plus ! $x \mapsto 2x + \cos(x)$ est monotone. $x \mapsto -2x$ aussi. Mais leur somme $x \mapsto \cos(x)$ ne l'est pas.
3. Oui, ça fonctionne. On vérifie la stabilité par combinaisons linéaires.
4. Non, ça ne fonctionne pas. $x \mapsto x^2$ est équivalente à x^2 mais $x \mapsto -x^2$ ne l'est pas.
5. Oui, ça fonctionne en raison de la propriété de linéarité du taux d'accroissement.
6. Oui, ça fonctionne !
7. Non, ça ne marche pas !

Exercice 6

1. Ici la réponse est non car $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est dans l'ensemble mais pas son opposé.
2. La réponse est oui. En effet, c'est l'espace engendré par $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.
3. Non, il ne contient pas le neutre de l'addition.
4. Oui, en effet, si (u_n) et (v_n) sont deux suites arithmétiques de raisons respectives r et s et si λ et μ sont deux réels alors, pour tout n :

$$\begin{aligned}\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} - (\lambda u_n + \mu v_n) &= \lambda\,(u_{n+1} - u_n) + \mu(v_{n+1} - v_n)\\ &= \lambda r + \mu s\end{aligned}$$

   Ainsi, la suite $\lambda\,(u_n) + \mu\,(v_n)$ est arithmétique de raison $\lambda r + \mu s$.
5. La réponse est non. En effet, considérons les suites définies pour tout n par $u_n = 1^n$ et $v_n = 2^n$ qui sont géométriques.

   La suite $(w_n) = (u_n) + (v_n)$ n'est pas géométrique car $\dfrac{w_1}{w_0} = \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{w_2}{w_1} = \dfrac{5}{3}$ donc (w_n) n'est pas géométrique.
6. La réponse est oui. Examinons un système homogène sous sa forme générale.

$$(H) \qquad \left\{\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1p}x_p & = 0\\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2p}x_p & = 0\\ \cdots & +\cdots & +\cdots & +\cdots & = \cdots\\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\cdots & +a_{np}x_p & = 0 \end{array}\right.$$

   Soient $\vec{X} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_p\end{pmatrix}$ et $\vec{Y} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_p\end{pmatrix}$ deux solutions de (H).

   Soient λ et μ deux scalaires.

   On a $\lambda\vec{X} + \mu\vec{Y} = \begin{pmatrix}\lambda x_1 + \mu y_1\\ \lambda x_2 + \mu y_2\\ \cdots\\ \lambda x_p + \mu y_p\end{pmatrix}$.

   Pour tout $i \in [\![1;\ p]\!]$, on va vérifier que $\lambda\vec{X} + \mu\vec{Y}$ est solution de la i-ème ligne de (H) :

$$\begin{aligned}a_{i1}\,(\lambda x_1 + \mu y_1) + a_{i2}\,(\lambda x_2 + \mu y_2) + \cdots + a_{ip}\,(\lambda x_p + \mu y_p) &= \lambda\underbrace{(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p)}_{=0}\\ &\quad + \mu\underbrace{(a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{ip}y_p)}_{=0}\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda\vec{X} + \mu\vec{Y}$ est bien solution de (H).
Les solutions de (H) forment donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

7. La réponse est non. Il suffit par exemple de constater que $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ n'est pas solution de :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Exercice 7

On suppose que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. Faisons une disjonction de cas.

- Si $F \subset G$, il n'y a rien à prouver.
- Si $F \not\subset G$, soit $x \in F \backslash G$. Dans ce cas, pour tout $y \in G$, $x + y \in F \cup G$ puisque $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. Mais alors de deux choses l'une. Ou bien $x + y \in F$, ce qui entraîne que $y = (x+y) - x \in F$. Ou bien $x + y \in G$, ce qui entraîne que $x = (x + y) - y \in G$, ce qui est absurde puisque $x \in F \backslash G$. On obtient donc $y \in G$.
  On en déduit que $G \subset F$.

Réciproquement, si $G \subset F$ ou $F \subset G$, on a $F \cup G = F$ ou $F \cup G = G$. Dans les deux cas, $F \cup G$ est bien un sous-espace vectoriel.

Exercice 8

Il suffit de montrer que $G \subset F$. Soit ainsi $x \in G$. Pour tout $h \in H$, il existe ainsi $(x';\ h') \in F \times H$ tels que $x + h = x' + h'$. En effet, on sait que $F + H = G + H$. Mais alors $x - x' = h' - h \in G \cap H$ car $x' \in G$ et $x \in F \subset G$. Or, $G \cap H = F \cap H$. On en déduit que $x - x' \in F$. Ainsi, $x = (x - x') + x' \in F$.

Exercice 9

1. Le sens réciproque est évident.
   Montrons le sens direct. Comme A et B jouent des rôles parfaitement symétriques, il suffit de prouver $A \subset B$.
   Soit ainsi $x \in A$. Pour tout $y \in B$, $x + y \in A + B$ donc $x + y \in B$ puisque $A + B = A \cap B$. On en déduit en particulier que $x = (x + y) - y \in B$, ce qui achève la démonstration.
2. Soit $x \in (A \cap B) + (A \cap C)$.
   Alors, il existe $(a;\ a') \in (A \cap B) \times (A \cap C)$ tels que $x = a + a'$. En particulier $(a;\ a') \in B \times C$ donc $x = a + a' \in B + C$.
3. Si $B \subset A$, on a $A \cap B = B$. Montrons maintenant la double inclusion.
   Soit ainsi $x \in (A \cap B) + (A \cap C)$. Il existe $(b;\ c) \in (A \cap B) \times (A \cap C)$ tels que $x = b + c$. Mais $x \in A$ car $(b;\ c) \in A^2$. De même, $x \in B + C$ car $(b;\ c) \in B \times C$. On en déduit $x \in A \cap (B + C)$.
   Soit maintenant $y \in A \cap (B + C)$. $y \in A$ et $y \in B + C$. Ainsi, il existe $(b;\ c) \in B \times C$ tels que $y = b + c$. On sait déjà que $b \in A \cap B$ puisque $A \cap B = B$. D'autre part, $c = y - b \in A$ car $y \in A$ et $b \in B \subset A$. Ainsi $c \in A \cap C$. On en déduit $y \in (A \cap B) + (A \cap C)$.

Exercice 10

1. Pour montrer que $\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, il faut et il suffit de déterminer λ et μ tels que

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\lambda + 2\mu\\2\lambda + \mu\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$$

   Ce qui est impossible.

2. Encore une fois, il faut trouver λ et μ tels que

$$6X^3 + X + 11 = \lambda\left(3X^2 - X + 1\right) + \mu\left(2X^3 - 2X^2 + X + 3\right)$$

En identifiant les coefficients par degré, on obtient un système dont l'unique solution est $\lambda = 2$ et $\mu = 3$. La réponse est donc positive.

3. Non, en effet, il faut déterminer λ et μ tels que, pour tout x,

$$\cos(2x) = \lambda\sin(x) + \mu\cos(x)$$

En prenant les valeurs de 0 et π pour x, on obtient la condition nécessaire suivante :

$$\begin{cases} 1 = \mu \\ 1 = -\mu \end{cases}$$

Ce système est impossible. Donc la réponse est négative.

Exercice 11

1. Il suffit de prendre $x = a \wedge b$.
2. Il suffit de montrer que $a \wedge b$ et $u \wedge v$ sont colinéaires car un plan est défini par son vecteur normal.

Exercice 12

1. (a) Pour tout $\vec{X} \in E$, on a :

$$\vec{X} \in F \iff \begin{cases} x = y \\ y = y \end{cases} \iff \vec{X} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $F = \mathrm{Vec}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Montrons maintenant que tout vecteur de E se décompose de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Cela revient à prouver que :

$$\forall \vec{X} \in E,\ \exists!\,(\lambda;\ \mu)\,/\,\vec{X} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Mais cela est vrai car $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires et forment donc une base de $\mathbb{R}^2$.

Cela prouve que $E = F \oplus G$.

(b) D'après ce qui précède, cela revient à résoudre :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda - \mu = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{5}{2} \\ \mu = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

On en déduit $\vec{u} = \frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. (a) Il suffit de montrer que φ est linéaire. En effet, son espace d'arrivée est E. Soient ainsi deux vecteurs $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Soient aussi deux scalaires λ et μ. On calcule :

$$\varphi\left(\lambda\vec{X} + \mu\vec{X}'\right) = \tfrac{1}{2}\left(\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y'\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\tfrac{1}{2}(x+y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu\tfrac{1}{2}(x'+y')\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\varphi\left(\vec{X}\right) + \mu\varphi\left(\vec{X}(\right)$$

φ est bien un endomorphisme.

(b) Soit $\vec{f} \in F$. Il existe α tel que $\vec{f} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$. On calcule :

$$\varphi\left(\vec{f}\right) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \alpha)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \vec{f}$$

Donc $\varphi_{|F} = \mathrm{id}_F$: c'est bien un endomorphisme.

Soit $\vec{g} \in G$. Il existe β tel que $\vec{g} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$. On calcule :

$$\varphi\left(\vec{g}\right) = \tfrac{1}{2}(\beta - \beta)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\varphi_{|G}$ est l'application nulle : c'est bien un endomorphisme.

Exercice 13

1. On montre sans grande difficulté que G est stable par combinaison linéaire.
   Autre approche : considérer que G est le noyau de l'application linéaire $\varphi : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i$.
2. Notons $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur dont toutes les coordonnées sont 1.

   Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On va chercher α et g tels que $X = \alpha e + g$ avec $g \in G$.

   Par construction, on a $g = X - \alpha e = \begin{pmatrix} x_1 - \alpha \\ x_2 - \alpha \\ \cdots \\ x_n - \alpha \end{pmatrix}$ et donc α vérifie la condition nécessaire et suffisante :

   $$\sum_{i=1^n} (x_i - \alpha) = 0$$

   Cela donne $\alpha = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1^n} x_i$. Par construction, on en déduit que $g = X - \alpha e$ vérifie bien $g \in G$.
   Reste à prouver que cette somme est directe. Mais c'est très simple. Il suffit de considérer $Y \in \vec{e} \cap G$. Il existe ainsi β tel que $Y = \beta e$ et $Y \in G$. Mais la condition $Y \in G$ donne $\sum_{i=1^n} \beta = 0$ soit $n\beta = 0$ soit $\beta = 0$. Ainsi $Y = 0$, ce qui permet de conclure.

Exercice 14

On montre facilement que ces deux ensembles sont bien des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Notons $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les fonctions paires et $\mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les fonctions impaires.
Soit une fonction f quelconque. On cherche $(g;\ h) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f = g + h$. Ainsi, pour tout $x \in R$:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

On en déduit que nécessairement $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
Réciproquement, on vérifie les fonctions ainsi définies sont bien respectivement paires et impaires.
Il est assez aisé de montrer que $\mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{0\}$. En effet, une fonction r qui serait à la fois paire et impaire vérifierait pour tout x, $r(-x) = -r(x) = r(x)$, ce qui conduit à $r(x) = 0$.

Exercice 15

u_1 et u_2 engendrent un plan qui passe par l'origine car ils sont linéairement indépendants. De même pour v_1 et v_2.
Pour montrer que ces deux plans sont confondus, il suffit de montrer que les plans sont parallèles. En effet, on sait déjà qu'ils ont un point commun (l'origine). Pour ce faire, on calcule un vecteur normal pour chaque plan : $\vec{u_1} \wedge \vec{u_2}$ et $\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}$.

Exercice 16

Soient α, β et γ trois nombres tels que pour tout x :

$$\alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + \gamma\exp(x) = 0$$

Pour $x = 0$, $x = \pi$ et $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma e^{\pi} = 0 \\ \beta + \gamma e^{\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases}$$

À partir des deux premières lignes, on obtient $\alpha = \gamma = 0$ et la dernière ligne donc $\beta = 0$.
Finalement la famille cos, sin, exp est bien libre.

Exercice 17

Supposons qu'il existe α, β et γ tels que, pour tout n, $\alpha + \beta n^2 + \gamma 2^n = 0$.
En prenant, $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 4\beta + 4\gamma = 0 \end{cases}$$

On montre facilement que ce système a pour unique solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui permet de conclure.

Exercice 18

a) φ_a est linéaire car pour tout $(z_1;\ z_2) \in \mathbb{C}^2$ et pour tout $(\alpha_1;\ \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_a(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \Re(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \alpha\Re(z_1) + \alpha_2\Re(z_2) = \alpha_1\varphi_a(z_1) + \alpha_2\varphi_a(z_2)$.
Son image est $\mathbb{R}$ et son noyau est $i\mathbb{R}$ (imaginaires purs).

b) φ_b n'est pas linéaire. En effet, $\varphi_b(-2) = \pi \neq 2\varphi_b(-1)$

c) φ_c est linéaire car pour tout $(z_1;\ z_2) \in \mathbb{C}^2$ et pour tout $(\alpha_1;\ \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_c(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \overline{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2} = \alpha\overline{z_1} + \alpha_2\overline{z_2} = \alpha_1\varphi_c(z_1) + \alpha_2\varphi_c(z_2)$.
C'est même un automorphisme dont la réciproque est elle-même.
Son image est $\mathbb{C}$ et son noyau est $\{0\}$.

d) φ_d n'est pas linéaire car $\varphi_d(1 + i) = \sqrt{2} \neq \varphi_d(1) + \varphi_d(i)$.

e) Elle n'est pas linéaire car $\varphi_e(0) = 1 \neq 0$.

f) Elle n'est pas linéaire car $\varphi_f(0) = 1 \neq 0$.

g) Elle n'est pas linéaire car $\varphi_g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \neq 0$.

h) Soient $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et soient $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On a $\varphi_h\left(\lambda\vec{X}+\mu\vec{Y}\right)=2\left(\lambda x_1+\mu y_1\right)+3\left(\lambda x_2+\mu y_2\right)+\left(\lambda x_3+\mu y_3\right)=\lambda\left(2x_1+3x_2+x_3\right)+\mu\left(2y_1+3y_2+y_3\right)=\lambda\varphi_h\left(\vec{X}\right)+\mu\varphi_h\left(\vec{Y}\right)$.
Donc φ_h est linéaire.
Son image est $\mathbb{R}$ et son noyau est le plan $2x+3y+z=0$. En effet, elle est surjective car, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\\alpha\end{pmatrix}$ est un antécédent de α.

i) On montre avec la même technique que φ_i est linéaire.
Son image est $\mathbb{R}^2$ car, pour tout $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, le système $\varphi_i\left(\vec{X}\right)=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ possède au moins une solution car ce système est de rang deux.
Son noyau est la droite dont une équation cartésienne est :

$$\begin{cases}x-2y=0\\y-2z=0\end{cases}$$

j) Encore une fois φ_j est linéaire, surjective et son noyau est formé des vecteurs dont la première coordonnée est nulle.

k) Ici encore, φ_k est linéaire, surjective. Son noyau est formé des fonctions qui s'annulent en 2.

l) φ_l est également linéaire, surjective et son noyau est formé des fonctions qui s'annulent sur les entiers.
Pour montrer que φ_l est surjective, on considère une suite (u_n) quelconque. On pose alors $f:x\mapsto\begin{cases}5 \text{ si } x\notin\mathbb{N}\\u_x \text{ si } x\in\mathbb{N}\end{cases}$
Par construction, f est un antécédent de (u_n).

m) Encore une fois φ_m est linéaire, surjective et son noyau est formé des fonctions dérivables f telles que $f(0)=f'(0)=0$.
Pour montrer que φ_m est surjective, il suffit, pour tout $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, de considérer la fonction $f:x\mapsto\beta x+\alpha$ qui est un antécédent de $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$.

n) φ_n est linéaire, surjective et son noyau est formé des suites dont le premier terme est nul.

Exercice 19

Principe de superposition :

1. Lorsqu'il existe $\vec{x}\in E$ tel que $u\left(\vec{x}\right)=\vec{b}$, c'est à dire lorsque $\vec{b}\in\mathrm{Im}(u)$.
2. (a) Sens direct, supposons $\vec{x}$ est solution, on a $u\left(\vec{x}\right)=u\left(\vec{x}_0\right)=\vec{b}$ et donc, par linéarité de u :

$$u\left(\vec{x}-\vec{x}_0\right)=\vec{0}$$

C'est à dire $\vec{x}-\vec{x}_0\in\mathrm{Ker}(u)$.

Sens réciproque, supposons $\vec{x}-\vec{x}_0\in\mathrm{Ker}(u)$. On a :

$$u\left(\vec{x}\right)=u\left(\vec{x}-\vec{x}_0+\vec{x}_0\right)=u\left(\vec{x}-\vec{x}_0\right)+u\left(\vec{x}_0\right)=\vec{0}+\vec{b}=\vec{b}$$

Donc $\vec{x}$ est solution.

(b) Sens direct, supposons u est injective.
Le seul antécédent de $\vec{0}_F$ est $\vec{0}_E$ donc $\mathrm{Ker}u=\left\{\vec{0}_E\right\}$.

Sens réciproque, supposons $\mathrm{Ker}u=\left\{\vec{0}_E\right\}$.
Soient $\vec{x}$ et $\vec{x}_0$ deux éléments de E qui ont la même image par u. On en déduit, d'après ce qui précède, $\vec{x}-\vec{x}_0\in\mathrm{Ker}u$ donc $\vec{x}-\vec{x}_0=\vec{0}_E$ donc $\vec{x}=\vec{x}_0$, ce qui prouve que u est injective.

3. C'est très facile, par linéarité de u, une solution est $\vec{x}_1+\vec{x}_2$ car

$$u\left(\vec{x}_1+\vec{x}_2\right)=u\left(\vec{x}_1\right)+u\left(\vec{x}_2\right)=\vec{b}_1+\vec{b}_2=\vec{b}$$

Planche n° 15: Suites

Exercice 1

Dire si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels des suites numériques.

$E_1 = \{\text{suites monotones}\}$ $\quad E_2 = \{\text{suites convergentes}\}$ $\quad E_3 = \{\text{suites bornées}\}$

$E_4 = \{\text{suites de limite nulle}\}$ $\quad E_5 = \{\text{suites stationnaires}\}$ $\quad E_6 = \{\text{suites divergentes}\}$

Exercice 2

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie au fausse (en justifiant).

1. La somme de deux suites majorées est majorée.
2. Le produit de deux suites majorées est majoré.
3. Le produit de deux suites bornées est borné.
4. Une suite réelle positive qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui ne s'annule pas.
   La suite est croissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
6. La somme de deux suites divergentes est divergente.
7. Le produit de deux suites divergentes est divergente.
8. La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.
9. Le produit d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.
10. Si (u_n) tend vers $+\infty$ et si (v_n) est minorée alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$.
11. Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang.
12. Si (u_n) est majorée alors $(|u_n|)$ est majorée.
13. Si (u_n) est strictement positive et si (v_n) tend vers $+\infty$ alors $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$.
14. Si (u_n) est majorée par un nombre strictement négatif et et si (v_n) tend vers $+\infty$ alors $(u_n v_n)$ tend vers $-\infty$.
15. Si (u_n) possède une limite strictement positive alors (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang.

Exercice 3

1. Rappeler le théorème du cours concernant les suites extraites d'une suite convergente.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers l.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Que peut-on dire de la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 5

Montrer que toute suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire.

Exercice 6

Montrer que toute suite d'entiers naturels convergente est stationnaire.

Exercice 7

Étudier la convergence des suites dont le terme général est :

$$a_n = \frac{\cos n}{n+1}; \quad b_n = \sin(n^2\pi/3); \quad c_n = \frac{n+(-1)^n}{n^2+1}; \quad d_n = \frac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2}; \quad e_n = \frac{e^n+n^2}{n^4+1};$$

$$f_n = \frac{\ln n+1}{n+4}; \quad g_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}; \quad h_n = \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}; \quad i_n = \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n} \quad j_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Exercice 8

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Étudier la monotonie de S_n.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$: $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
3. En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 9

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et trouver sa limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $T_{n+1} = \frac{T_n+S_n}{3}$.
3. En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 10

Étudier la convergence des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \quad , \quad v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!.$$

(*Indication* : On pourra penser à encadrer de façon judicieuse chacun des termes des sommes.)

Exercice 11

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On la note x_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1/2 \leq x_n \leq 1$.
3. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
4. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 12

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ci-dessous sont adjacentes.

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$;
2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$;

3. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$
4. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$. Montrer que la limite commune de celles-ci est un irrationnel.

Exercice 13

Suites arithmético-géométriques
Soit $(a;\ b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq 1$. On définit une suite (u_n) par son premier terme u_0 et la relation de récurrence valable pour tout n, $u_{n+1} = au_n + b$.

1. On pose pour tout n, $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.
   (b) En déduire une formule explicite de (v_n), en fonction de a, b et u_0.
2. En exploitant ce qui précède, déterminer une formule explicite de (u_n).

Exercice 14

Suites définies par une récurrence d'ordre deux
Soit $(a;\ b) \in \mathbb{R}^2$. On définit une suite (u_n) par ses deux premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence (R_n) valable pour tout n, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

1. (a) Montrer qu'une suite géométrique non triviale vérifie (R_n) si et seulement si sa raison est racine de l'équation $x^2 - ax - b = 0$.
   On dira que cette équation est l'*équation caractéristique* de la suite.
   (b) Montrer que si deux suites (u_n) et (v_n) vérifient (R_n) alors, pour tout $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2$, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ vérifie aussi (R_n).
2. On souhaite maintenant étudier la suite de Fibonacci (F_n) définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et pour tout n, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
   (a) Déterminer les deux racines α_1 et α_2 de l'équation caractéristique de (F_n).
   (b) Déterminer les réels λ_1 et λ_2 tels que pour tout n, $F_n = \lambda_1\alpha_1^n + \lambda_2\alpha_2^n$.

L'exercice qui suit donne des clefs pour aborder plus sereinement les derniers exercices de la planche.

Exercice 15

Soient $y > x > 0$ deux nombres. Prouver que :

$$0 < x < \frac{2xy}{x+y} < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y$$

Les nombres $\frac{2xy}{x+y}$, $\sqrt{xy}$ et $\frac{x+y}{2}$ sont respectivement appelés moyenne *harmonique*, *géométrique* et *arithmétique*.

Exercice 16

Soit $x > 1$. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = x$, $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies, qu'elles sont adjacentes et calculer leur limite commune.

Exercice 17

Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_nv_n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies et qu'elles sont adjacentes. Leur limite commune (que l'on ne cherchera pas à calculer) est appelée la *moyenne arithmético-géométrique* de a et de b.

Corrigé de la planche n° 15: Suites

Exercice 1

Pour E_1 :

La réponse est non. En effet, considérons pour tout n, $u_n = 3n + (-1)^n$ et $v_n = -3n$.
On vérifie que, $u_{n+1} - u_n = 3 + 2 \times (-1)^{n+1} \geq 1 > 0$ donc (u_n) est strictement croissante. De même, (v_n) est strictement décroissante.
Or la somme de ces deux suites est $(-1)^n)$ qui n'est pas monotone.

Pour E_2 :

La réponse est oui.
Considérons (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers ℓ et m. Considérons aussi $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2$.
On sait que la suite $\lambda(u_n) + \mu(v_n)$ converge vers $\lambda\ell + \mu m$ d'après les propriétés des limites de suites.
Donc l'ensemble est stable par combinaison linéaire.

Pour E_3 :

La réponse est oui.
Considérons (u_n) et (v_n) deux suites bornées. Considérons aussi $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Il existe $(K;\ L) \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour tout n, $|u_n| \leq K$ et $|v_n| \leq L$. Par application de l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$|\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda|\, K + |\mu|\, L$$

La suite $\lambda(u_n) + \mu(v_n)$ est ainsi bornée.
Donc l'ensemble est stable par combinaison linéaire.

Pour E_4 :

La réponse est encore oui. Toute combinaison linéaire de suites qui tendent vers 0 tend aussi vers 0.

Pour E_5 :

La réponse est toujours oui. Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui stationnent respectivement sur les valeurs a et b à partir des rangs p et q. Soient λ et μ deux réels.
Pour tout $n \geq \max(p;\ q)$, $\lambda u_n + \mu v_n = \lambda a + \mu b$ donc la suite $\lambda(u_n) + \mu(v_n)$ stationne à partir du rang $\max(p;\ q)$.
L'ensemble est bien stable par combinaison linéaire.

Pour E_6 :

La réponse n'est pas oui. En effet, le suite nulle n'est pas divergente (puisqu'elle tend vers 0).

Exercice 2

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites majorées par des réels M et M'.
   On a, pour tout n, $u_n + v_n \leq M + M'$. C'est vrai.
2. C'est faux. Considérer, pour tout n, $u_n = -n$ et $v_n = -n$. Ces deux suites sont majorées. Pourtant $u_n v_n = n^2$ ne l'est pas.
3. C'est vrai. Soient (u_n) et (v_n) deux suites bornées. Il existe deux nombres positifs K et K' tels que, pour tout n, $|u_n| \leq K$ et $|v_n| \leq K'$.
   On en déduit $|u_n v_n| = |u_n| \times |v_n| \leq KK'$.
4. C'est faux. Considérer pour cela la suite (u_n) définie pour tout n par $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   Cette suite tend vers 0 et n'est jamais décroissante.

5. C'est faux. Considérer la suite (u_n) définie pour tout n par $u_n = -n - 1$. Cette suite n'est pas décroissante et pourtant elle vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
6. C'est faux. Considérer la somme de $(-1)^{n+1}$ et de $(-1)^n$ qui est constante égale à 0.
7. C'est faux. Considérer le produit de $(-1)^n$ par lui-même.
8. C'est vrai. En effet, considérons (u_n) convergente, (v_n) divergente. Notons w_n la somme de ces deux suites.
   On ne peut pas avoir w_n convergente car sinon $v_n = w_n - u_n$ serait convergente.
9. C'est faux. Considérer le produit de $(-1)^n$ par $\dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 6

Soit (u_n) une suite d'entier qui possède une limite finie l.
Soit $\varepsilon = \dfrac{1}{3} > 0$. Il existe un rang p tel que pour tout $n \geq p$, $u_n \in \left]l - \dfrac{1}{3};\ l + \dfrac{1}{3}\right[$. Or la largeur de cet intervalle est de $\dfrac{2}{3}$ donc il existe au plus un entier dans cet intervalle. Or u_p est dans cet intervalle et est un entier. Ainsi, pour tout $n \geq p$, $u_n = u_p$ donc la suite est bien stationnaire.

Exercice 7

Pour tout n, $\dfrac{-1}{n+1} \leq a_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ car $\cos(n) \in [-1;\ 1]$. Par le théorème des Gendarmes, $a_n \to 0$.

On calcule les premiers termes de la suite $b_0 = 0$, $b_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $b_2 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, $b_3 = 0$, $b_4 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, $b_5 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

En particulier, lorsque $n^2 \equiv 1[6]$, $b_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et lorsque $n^2 \equiv 0[6]$, $b_n = 0$.
Mais si $n \equiv 1[6]$, on vérifie facilement que $n^2 \equiv 1[6]$. De même, si $n \equiv 0[6]$, on a $n^2 \equiv 0[6]$. Ces deux remarques nous montrent que les suites extraites (b_{6n}) et (b_{6n+1}) sont constantes mais de valeurs différentes. Ainsi (b_n) n'a pas de limite.

Pour tout $n \neq 0$, $c_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}\right)$. Cette forme n'est pas indéterminée et on a ainsi $c_n \to 0$.

On vérifie facilement que, pour tout n, $d_n \geq \dfrac{n-1}{3}$. Par le théorème de minoration, $d_n \to +\infty$.

Pour tout $n \neq 0$, $e_n = \dfrac{e^n}{n^4}\left(\dfrac{1 + \frac{n^2}{e^n}}{1 + \frac{1}{n^4}}\right)$. Par croissances comparées, on en déduit que $e_n \to +\infty$.

Avec le même genre de technique, on prouve que $f_n \to 0$.

En utilisant la conjugaison, on vérifie que, pour tout $n \geq 1$, $g_n = \dfrac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$. Ainsi, $g_n \to 0$.

Avec la même technique, on vérifie que, pour tout $n \geq 1$, $h_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}}$.
Ainsi, $h_n \to 1$.

Pour tout n, on a $\dfrac{\sqrt{n}-1}{n} \leq i_n \leq \dfrac{\sqrt{n}}{n}$, c'est à dire $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq i_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Par le théorème des Gendarmes, on en déduit que $\lim i_n = 0$.

Pour tout $n \geq 2$, $j_n = \dfrac{1}{n} \times \left(\dfrac{2 \times 3 \times \cdots \times n}{n \times n \times \cdots \times n}\right)$. On en déduit que $0 \leq j_n \leq \dfrac{1}{n}$. Ainsi, toujours par le théorème des Gendarmes, $j_n \to 0$.

Exercice 8

1. Pour tout $n \geq 1$, $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$. (S_n) est donc strictement croissante.
2. Pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n(n-1)}$. Or $n(n-1) \leq n^2$. On a donc bien
$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$
3. D'après ce qui précède, pour tout $n \geq 2$, on a $S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}\right)$. Cette dernière somme est télescopique. On obtient ainsi, après simplification :
$$S_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$
En particulier (S_n) est croissante et majorée. On peut conclure à l'aide du théorème de convergence monotone.

Exercice 9

1. Pour tout n, $S_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$ (somme des termes d'une suite géométrique).

   En particulier, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ car $-1 < \frac{1}{3} < 1$.

   On en déduit, par somme et quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{3}{2}$.
2. Pour tout n, on calcule :
$$\begin{aligned}
\frac{T_n + S_n}{3} &= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{3^k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{3^{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{3^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{3^k} \text{ car } \frac{0}{3^0} = 0 \\
&= T_{n+1}
\end{aligned}$$
3. Il est clair que (T_n) est strictement croissante car, pour tout n, $T_{n+1} - T_n = \dfrac{n+1}{3^{n+1}} > 0$.

   De la question précédente et de cette remarque, on déduit, pour tout n, $S_n = 3T_{n+1} - T_n \geq 3T_n - T_n = 2T_n$ ce qui donne :
$$T_n \leq \frac{1}{2} S_n$$
   Or (S_n) est majorée car convergente. On en déduit que (T_n) est majorée. Le théorème de convergence monotone permet de conclure : (T_n) converge vers une limite ℓ. Par passage à la limite dans la relation $S_n = 3T_{n+1} - T_n \geq 3T_n - T_n = 2T_n$, on obtient :
$$3\ell - \ell = \frac{3}{2} \iff \ell = \frac{3}{4}$$

Exercice 10

Pour (u_n) :
Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $1 \leq k \leq n$, on vérifie que $\dfrac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \dfrac{n}{n^2+1}$.
Par sommation, on obtient, $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$. Or, on montre facilement que les deux suites qui encadrent (u_n) ont pour limite commune 1. On conclut à l'aide du théorème des Gendarmes.

Pour (v_n) :
Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $kx - 1 \leq \lfloor kx \rfloor \leq kx$.
Par sommation, on obtient, $\dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (kx-1) \leq v_n \leq \sum_{k=1}^{n} kx$.
En utilisant les nombres triangulaires, on a $\dfrac{1}{n^2} \times \sum_{k=1}^{n} kx = x \times \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{x}{2} \times \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
Finalement, on vérifie $\dfrac{x}{2} \times \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} \leq v_n \leq \dfrac{x}{2} \times \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. On en déduit, par le théorème des Gendarmes que $v_n \to \dfrac{x}{2}$.

Pour (w_n) :
On a $w_n = \underbrace{\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{n \times \cdots \times 4 \times 3} + \dfrac{1}{n \times \cdots \times 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n-1)}}_{n-2 \text{ termes}} + \dfrac{1}{n} + 1$.
Chacun des $n-2$ termes est supérieur au premier terme $\dfrac{1}{n!}$ et inférieur au dernier terme $\dfrac{1}{n(n-1)}$. On en déduit l'encadrement :

$$\frac{(n-2)}{n!} + \frac{1}{n} + 1 \leq w_n \leq \frac{(n-2)}{n(n-1)} + \frac{1}{n} + 1$$

On montre assez facilement que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(n-2)}{n!} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(n-2)}{n(n-1)} = 0$. On conclut ensuite avec le théorème des Gendarmes : la limite de (w_n) est 1.

Exercice 11

On pose, pour tout $n \geq 1$, $f_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + 1$. Notons que cette fonction est strictement croissante et continue comme somme de fonctions strictement croissantes et continues.

1. On a $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$. Or f_n est strictement croissante et continue. Ainsi, tout nombre positif possède un unique antécédent par f_n sur $\mathbb{R}^+$. En particulier 1 possède un unique antécédent par f_n sur $\mathbb{R}^+$.
2. On a $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$ et $f_n(1) = n \geq 1$. Par les mêmes arguments que précédemment, le théorème des valeurs intermédiaires nous montre que 1 possède un unique antécédent par f_n sur $\left]\frac{1}{2}; 1\right]$
3. Pour tout $n \geq 1$, calculons $f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + x_n^{n+1} = 1 + x_n^{n+1} > 1$. Ainsi, 1 possède un unique antécédent par f_{n+1} dans $\left]\frac{1}{2}; x_n\right[$, ce qui nous prouve que $x_{n+1} < x_n$. La suite est donc bien strictement décroissante.
4. Pour tout n, on a $f_n(x_n) = 1$ donc $x_n \left(\dfrac{1 - x_n^n}{1 - x_n}\right) = 1$, c'est à dire, après calcul, $x_n = \dfrac{1}{2} + x_n^{n+1}$. On en déduit, pour tout $n \geq 2$, sachant que x_n est décroissante :

$$0 \leq x_n - \frac{1}{2} = x_n^{n+1} \leq x_2^{n+1}$$

Or $0 < x_2 < 1$. Ainsi, par le théorème des Gendarmes, on prouve que $\lim x_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 12

1. Pour tout $n \geq 1$, $v_n - u_n = \dfrac{1}{n} > 0$. Ainsi, $v_n \geq u_n$ et $\lim(v_n - u_n) = 0$.

   De plus, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, ce qui montre que (u_n) est strictement croissante.

   Enfin, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{-1}{n(n+1)^2} < 0$. Ainsi, (v_n) est strictement décroissante. Cela permet de conclure.

2. On obtient, après calcul que, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$. Ainsi, (u_n) est strictement croissante.

   On obtient également, pour tout $n \geq 1$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n}$. Or $2n+2 > n$ et $2n+1 > 2n$, ce qui donne $\dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} < 2 \times \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, $v_{n+1} - v_n < 0$. (v_n) est donc strictement décroissante.

   Enfin, on vérifie que $v_n - u_n = \dfrac{1}{n}$, ce qui montre que $\lim(v_n - u_n) = 0$ et permet de conclure.

3. C'est toujours la même technique. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad \text{(technique du conjugué)} \\ &= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} < 0 \end{aligned}$$

   On en déduit que (u_n) est strictement décroissante.
   On calcule aussi :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \quad \text{(technique du conjugué)} \\ &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)} > 0 \end{aligned}$$

   On en déduit que (v_n) est strictement croissante.

   Il est également clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > v_n$ car $v_n - u_n = 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) > 0$.

   Pour finir, examinons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - v_n = 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. On a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$.
   Ces deux suites sont adjacentes.

4. Commençons par le plus facile. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n = \dfrac{1}{nn!}$. Cette quantité est strictement positive et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

   D'autre part, il est clair que la suite u_n est croissante car $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$.

   Examinons maintenant $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - \dfrac{1}{nn!} = \dfrac{n(n+1) - n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} = \dfrac{n^2 - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} < 0$ donc (v_n) est strictement décroissante.
   Finalement ces deux suites sont bien adjacentes.

Notons ℓ leur limite commune. On a, pour tout n, $u_n \leq \ell \leq v_n$. Supposons que ℓ est un rationnel. Donc il existe deux entiers p et q tels que $\ell = \dfrac{p}{q}$.

En particulier, on a pour tout n, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \dfrac{p}{q} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \dfrac{1}{nn!}$.

Remarquons qu'alors $\dfrac{p}{q} \times q! = p(q-1)!$ est un entier et que $q!u_q = \sum_{k=1}^{q} \frac{q!}{k!}$ est aussi un entier car, pour tout $1 \leq k \leq q$, $\dfrac{q!}{k!} = q \times (q-1) \times \cdots \times (k+1)$. Ainsi, en multipliant l'inégalité précédente, on obtient :

$$q!u_q \leq \frac{p}{q}q! \leq q!u_q + \frac{1}{q}$$

Mais dans l'intervalle $\left[q!u_q;\ q!u_q + \dfrac{1}{q}\right]$, il n'y a qu'un entier car la longueur de cet intervalle est $\dfrac{1}{q} < 1$. On en déduit que $\dfrac{p}{q}q! = q!u_q$, c'est à dire $\ell = \dfrac{p}{q} = u_q$, ce qui est absurde car la suite (u_n) est strictement croissante (et elle ne peut donc pas stationner sur sa limite).

Exercice 13

1. (a) On calcule, pour tout n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{b}{1-a} \\ &= au_n + b - \frac{b}{1-a} \\ &= au_n + \frac{b(1-a) - b}{1-a} \\ &= au_n + \frac{-ba}{1-a} \\ &= a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) \\ &= av_n \end{aligned}$$

La suite est donc géométrique de raison a et de premier terme $v_0 = u_0 - \dfrac{b}{1-a}$.

(b) D'après ce que l'on sait des suites géométriques, pour tout n :

$$v_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n$$

2. On sait que, pour tout n :

$$u_n = v_n + \frac{b}{1-a} = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a}$$

Exercice 14

1. (a) On considère une suite géométrique (v_n) non triviale de raison $q \neq 0$ et de premier terme $v_0 \neq 0$.
Pour tout n, R_n s'écrit :

$$\begin{aligned} v_0q^{n+2} = av_0q^{n+1} + bv_0q^n \quad &\iff v_0q^n\left(q^2 - aq - b\right) = 0 \\ \iff q^2 - aq - b = 0 \text{ car } v_0q^n \neq 0 \quad & \end{aligned}$$

(b) C'est très simple. Supposons que (u_n) et (v_n) vérifient (R_n). Alors, pour tout n :

$$\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \lambda\left(au_{n+1} + bu_n\right) + \mu\left(av_{n+1} + bv_n\right) = a\left(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}\right) + b\left(\lambda u_n + \mu v_n\right)$$

Donc $(\lambda u_n + \mu v_n)$ vérifie aussi (R_n).

2. (a) L'équation caractéristique est $x^2 - x - 1 = 0$. Ses solutions sont $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

   (b) Pour déterminer λ_1 et λ_2, on exploite les conditions initiales :

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1\alpha_1^0 + \lambda_2\alpha_2^0 = 1 \\ \lambda_1\alpha_1^1 + \lambda_2\alpha_2^1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 = 1 \end{cases}$$

   La résolution de ce système donne :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \\ \lambda_2 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

   Ainsi, on en déduit la formule explicite de la suite de Fibonacci. Pour tout n :

$$F_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right) \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Exercice 15

Examinons séparément chacune des quatre inégalités de la plus facile à la plus délicate.
Pour la plus facile :

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} < y &\iff x + y < 2y \\ &\iff x < y \text{ ce qui est vrai par hypothèse} \end{aligned}$$

On regarde ensuite :

$$\begin{aligned} x < \frac{2xy}{x+y} &\iff x^2 + xy < 2xy \text{ car } x + y > 0 \\ &\iff x^2 < xy \\ &\iff x < y \text{ car } x > 0 \\ &\text{cette dernière inégalité est également vraie par hypothèse} \end{aligned}$$

Puis on s'attaque à :

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} &\iff 2\sqrt{xy} < x + y \\ &\iff 4xy < x^2 + y^2 + 2xy \text{ car la fonction carré est strictement croissante.} \\ &\iff 0 < (x-y)^2 \text{ par factorisation} \\ &\text{cette dernière inégalité est encore vraie} \end{aligned}$$

Enfin, on regarde :

$$\begin{aligned} \frac{2xy}{x+y} < \sqrt{xy} &\iff \frac{2\sqrt{xy}}{x+y} < 1 \text{ car } \sqrt{xy} > 0 \\ &\iff \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} \text{ car } \frac{x+y}{2} > 0 \\ &\text{on a prouvé précédemment cette inégalité} \end{aligned}$$

Finalement les quatre inégalités sont bien vraies.

Exercice 16

On va commencer par montrer que, pour tout n, $u_n \geq v_n > 0$.
Une petite récurrence permet de montrer facilement que ces deux suites sont toujours strictement positives. Montrons maintenant que pour tout n, $u_n \geq v_n$
C'est vrai au rang 0 car $x > 1$. Et pour tout $n \geq 1$, on a la série d'équivalences :

$$\begin{aligned} u_{n+1} \geq v_{n+1} &\iff \frac{u_n + v_n}{2} \geq \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ &\iff (u_n + v_n)^2 \geq 4u_n v_n \text{ car } u_n + v_n > 0 \\ &\iff (u_n - v_n)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vraie, on en déduit que pour tout n, $u_n \geq v_n$.

Pour tout n, u_{n+1} étant la moyenne arithmétique de (u_n) et (v_n), on a $u_n \geq u_{n+1} \geq v_n$, ce qui montre que (u_n) décroît.
De même, v_{n+1} étant la moyenne harmonique de (u_n) et (v_n), on a $u_n \geq v_{n+1} \geq v_n$, ce qui montre que (v_n) décroît.
En raison du théorème de convergence monotone, ces deux suites convergent vers des limites l et l'.

Par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, on obtient $\dfrac{l + l'}{2} = l$, c'est à dire $l = l'$. Les deux suites sont donc bien adjacentes.

Reste à déterminer leur limite commune. Mais on a prouvé en TD l'ordre des différentes moyennes de deux nombres strictement positifs. On en déduit que, pour tout n :

$$u_n \geq \frac{u_n + v_n}{2} \geq \sqrt{u_n v_n} \geq \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \geq v_n$$

Or, pour tout n, $u_{n+1}v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \times \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = u_n v_n$. Ainsi la suite $(u_n v_n)$ est constante égale à $u_0 v_0 = x$.
On en déduit par passage à la limite dans la série d'inégalité précédente que

$$\lim u_n = \lim v_n = \sqrt{x}$$

Planche n° 16: Probabilités

Exercice 1

Soit Ω un univers et soient A, B, C trois événements de Ω. Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :

1. seul A se réalise ;
2. A et B se réalisent, mais pas C.
3. les trois événements se réalisent ;
4. au moins l'un des trois événements se réalise ;
5. au moins deux des trois événements se réalisent ;
6. aucun ne se réalise ;
7. au plus l'un des trois se réalise ;
8. exactement deux des trois se réalisent.

Exercice 2

Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{k\}$ soit proportionnelle à k.

Exercice 3

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.
Montrer : $\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leq P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$.

Exercice 4

On tire trois cartes dans un jeu de 52 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir trois cartes qui sont soit toutes trois de la même couleur, soit toutes les trois de couleurs différentes si

1. on tire les trois cartes simultanément ;
2. on tire les trois cartes successivement sans remise ;
3. on tire les trois cartes successivement avec remise.

Exercice 5

Paradoxe du Chevalier de Méré.

1. On lance quatre fois un dé. Prenez-vous le pari d'obtenir (au moins) un 6 ?
2. Lorsqu'on lance deux dés, il y a 6 fois plus d'issues que lorsqu'on ne lance qu'un dé.
   On lance 24 (=6×4) fois deux dés, prenez-vous le pari d'obtenir (au moins) un double 6 ?

Exercice 6

On dispose de deux dés équilibrés notés D et D' à respectivement n faces et m faces avec $n > m$.

On lance ces deux dés. Quelle est la probabilité que la face de D' soit strictement supérieure à la face de D ?

Exercice 7

On lance trois fois de suite un dé (non pipé) à 6 faces. Déterminer la probabilité d'obtenir :
- au moins un 6 ;
- exactement un 6 ;
- au moins deux faces identiques ;
- au moins deux faces identiques et une somme paire des faces.

Exercice 8

On jette 3 fois un dé à 6 faces, et on note a, b et c les résultats successifs obtenus. On note $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer la probabilité pour que
- Q ait deux racines réelles distinctes ;
- Q ait une racine réelle double ;
- Q n'ait pas de racines réelles.

Exercice 9

On choisit simultanément deux entiers distincts entre 1 et n (premier tirage) puis indépendamment, trois entiers distincts entre 1 et n (deuxième tirage).

1. Avec quel probabilité les entiers tirés au premier tirage le sont aussi au deuxième ?
2. Quelle est la probabilité qu'aucun des entiers tirés au premier tirage ne le soit de nouveau au deuxième ?

Exercice 10

Une urne contient b boules blanches et n boules noires. On tire successivement toutes les boules sans remise. Déterminer la probabilité que la première boule noire soit tirée au k-ième tirage.

Exercice 11

Un concours met en jeu n places de concert. Vous faites partie des gagnants. Vous vous retrouvez, avec les autres gagnants, à faire la queue à un guichet pour retirer votre place. Parmi ces n places il y en a p pour le concert de votre groupe préféré. Elles sont données au hasard. Où vous placez-vous dans la file ?

Exercice 12

Un jeu de 32 cartes a été truqué : on a remplacé une carte autre que l'as de pique par un deuxième as de pique.

1. On tire simultanément n cartes (n<32). Quelle probabilité a-t-on de de déceler la supercherie ?
2. On répète à présent k fois l'expérience précédente avec $n = 4$. À partir de quelle valeur de k la probabilité de déceler la supercherie est-elle supérieure ou égale à $0,9$?

Exercice 13

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. On suppose $P(A) > 0$. Comparer $P(A \cap B | A \cup B)$ et $P(A \cap B | A)$.

Exercice 14

On dispose trois coffres sur une table. Le premier coffre contient deux pièces d'or, le second deux pièces d'argent et le dernier une pièce d'or et une pièce d'argent. Toutes ces pièces sont indiscernables au toucher.
Un candidat est invité à choisir à l'aveugle et au hasard l'un des coffres. Il saisit ensuite, toujours à l'aveugle, l'une des pièces de ce coffre. Elle est en or.

Quelle est la probabilité que l'autre pièce du coffre soit également en or ?

Exercice 15

1. J'ai deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que mon autre enfant soit un garçon ?
2. J'ai deux enfants et mon ainée est une fille. Quel est la probabilité que mon autre enfant soit un garçon ?
3. Une famille a quatre enfants. Je parie qu'il y a trois enfants du même sexe et un quatrième de l'autre sexe. Pourquoi ?

Exercice 16

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boîtes de clé USB. 5% des boîtes sont abimées. Le gérant estime que :

— 60% des boîtes abimées contiennent au moins une clé défectueuse ;
— 98% des boîtes non abimées ne contiennent aucune clé défectueuse.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : « la boite est abimée » et par D l'événement « la boite achetée contient au moins une clé défectueuse ».

1. Donner les probabilités de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P(D|A)$, $P(D|\bar{A})$, $P(\bar{D}|A)$ et $P(\bar{D}|\bar{A})$.
2. Le client constate qu'une des clés achetées est défectueuse. Quelle est a la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abimée ?

Exercice 17

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

Exercice 18

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice 19

Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'apparition d'un six soit de $1/2$. On choisit un dé au hasard, on le jette, et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

Exercice 20

Une usine fabrique des pièces, avec une proportion de 0,05 de pièces défectueuses. Le contrôle des fabrications est tel que :

— si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0,96.
— si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité

1. qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Exercice 21

Vous jouez à pile ou face avec un autre joueur. Il parie sur pile, lance la pièce, et obtient pile. Quelle est la probabilité pour qu'il soit un tricheur ? (On l'exprimera en fonction de la proportion de tricheurs dans la population).

Exercice 22

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1, 50% pour la classe R_2, et 30% pour la classe R_3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?
2. Si M. Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Exercice 23

On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor a été placé dans l'un des ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quel est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Exercice 24

On se donne $N+1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne numéro k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans l'urne choisie, on tire des boules avec remise.

1. Quelle est la probabilité que la $(n+1)$-ième boule tirée soit blanche sachant que les n précédentes l'étaient toutes ?
2. Que devient cette probabilité lorsque N tend vers $+\infty$?

Exercice 25

1. Soient A, B, C trois événements. Montrer :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

2. On dispose de 3 composants électriques C_1, C_2 et C_3 dont la probabilité de fonctionnement est p_i, et de fonctionnement totalement indépendant les uns des autres. Donner la probabilité de fonctionnement du circuit
   (a) si les composants sont disposés en série.
   (b) si les composants sont disposés en parallèle.
   (c) si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

Exercice 26

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une hasard, et on considère les événements A = « tirage d'un nombre pair » et B = « tirage d'un multiple de 3 ». Les événements A et B sont-ils indépendants ?
Même question avec une urne contenant 13 boules.

Corrigé de la planche n° 16: Probabilités

Exercice 1

1. $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
2. $A \cap B \cap \overline{C}$
3. $A \cap B \cap C$
4. $A \cup B \cup C$
5. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
6. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
7. $\overline{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)}$
8. $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (B \cap C \cap \overline{A})$

Exercice 2

On cherche α telle que, pour tout $k \in [\![1;\ n]\!]$, $P(k) = \alpha k$.
Or, on sait que

$$P(\Omega) = 1 = \sum_{1 \leq \leq n} P(k) = \sum_{1 \leq k \leq n} (\alpha k) = \alpha \times \frac{n(n+1)}{2}$$

On obtient donc

$$\alpha = \frac{2}{n(n+1)}$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1;\ n]\!]$, $P(k) = \dfrac{2k}{n(n+1)}$.

Exercice 3

On sait que $(A \cap B) \subset A$ et $(A \cap B) \subset B$ donc $P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$.

D'autre part, $(A \cup B) \subset \Omega$ donc $P(A \cup B) \leq 1$ ce qui donne $P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$ et ainsi $P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B)$. Enfin, on a bien sûr, $P(A \cap B) \geq 0$. Ces deux dernières inégalités montrent que $\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leq P(A \cap B)$.

Exercice 4

On va noter C : « les cartes sont de la même couleur. » et D : « les cartes sont toutes les trois de couleurs différentes. »

1. Pour la résolution, on décide que l'ordre n'a pas d'importance.
   L'univers équiprobable est ainsi constitué de l'ensemble des mains à trois cartes. $\#\Omega = \binom{32}{3}$ (nombre de combinaisons de trois éléments pris parmi 52).
   $\#C = 4 \times \binom{4}{3} \times 48$ et $\#D = \binom{4}{3} \times 13^3$.
   On en déduit, $P(C) = \dfrac{\#C}{\#\Omega}$ et $P(D) = \dfrac{\#D}{\#\Omega}$.
2. C'est kif-kif !
3. Là, c'est différent.
   Pour la résolution, on décide que l'ordre est important ! (mais on peut ne pas faire ce choix mais dans ce cas les calculs sont nettement plus compliqués).
   Ainsi l'univers équiprobable est constitué de 52^3 issues (nombre d'applications de $[\![1;\ 3]\!]$ vers les 52 cartes).
   Dans ce cas, $\#C = 4 \times 13^3$ et $\#D = 4 \times 3 \times 2 \times 13^3$.

Exercice 5

Paradoxe du Chevalier de Méré.

1. L'univers est formé des résultats des quatre lancers. Il comporte 6^4 issues.
   On note A l'évènement considéré (j'ai au moins un six). $\overline{A}$ comporte 5^4 issues.
   Ainsi, $P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0,52$. Ce pari est donc favorable.
2. L'univers est formé des résultats des vingt-quatre lancers. Chaque lancer comporte 36 résultats possibles. Ainsi l'univers comporte 36^{24} issues.
   On note B l'évènement considéré (j'ai au moins un double six). $\overline{B}$ comporte 35^{24} issues.
   Ainsi, $P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0,49$. Ce pari est donc défavorable.

Exercice 6

L'univers est $\Omega = [\![1;\ n]\!] \times [\![1;\ m]\!]$, son cardinal est $n \times m$.
On note R_1, R_2, $\cdots$, R_n les évènements correspondant au résultat de D.
Enfin, on note S, l'évènement : « la face de D' est supérieure à la face de D »
R_1, R_2, $\cdots$, R_n forme un système complet d'évènements. On peut donc utiliser la formule des probabilité totales.
En notant que, pour $k \geq m$, $P(S|R_k) = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
P(S) &= P(S|R_1) \times P(R_1) + P(S|R_2) \times P(R_2) + \cdots + P(S|R_{m-1}) \times P(R_{m-1}) \\
&= \frac{m-1}{m} \times \frac{1}{n} + \frac{m-2}{m} \times \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{m} \times \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{mn}\left[(m-1) + (m-2) + \cdots + 1\right] \\
&= \frac{1}{mn} \times \frac{m(m-1)}{2} \times n \\
&= \frac{m-1}{2n}
\end{aligned}$$

Exercice 9

1. Ici, la grosse difficulté consiste en la description de l'univers.
   L'univers est formé de l'ensemble des deux nombres du premier tirage et des trois nombres du second tirage.
   Par exemple, $\{\{1;\ 2\};\ \{1;\ 3;\ 4\}\}$ est un élément de l'univers.
   Il comporte ainsi $\binom{n}{2} \times \binom{n}{3}$ issues.
   On note T l'évènement « les nombres du premier tirage sont aussi choisis au second tirage. »
   On note E_1, l'évènement « le premier tirage est $\{1;\ 2\}$ ».
   Sachant que les deux tirages sont indépendants, $P(T) = P(T|E_1)$. On cherche donc le nombre de second tirages qui contiennent $\{1;\ 2\}$: il y en a $n-2$: cela correspond juste au choix du troisième nombre. Comme il y a $\binom{n}{3}$ second tirages possibles, on a ainsi

$$P(T) = \frac{n-2}{\binom{n}{3}} = \frac{n-2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2}} = \frac{3 \times 2}{n(n-1)}$$

2. On reprend les mêmes notations. On note S l'évènement « aucun des nombres du premier tirage n'est présent au second. »
   Pour les mêmes raisons, on a $P(S) = P(S|E_1)$. Obtenir S sachant E_1 revient à choisir 3 nombres parmi $n-2$ nombres restant. On obtient ainsi :

$$P(S) = \frac{\binom{n-2}{3}}{\binom{n}{3}} = \frac{\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3\times 2}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2}} = \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}$$

Exercice 10

On peut résoudre cet exercice avec un arbre ou bien avec du dénombrement uniquement.
On va choisir le dénombrement !
Notons E_k cet évènement.
On note W_i, une boule blanche est choisie au i-ème tirage.
On a donc $E_k = W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_{k-1} \cap \overline{W_k}$.
On cherche, pour tout k,

$$P\left(W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_{k-1} \cap \overline{W_k}\right)$$

Ainsi, si $k-1 > b$, on a $P(E_k) = 0$. On se place donc dans le cas contraire, c'est à dire $k-1 \leq b$.
On considère ici que l'ordre des boules est important. Soit Ω l'univers formé des tirages des k premières boules. $\#\Omega = (n+b) \times (n+b-1) \times \cdots (n+b-k+1)$.

On a donc $\#\left(W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap \cdots \cap W_{k-1} \cap \overline{W_k}\right) = b \times (b-1) \times (b-2) \times \cdots \times (b-k+2) \times n$, soit

$$P(E_k) = P\left(W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap \cdots \cap W_{k-1} \cap \overline{W_k}\right) = \frac{b \times (b-1) \times (b-2) \times \cdots \times (b-k+2) \times n}{(n+b) \times (n+b-1) \times \cdots (n+b-k+1)}$$

Exercice 11

Sans nuire à la généralité, on peut imaginer que les n places sont numérotées et que les numéros de 1 à p correspondent à notre groupe favori. On imagine que les places sont mélangées avant l'arrivée des gagnants.

L'univers Ω correspond aux mélanges possibles, on a $\#\Omega = n!$.

Supposons que l'on est en position k. On note G l'évènement « la place en position k est celle de notre groupe favori. »
Pour réaliser G, il faut choisir la place de notre groupe favori en position k : p possibilités. Puis, il faut mettre les autres places aux emplacements restants : $(n-1)!$ possibilités.

Finalement, $P(G) = \dfrac{p(n-1)!}{n!} = \dfrac{p}{n}$, ce qui est conforme à l'intuition : cette probabilité ne dépend pas de notre position k.

Exercice 12

1. L'univers équiprobable est ici constitué de l'ensemble des mains de n cartes, son cardinal est $\#\Omega = \binom{32}{n}$.
   On peut déceler la supercherie si et seulement si les deux as de pique se trouvent dans la main prélevée. Soit S cet évènement. On a $\#S = \binom{30}{(n-2)}$.
   Finalement, $P(S) = \dfrac{\#S}{\#\Omega}$.
2. On note S_i l'évènement : on décèle la supercherie à la i-ème répétition.

   L'évènement recherché est le contraire de $\overline{S_1} \cap \overline{S_1} \cap \cdots \overline{S_k}$.
   Or, tous ces évènements sont indépendants et de même probabilité $1 - P(S_1)$.
   On cherche donc k tel que $1 - (1 - P(S_1))^k \geq 0,9$, c'est à dire $(1 - P(S_1))^k \leq 0,1$.
   On résout donc

$$\left(1 - \frac{\binom{30}{2}}{\binom{32}{4}}\right)^k \leq 0,1 \iff k \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln\left(1 - \frac{\binom{30}{2}}{\binom{32}{4}}\right)}$$
$$\iff k \geq 190$$

   Il faut répéter 190 fois l'expérience !

Exercice 14

On note C_1, C_2, C_3 les évènements correspondants au choix du coffre. On note ensuite G_1 la première pièce choisie est en or et G_2 la seconde pièce choisie est en or.
On cherche ici $P(G_2|G_1) = \dfrac{P(G_2 \cap G_1)}{P(G_1)}$.
On sait que $P(G_2 \cap G_1) = P(C_1) = \dfrac{1}{3}$. Pour calculer $P(G_1)$ on utilise la formule des probabilités totales.
On a $P(G_1) = P(G_1|C_1) \times P(C_1) + P(G_1|C_2) \times P(C_2) + P(G_1|C_3) \times P(C_3) = 1 \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} + 0 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}$.
On obtient finalement :

$$P(G_2|G_1) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Exercice 15

1. Ici, on considère que l'ordre des enfants est important. L'univers est constitué de 4 issues.

   On note F l'évènement « j'ai une fille ». On a $P(F) = \dfrac{3}{4}$.

   On note G l'évènement « j'ai une fille et un garçon ». On a $P(G) = \dfrac{1}{2}$.

   On en déduit, $P(G|F) = \dfrac{P(G \cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(G)}{P(F)}$ (car $G \subset F$).

   Ainsi, $P(G|F) = \dfrac{2}{3}$.

2. On note A l'évènement « l'aînée est une fille ». On a $P(A) = \dfrac{1}{2}$.
   On note H l'évènement : « mon premier est un garçon et ma seconde est une fille ». Sa probabilité est $\dfrac{1}{4}$.
   On cherche $P(H|A) = \dfrac{P(H \cap A)}{P(A)} = \dfrac{1}{2}$.

3. L'univers est constitué alors de $2^4 = 16$ issues équiprobables. Soit l'évènement H : mon pari est correct.
   H est constitué de $4 \times 2 = 8$ issues. Mon pari a donc une chance sur deux d'être vrai.

Exercice 16

1. Par lecture de l'énoncé : $P(A) = 0,05$, $P(\bar{A}) = 0,95$, $P(D|A) = 0,6$ et $P\left(D|\bar{A}\right) = 0,02$.
2. C'est la formule de Bayes.
   $P(A|D) = \dfrac{P(D|A) \times P(A)}{P(D)} = \dfrac{P(D|A) \times P(A)}{P(D|A) \times P(A) + P\left(D|\bar{A}\right) \times P\left(\bar{A}\right)} \simeq 0,6122$.

Exercice 17

On note B_1 et B_2 les évènements correspondants aux tirages d'une boule blanche au premier, au second tirage.
On note N_3 l'évènement correspondant au tirage d'une boule noire au troisième tirage.

Comme on tire 3 boules sans remises et que l'ordre compte, l'univers Ω est constitué de toutes les manières de tirer ces 3 boules. Il comporte donc $7 \times 6 \times 5 = 210$ issues.
Il y a $4 \times 3 \times 3$ manières d'obtenir le tirage voulu. La probabilité recherchée est donc :

$$\frac{4 \times 3 \times 3}{7 \times 6 \times 5} = \frac{6}{35}$$

Exercice 18

Soit H l'évènement : « l'étudiant répond au hasard. »
Soit B l'évènement : « l'étudiant a la bonne réponse. »
On a, par lecture de l'énoncé, $P(B|H) = \dfrac{1}{m}$, $P\left(B|\bar{H}\right) = 1$, $P\left(\bar{H}\right) = p$.
On cherche

$$P\left(\bar{H}|B\right) = \frac{P\left(B|\bar{H}\right) \times P\left(\bar{H}\right)}{P(B|H) \times P(H) + P\left(B|\bar{H}\right) \times P\left(\bar{H}\right)} = \frac{p}{p + \frac{1-p}{m}} = \frac{mp}{1 + p(m-1)}$$

Exercice 19

On note T l'évènement « le dé est pipé » et S l'évènement « j'ai obtenu un six. »

Par lecture de l'énoncé, $P_T(S) = \dfrac{1}{2}$, $P_{\overline{T}}(S) = \dfrac{1}{6}$ et $P(T) = \dfrac{1}{4}$.
On cherche à calculer $P_S(T)$. Pour ce faire, on exploite la formule de Bayes :

$$P_S(T) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)} = \frac{P_T(S) \times P(T)}{P_T(S) \times P(T) + P_{\overline{T}}(S) \times P\left(\overline{T}\right)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

Exercice 20

On note D la pièce est défectueuse et A elle est acceptée.

1. Une erreur de contrôle correspond au cas où elle est défectueuse et acceptée ou bien elle est bonne et elle est refusée.
   On note E cet évènement. On a $E = (D \cap A) \cup \left(\overline{D} \cap \overline{A}\right)$.
   On calcule ensuite $P(D \cap A) = P(A|D) \times P(D) = 0,02 \times 0,05 = 0,001$ et $P\left(\overline{D} \cap \overline{A}\right) = P\left(\overline{A}|\overline{D}\right) \times P\left(\overline{D}\right) = 0,04 \times 0,95 = 0,038$.
   Finalement,
   $$P(E) = P(D \cap A) + P\left(\overline{D} \cap \overline{A}\right) = 0,039$$
2. On cherche $P\left(D|A\right) = \dfrac{P\left(D \cap A\right)}{P(A)}$. Par la formule de Bayes, on obtient :
   $$\begin{aligned} P\left(D|A\right) &= \frac{P(A|D) \times P(D)}{P(A|D) \times P(D) + P\left(A|\overline{D}\right) \times P\left(\overline{D}\right)} \\ &= \frac{0,02 \times 0,05}{0,02 \times 0,05 + 0,96 \times 0,95} \\ &= \frac{0,001}{0,913} \\ &\simeq 0,0011 \end{aligned}$$

Exercice 22

1. On note A l'évènement « la personne va avoir un accident dans l'année. »
   Enfin, on note R_i les évènements « la personne appartient à la classe de risque R_i »

   On a, par la formule des probabilités totales :
   $$P(A) = P(A|R_1)P(R_1) + P(A|R_2)P(R_2) + P(A|R_3)P(R_3) = 0,175$$
2. On cherche
   $$P\left(R_1|\overline{A}\right) = \frac{P\left(\overline{A} \cap R_1\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{P\left(\overline{A}|R_1\right) \times P(R_1)}{1 - P(A)} \simeq 0,2303$$

Exercice 23

On note T l'évènement « un trésor a été placé dans l'un des coffres. »
On note V l'évènement « les $N-1$ premier coffres sont vides. »

On a $P(T) = p$, $P(V|T) = \dfrac{1}{N}$ et $P\left(V|\overline{T}\right) = 1$.
On cherche $P(T|V)$. En effet, si les $N-1$ premiers coffres sont vides alors le dernier coffre contient un trésor uniquement dans le cas où un trésor a effectivement été déposé dans l'un des coffres. On trouve cette probabilité grâce à la formule de Bayes :

$$P(T|V) = \frac{P(V \cap T)}{P(V)} = \frac{P(V|T)P(T)}{P(V|T)P(T) + P\left(V|\overline{T}\right)P\left(\overline{T}\right)} = \frac{\frac{p}{N}}{(1-p) + \frac{p}{N}} = \frac{p}{p + N(1-p)}$$

Exercice 24

1. Pour tout $k \in [\![0;\ N]\!]$, on note U_k : « on a choisi l'urne numéro k. »

   On a $P(U_k) = \dfrac{1}{N+1}$.

   Pour tout $i \in [\![1;\ n+1]\!]$, on note B_n : « la boule tirée est blanche. »

   On a, pour tout i et pour tout k, $P(B_n|U_k) = \dfrac{k}{N}$.

   Il s'agit de calculer $P\left(B_{n+1}|B_n \cap \cdots \cap B_1\right) = \dfrac{P\left(B_{n+1} \cap B_n \cap \cdots \cap B_1\right)}{P\left(B_n \cap \cdots \cap B_1\right)}$.

   Dans les deux cas, on exploite la formule des probabilités totales, sachant que les (U_k) forment une système complet d'évènements. Ainsi :

$$\begin{aligned}
P\left(B_{n+1} \cap B_n \cap \cdots \cap B_1\right) &= \sum_{k=0}^{N} P\left(B_{n+1} \cap B_n \cap \cdots \cap B_1|U_k\right) P(U_k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{N+1}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} \\
&= \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} \\
\text{et aussi :} P\left(B_n \cap \cdots \cap B_1\right) &= \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n}
\end{aligned}$$

   En effet, pour une urne choisie, les tirages se font avec remise et sont donc indépendants.

   Finalement :

$$P\left(B_{n+1}|B_n \cap \cdots \cap B_1\right) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n}}$$

2. Il faut invoquer des résultats d'intégration pour déterminer cette limite.

   En effet, la grandeur $\frac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n} = \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n}$ correspond à la somme des N rectangles de Riemann à droite de la fonction $x \mapsto x^n$ sur l'intervalle $[0;\ 1]$. On a donc :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n} = \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

   De même, on calcule $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} = \frac{1}{n+2}$.

   Finalement :

$$\lim_{N\to+\infty} P\left(B_{n+1}|B_n \cap \cdots \cap B_1\right) = \frac{n+1}{n+2}$$

Exercice 25

1. On utilise la formule de l'union pour deux évènements ainsi que les règles de calcul sur l'union et l'intersection.

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P\left((A \cup B) \cup C\right) \\
&= P(A \cup B) + P(C) - P\left((A \cup B) \cap C\right) \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P\left((A \cap C) \cup (B \cap C)\right) \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - \left[P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)\right]
\end{aligned}$$

> On pour peut aussi déterminer une formule plus générale pour une union de n d'évènements en procédant par récurrence. On l'appelle « formule du crible (ou de Poincaré) ».

1. On notera H_i l'évènement « le i-ème composant fonctionne. » et K l'évènement « le circuit fonctionne. »

   (a) Le circuit fonctionne lorsque les trois composants fonctionnent simultanément. Sachant que les composants sont mutuellement indépendants, on en déduit :

   $$P(K) = P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = p_1 p_2 p_3$$

   (b) Le circuit fonctionne lorsque l'un des composants au moins fonctionne. On en déduit, d'après la première question et toujours en considérant l'hypothèse d'indépendance mutuelle :

   $$P(K) = P(H_1 \cup H_2 \cup H_3) = p_1 + p_2 + p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3$$

   (c) Cette fois-ci :

   $$\begin{aligned}
   P(K) &= P\left(H_1 \cap (H_2 \cup H_3)\right) \\
   &= P\left((H_1 \cap H_2) \cup (H_1 \cap H_3)\right) \\
   &= P(H_1 \cap H_2) + P(H_1 \cap H_3) - P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) \\
   &= p_1 p_2 + p_1 p_3 - p_1 p_2 p_3
   \end{aligned}$$

Exercice 26

On doit calculer $P(A \cap B)$ puis $P(A)$ et $P(B)$ et vérifier si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

En calculant les cardinaux de cet univers très simple à 12 issues, on obtient :
$P(A) = \dfrac{1}{2}$ et $P(B) = \dfrac{1}{3}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$.
On vérifie donc bien que les évènement sont indépendants dans le cas d'un urne à 12 boules.

Dans le cas d'une urne à 13 boules :
$P(A) = \dfrac{6}{13}$ et $P(B) = \dfrac{4}{13}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{2}{13}$. On a donc pas $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Les évènements ne sont alors plus indépendants.

Planche n° 17: Polynômes

Exercice 1

a désigne un réel et n un entier naturel non nul.
Soient $(c_k)_{0\leq k\leq n}$ n+1 nombres réels et soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} c_k(X-a)^k$

1. Déterminer $P(a)$.
2. (a) Déterminer l'expression de $P'(X)$ puis la valeur de $P'(a)$.
   (b) Déterminer l'expression de $P''(X)$ puis la valeur de $P''(a)$.
3. Généralisation :
   Déterminer pour tout $0 \leq j \leq n$, $P^{(j)}(X)$ ainsi que $P^{(j)}(a)$

Exercice 2

Soit P un polynôme.
En utilisant la dérivée d'un produit de polynômes, montrer, par récurrence sur k :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (P^k)' = kP'P^{k-1}$$

Exercice 3

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

a) $P = P'P''$.
b) $(P')^2 = 4P$.
c) $P(X^2) = (X^2+1)P$
d) $P \circ P = P$.

Exercice 4

Effectuer la division euclidienne :

a) de $8X^7 - 7X^3 + 1$ par $X^2 - X + 1$;
b) de $3X^4 - X^3 + X^2 + 4$ par $X - 5$;
c) de $2X^5 + 1$ par $X^3 + 2X + 2$.

Exercice 5

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ pour que X^2+2 divise $X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2$.

Exercice 6

Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B dans chacun des cas suivants :

a) $A = X^n$ et $B = X^2 - 3X + 2$;
b) $A = X^n$ et $B = (X-1)^2$;
c) $A = (X\sin t + \cos t)^n$ et $B = X^2 + 1$, où t est un réel.

Exercice 7

Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels possède (au moins) une racine réelle.

Exercice 8

Montrer par deux méthodes différentes que X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9

a) Déterminer l'ordre de multiplicité de 2 en tant que racine de $X^5 - 8X^4 + 23X^3 - 28X^2 + 12X$.

b) Déterminer l'ordre de multiplicité de -1 en tant que racine de $X^5 + 3X^4 - X^3 - 11X^2 - 12X - 4$.

c) Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine de $X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$.

Exercice 10

Soit $P = X^4 + 6X^3 + 10X^2 + 3X - 6$.

a) Effectuer la division euclidienne de P par $X^2 + 3X$.

b) En déduire l'ensemble des racines de P.

Exercice 11

Déterminer dans $\mathbb{K}[X]$ tous les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé.

Exercice 12

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $P(a) > 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)}(a) \geq 0$. Montrer que P ne possède pas de racines dans $[a, +\infty[$.

Exercice 13

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose qu'il existe une infinité de réels α tels que $P(\alpha)$ est réel. Montrer que P est à coefficients réels.
(*Indication* : considérer le polynôme Q dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P).

Exercice 14

Déterminer tous les polynômes P in $\mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

1. $P(k) = k^3$;
2. $P(k) = \sqrt{k^2 - 1}$;
3. $P(k) = 2^k$.

Exercice 15

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3, possédant deux racines réelles. Montrer que la troisième racine est également réelle.

Exercice 16

Pour chacun des polynômes suivants, donner la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

$P_1 = X^4 - 4$ $\quad P_2 = X^4 + 1$ $\quad P_3 = X^6 + 27$

$P_4 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$ $\quad P_5 = X^5 - 10X^4 + 25X^3 - 25X^2 + 10X - 1$ $\quad P_6 = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$

$P_7 = X^4 + 12X - 5$

Indication: Pour P_6, la somme de deux des racines est égale à la troisième ; et pour P_7, il y a deux racines dont la somme vaut 2.

Exercice 17

On considère le polynôme $P = (1 - X^2)^3 + 8X^3$.

a) Donner les solutions complexes de l'équation $z^3 = -1$.

b) En déduire les solutions complexes de l'équation $\left(\dfrac{1 - z^2}{2z}\right)^3 = -1$.

c) En déduire la factorisation du polynôme P dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$.

Exercice 18

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme de degré 3 à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que P est scindé sur $\mathbb{K}$ et on note x, y et z ses racines.

a) Exprimer en fonction de a, b, c et d les quantités $x + y + z$, $xy + xz + yz$, et xyz.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système $(S) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ xyz = -4 \end{cases}$.

c) Exprimer les quantités $x^2 + y^2 + z^2$ et $x^3 + y^3 + z^3$ en fonction de $x + y + z, xy + xz + yz$ et xyz.

d) Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système $(S) : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{cases}$.

Exercice 19

Polynômes interpolateurs de Lagrange.
Soient $n + 1$ nombres réels $x_0, \ldots, x_n$ tels que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.

1. Soit deux polynômes P et Q de degré au plus n.
   Montrer que si, pour tout $0 \leq i \leq n$, $P(x_i) = Q(x_i)$ alors $P = Q$.
   Indication: On pourra examiner les racines de $P - Q$.
2. Pour tout $0 \leq i \leq n$, on pose L_i le polynôme défini par
$$L_i(X) = \frac{\prod\limits_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (X - x_j)}{\prod\limits_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)}$$
   (a) Quel est le degré de L_i ?
   (b) Déterminer pour tout $(i;\ j) \in [\![0;\ n]\!]^2$, $L_i(x_j)$.
3. En utilisant tout ce qui précède, montrer que, pour tous nombres $(y_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique polynôme P de degré au plus n tel que, pour tout $0 \leq i \leq n$, $P(x_i) = y_i$.
   Indication: On pourra exprimer P comme une combinaison linéaire des L_i.

Exercice 20

Formule de Liebnitz
Soient A et B deux polynômes. Montrer par récurrence que, pour tout entier n,
$$(AB)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{(k)} B^{(n-k)}$$

Exercice 21

Fonctions symétriques
Soit n un entier naturel non nul et $a_n \in \mathbb{K}$ un nombre.
Enfin, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ désignent n nombres non nécessairement distincts.
On s'intéresse au polynôme

$$P(X) = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$$

1. (a) Déterminer le coefficient de degré n de ce polynôme.
   (b) Déterminer le coefficient de degré $n-1$ de ce polynôme.
   (c) Déterminer le coefficient de degré 0 de ce polynôme.
2. (a) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ en fonction des coefficients de P.
   (b) En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n} \alpha_k$ en fonction des coefficients de P.

Exercice 22

n désigne un entier naturel et A désigne un polynôme fixé.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'ensemble des polynômes ?

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] / \deg(P) \leq n\} \qquad E_1 = \{P \in \mathbb{K}[X] / \deg(P) \text{ est pair}\}$$
$$E_2 = \{P \in \mathbb{K}[X] / P \text{ est pair}\} \qquad E_3 = \{P \in \mathbb{K}[X] / P(1) = 0\}$$
$$E_4 = \{A(X)P, \text{ avec } P \in \mathbb{K}[X]\} \qquad E_5 = \left\{P^2, \text{ avec } P \in \mathbb{K}[X]\right\}$$

Exercice 23

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{K}$.
On pose $E = \mathbb{K}_n[X]$ et on rappelle que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Pour tout $k \in [\![0;\ n]\!]$, on pose $A_k = (X-a)^k$.
   Montrer que les $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ forment une base de E.
2. Déterminer les coordonnées de X^n dans cette base.

Exercice 24

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{K}_n[X]$ et on rappelle que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Dire si les applications suivantes sont des morphismes de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et si, c'est le cas, déterminer leurs noyaux et leurs images.

$$\varphi_a : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ P & \mapsto & P(0) \end{array} \qquad \varphi_b : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^2 \\ P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(0)^2 \\ P'(0) \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\varphi_c : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ P & \mapsto & P(1) - P'(1) \end{array} \qquad \varphi_d : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}_1[X] \\ P & \mapsto & P(0) + XP'(0) \end{array}$$

$$\varphi_e : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ P & \mapsto & P(1)P'(0) \end{array} \qquad \varphi_f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}_{n+1}[X] \\ P & \mapsto & P(1)XP(X) \end{array}$$

Corrigé de la planche n° 17: Polynômes

Exercice 1

1. On a $P[X] = c_0 + c_1(X-a) + c_2(X-a)^2 + \cdots + c_n(X-a)^n$ donc
   $P(a) = c_0 + 0 + \cdots + 0 = c_0$.
2. (a) On a $P'[X] = c_1 + 2c_2(X-a) + \cdots + nc_n(X-a)^{n-1}$ donc $P'(a) = c_1$.
   (b) On a $P''[X] = 2c_2 + 3 \times 2 \times (X-a) + \cdots + n(n-1)c_n(X-a)^{n-2}$ donc $P''(a) = 2c_2$.
3. On a
$$P^{(j)}[X] = \sum_{k=j}^{n} \tfrac{k!}{(k-j)!} c_k (X-a)^{k-j}$$
   On obtient $P^{(j)}(a) = j!c_j$.

Exercice 2

Initialisation :
Je cherche à prouver $(P^1)' = 1 \times P' \times P^{1-1}$. C'est vrai.
Hérédité :
Je suppose que, pour un certain k, on a $(P^k)' = kP'P^{k-1}$. Je veux prouver que la formule reste vraie au rang $k+1$.
Or $P^{k+1} = P^k \times P$. Donc $(P^{k+1})' = P'P^k + (P^k)'P = P'P^k + kP'P^{k-1}P = P'P^k + kP'P^k = (k+1)P'P^k$ donc l'hypothèse est héréditaire !
Par récurrence, elle est vraie pour tout k.

Exercice 3

a) Le polynôme nul est solution. En revanche ni les polynômes de degré un, ni les polynômes de degré zéro ne sont solutions.
On considère ainsi un polynôme P de degré $n \geq 2$. Une analyse de degré donne
$$\deg(P) = \deg(P) - 1 + \deg(P) - 2 \iff \deg(P) = 3$$
Ainsi, la solution, si elle existe, doit être un polynôme de degré 3. On cherche donc $a \neq 0$, b, c et d tel que $P[X] = aX^3 + bX^2 + cX + d$ soit solution.
L'équation $P = P'P''$ donne, par identification, un système d'équations sur les coefficients de P :
$$\begin{cases} a = 18a^2 \\ b = 18ab \\ c = 6ac + 4b^2 \\ d = 2bc \end{cases}$$
La première équation donne $a = \dfrac{1}{18}$.
Si $a = \dfrac{1}{18}$, b peut prendre n'importe quelle valeur et on a ensuite $c = 6b^2$ et $d = 12b^3$.
Pour tout nombre b, le polynôme $P[X] = 12b^3 + 6b^2X + bX^2 + \dfrac{1}{18}X^3$ est donc solution du problème.
Finalement, les solutions sont le polynôme nul et tous les polynômes $\{12b^3 + 6b^2X + bX^2 + \dfrac{1}{18}X^3$ avec $b \in \mathbb{K}\}$.

b) Le polynôme nul convient mais aucun polynôme constant non nul ne convient. Et une analyse de degré montre que si un polynôme de degré supérieur ou égal à un est solution alors son degré est nécessairement deux.
On cherche donc a, b et c tels que $P[X] = aX^2 + bX + c$ soit solution.
Encore une fois, une identification donne le système :

$$\begin{cases} 4a = 4a^2 \\ 4b = 4ab \\ 4c = b^2 \end{cases}$$

On obtient comme solution le polynôme nul ou bien l'ensemble des polynômes qui s'écrivent, pour $b \in \mathbb{K}$:

$$P(X) = X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$$

c) Une petite analyse de degré montre que P est forcément de degré 2 ou bien nul.
On cherche donc a, b et c tels que $P[X] = aX^2 + bX + c$ soit solution.
L'équation donne alors :

$$aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (c + a)X^2 + bX + c$$

Une identification donne le système :

$$\begin{cases} a = a \\ 0 = b \\ b = c + a \\ 0 = b \\ c = c \end{cases}$$

Ainsi, pour tout a, le polynôme $P[X] = aX^2 - a$ est solution (cette forme inclut bien le polynôme nul, dans le cas où $a = 0$).

d) L'analyse des degrés donne $n = 1$ ou $n = 0$ ou $n = -\infty$.
On vérifie facilement que tout polynôme constant fonctionne.
Examinons maintenant les polynômes de degré 1.
On cherche a et b tel que $P[X] = aX + b$ soit solution.
Or, $P \circ P[X] = a(aX + b) + b = a^2X + ab + b$. On obtient ainsi un système équivalent sur a et b par identification :

$$\begin{cases} a = a^2 \\ b = ab + b \end{cases}$$

Le cas $a = 0$ donne un polynôme constant. Le cas $a = 1$ donne $b = 0$.
Ainsi, le polynôme X est solution.

Exercice 4

a) quotient : $8X^5 + 8X^4 - 8X^2 - 15X - 7$.
reste : $8X + 8$

b) quotient : $3X^3 + 14X^2 + 71X + 355$.
reste : 1779

c) quotient : $2X^2 - 4$.
reste : $-4X^2 + 8X + 9$

Exercice 5

On fait la division euclidienne de $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ par $X^2 + 2$. Le reste vaut $\mu - 2 + (6 - 2\lambda)X$. Ce reste est nul si et seulement si $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$, ce qui nous donne la condition :

$$\begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

Exercice 6

a) Le calcul des racines de B donne $B = (X - 2)(X - 1)$.
Le reste est de degré au plus 1 donc affine. On cherche deux nombres m et p et un polynôme Q tels que

$$A[X] = (X - 1)(X - 2)Q[X] + mX + p$$

L'évaluation de cette égalité en $X = 1$ et $X = 2$ donne le système :

$$\begin{cases} 1 = m + p \\ 2^n = 2m + p \end{cases}$$

On obtient facilement m et p et donc l'expression du reste :

$$R[X] = (2^n - 1)X + (2^n - 2)$$

b) 1 est racine double de P.
Le reste est de degré au plus 1 donc affine. On cherche deux nombres m et p et un polynôme Q tels que

$$A[X] = (X - 1)^2 Q[X] + mX + p$$

L'évaluation de cette relation en $X = 1$ donne :

$$1 = m + p$$

Pour prendre en compte le fait que 1 est racine double, on dérive la relation. On obtient

$$A'[X] = 2(X - 1)Q[X] + (X - 1)^2 Q'[X] + m$$

En évaluant cette relation en $X = 1$, on obtient :

$$A'[1] = m$$

Ainsi, $m = n$ et $p = 1 - n$. Le reste est donc

$$R[X] = nX + 1 - n$$

c) i et $-$i sont les racines de $X^2 + 1$. On évalue donc la relation en i et $-$i, ce qui permet de déterminer le coefficient directeur m et l'ordonnée à l'origine du reste p qui est de degré au plus 1.
On obtient le système

$$\begin{cases} (\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t))^n = m\mathrm{i} + p \\ (\cos(t) - \mathrm{i}\sin(t))^n = -m\mathrm{i} + p \end{cases}$$

À l'aide de la formule de Moivre, on obtient le reste :

$$R[X] = \sin(nt)X + \cos(nt)$$

Exercice 7

C'est une application du théorème des valeurs intermédiaires.
On suppose qu'un tel polynôme P, de degré $2n+1$ s'écrit

$$P[X] = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{2n+1} X^{2n+1}$$

On considère alors la fonction polynômiale associée. On a ainsi pour tout réel x non nul :

$$P(x) = a_{2n+1} x^{2n+1} \left(1 + \frac{a_{2n}}{x} + \frac{a_{2n-1}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^{2n+1}}\right)$$

Si $a_{2n+1} > 0$, on en déduit $\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} P = -\infty$.
Dans le cas contraire, on aura $\lim\limits_{+\infty} P = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} P = +\infty$.
Dans les deux cas, comme P est une fonction continue, on en déduit, par application du théorème des valeurs intermédiaires que P s'annule.

Exercice 8

- Le binôme de Newton donne :

$$\begin{aligned}(X+1)^n - nX - 1 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - nX - 1 \\ &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^k \\ &= X^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{(k+2)} X^k\end{aligned}$$

  Ainsi X^2 divise bien $(X+1)^n - nX - 1$.
- Posons $P[X] = (X+1)^n - nX - 1$.
  Il s'agit de prouver que 0 est au moins racine double de P.
  On vérifie que 0 est racine de $P[X]$. On calcule ensuite $P'[X] = n(1+X)^{n-1} - n$ et on vérifie que 0 est aussi racine de P'.

Exercice 9

> On rappelle que α est racine de P de multiplicité m si et seulement si pour tout $0 \leq k \leq m-1$, $P^{(k)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$

a) On calcule $P(2) = 0$, $P'(2) = 0$ mais $P''(2) \neq 0$ donc la multiplicité est 2.

b) On calcule $P(-1) = 0$, $P'(-1) = 0$ mais $P''(-1) = 0$ mais $P^{(3)}(-1) \neq 0$ donc la multiplicité est 3.

c) Même démarche, la multiplicité est encore de 3.

Exercice 10

a) On obtient $P[X] = (X^2 + 3X + 1)(X^2 + 3X) - 6$.

b) On pose $Y = X^2 + 3X$. On obtient $P[X] = Y^2 + Y - 6$, ce qui se factorise en $P[X] = (Y-2)(Y+3) = (X^2 + 3X - 2)(X^2 + 3X + 3)$.
   On peut ainsi calculer les quatre racines :

$$\left\{\frac{-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2};\ \frac{-3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2};\ \frac{-3 - \sqrt{17}}{2};\ \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}\right\}$$

Exercice 11

Supposons que P soit divisible par son polynôme dérivé. Il existe donc un polynôme Q tel que

$$P[X] = Q[X]P'[X]$$

Le polynôme nul est divisible par son polynôme dérivé. Notons également qu'aucun polynôme constant ne convient.
Analysons maintenant les racines de P.
Si α est racine de P de multiplicité m, il est racine de P' de multiplicité $m-1$.
Cette petite remarque permet de prouver que, toute racine α de P divise Q. Or, une petite analyse de degré nous montre que le degré de Q est 1.
On en déduit que P ne possède qu'une seule racine !
P est donc nécessairement de la forme $P[X] = a(X-\alpha)^n$ avec $a \in \mathbb{K}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Réciproquement, on vérifie qu'un tel polynôme convient. En effet, $P'[X] = na(X-\alpha)^{n-1}$ divise P.

Exercice 12

C'est une application de la formule de Taylor.
Pour tout $x \in [a;\ +\infty[$, $P(x) = P(a) + \sum\limits_{1\leq k\leq n} \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.
Or, par hypothèse, pour tout $x \geq a$ et pour tout $k \geq 1$, $\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \geq 0$ car $(x-a)^k \geq 0$ et $P^{(k)}(a) \geq 0$.
On en déduit que

$$P(x) \geq P(a) > 0$$

Ainsi, $P(x)$ ne peut pas être nul.

Exercice 13

Plaçons nous dans les hypothèse de l'énoncé.
Soit α un nombre tel que $P(\alpha) \in \mathbb{R}$. Notons $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ les coefficients de P.
On a donc :

$$P(\alpha) = \overline{P(\alpha)}$$

Cette relation donne, en raison des propriétés de conjugué :

$$\begin{aligned}
P(\alpha) = \overline{P(\alpha)} &\iff \sum_{0\leq k\leq n} a_k\alpha^k = \overline{\sum_{0\leq k\leq n} a_k\alpha^k} \\
&\iff \sum_{0\leq k\leq n} a_k\alpha^k = \sum_{0\leq k\leq n} \overline{a_k\alpha^k} \\
&\iff \sum_{0\leq k\leq n} a_k\alpha^k = \sum_{0\leq k\leq n} \overline{a_k}\alpha^k \\
&\iff \sum_{0\leq k\leq n} \left(a_k - \overline{a_k}\right)\alpha^k = 0
\end{aligned}$$

On en déduit que le polynôme $P - \overline{P}$ dont les coefficients sont $(a_k - \overline{a_k})_{0\leq k\leq n}$ possède une infinité de racines ! Ainsi, ce polynôme est nul.
En particulier, cela prouve que, pour tout $0 \leq k \leq n$, $a_k = \overline{a_k}$, c'est à dire que P a des coefficients réels.

Exercice 16

$$P_1 = \left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)\left(X-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(X+\mathrm{i}\sqrt{2}\right) = \left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)(X^2+2)$$

$$P_2 = \prod_{k=0}^{3}\left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+k\pi/2)}\right) = (X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)$$

$$P_3 = \prod_{k=0}^{5}\left(X - \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/6+k\pi/3)}\right) = (X^2+\sqrt{3})(X^2-3X+3)(X^2+3X+3)$$

$$P_4 = (X - \mathrm{i})(X - 1 + \mathrm{i})(X + \mathrm{i})(X - 1 - \mathrm{i}) = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2)$$

$$P_5 = \left(X - \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)(X - 1)^3$$

Concernant P_6, on sait que la somme des racines donne 8 (c'est l'oppose du coefficient de degré $3-1=2$). Notons α, β et γ les racines. On a donc $\alpha + \beta + \gamma = 8$.
Par hypothèse, $\alpha + \beta = \gamma$, ce qui donne $2\gamma = 8$, soit $\gamma = 4$. À l'aide d'une division euclidienne, et d'une factorisation on obtient :

$$P_6 = (X - 4)\left(X + \mathrm{i}\sqrt{3} - 2\right)\left(X - \mathrm{i}\sqrt{3} - 2\right)$$

Concernant P_7, on cherche α tel que $2-\alpha$ et α sont racines. Pour ce faire, on réalise la division euclidienne de P_7 par $(X - \alpha)(X - 2 + \alpha) = X^2 - 2X - \alpha^2 + 2\alpha$.
On obtient un reste égal à $4X(\alpha^2 - 2\alpha + 5) + (\alpha^2 - 2\alpha + 4)(\alpha^2 - 2\alpha) - 5$, ce qui donne les deux conditions sur α :

$$\left\{\alpha^2 - 2\alpha + 5 = 0(\alpha^2 - 2\alpha + 4)(\alpha^2 - 2\alpha) - 5 = 0\right.$$

En travaillant sur ce système, on obtient deux solutions $\begin{cases}\alpha_1 = 2 + 2\mathrm{i} \\ \alpha_2 = 1 - 2\mathrm{i}\end{cases}$.
En terminant la factorisation, on obtient :

$$P_7 = (X + (-1 + 2\,\mathrm{i}))\,(X + (-1 - 2\,\mathrm{i}))\left(X - \sqrt{2} + 1\right)\left(X + \sqrt{2} + 1\right)$$

Exercice 19

Polynômes interpolateurs de Lagrange.

1. Supposons que pour tout $0 \leq i \leq n$, $P(x_i) = Q(x_i)$.
   Dans ce cas, $P - Q$ possède $n + 1$ racines distinctes (les x_i). Or le degré de $P - Q$ est inférieur ou égal à n.
   Ainsi, nécessairement, $P - Q = 0$.
2. (a) Le numérateur est un produit de n polynômes de degré 1, le dénominateur est constant. Ainsi, le degré de L_i est n.
   (b) Un petit raisonnement permet de prouver que $L_i(x_j) = \begin{cases}1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$
3. Le polynôme $P[X] = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i[X]$ vérifie, pour tout $0 \leq j \leq n$:

$$P(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x_j) = y_j$$

   De plus, P est unique. En effet, s'il existe un autre polynôme Q de degré au plus n qui vérifie ces hypothèses alors, d'après la question 1, $P = Q$.

Exercice 20

Formule de Liebnitz
On procède par récurrence sur n.
Pour $n = 0$, la formule s'écrit $(AB)^{(0)} = \binom{0}{0} A^{(0)} B^{(0)}$ et est vraie ! La formule est donc initialisée.
On suppose que pour un certain entier n la formule est vraie, c'est à dire que :

$$(AB)^{(n)} = \binom{n}{0} A^{(0)} B^{(n)} + \binom{n}{1} A^{(1)} B^{(n-1)} + \cdots + \binom{n}{n-1} A^{(n-1)} B^{(1)} + \binom{n}{n} A^{(n)} B^{(0)}$$

Pour obtenir la formule au rang $n+1$, je dérive $(AB)^{(n)}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
(AB)^{(n+1)} &= \left((AB)^{(n)}\right)' \\
&= \left(\binom{n}{0}A^{(0)}B^{(n)} + \binom{n}{1}A^{(1)}B^{(n-1)} + \cdots + \binom{n}{n-1}A^{(n-1)}B^{(1)} + \binom{n}{n}A^{(n)}B^{(0)}\right)' \\
&= \binom{n}{0}\left(A^{(0)}B^{(n)}\right)' + \binom{n}{1}\left(A^{(1)}B^{(n-1)}\right)' + \cdots + \binom{n}{n}\left(A^{(n)}B^{(0)}\right)' \\
&= \binom{n}{0}A^{(0)}B^{(n+1)} + \underbrace{\binom{n}{0}A^{(1)}B^{(n)} + \binom{n}{1}A^{(1)}B^{(n)} + \binom{n}{1}A^{(2)}B^{(n-1)} + \cdots + \binom{n}{n}A^{(n)}B^{(1)}}_{\text{on factorise les termes centraux deux à deux}} + \binom{n}{n}A^{(n+1)}B^{(0)}
\end{aligned}$$

On factorise deux à deux les termes centraux, on exploite la formule du triangle de Pascal et on obtient :

$$\begin{aligned}
(AB)^{(n+1)} = \binom{n}{0}A^{(0)}B^{(n+1)} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right)A^{(1)}B^{(n)} + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right)A^{(2)}B^{(n-1)} \\
+ \cdots + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right)A^{(n)}B^{(1)} + \binom{n}{n}A^{(n+1)}B^{(0)}
\end{aligned}$$

Cela donne :

$$(AB)^{(n+1)} = \binom{n+1}{0}A^{(0)}B^{(n+1)} + \binom{n+1}{1}A^{(1)}B^{(n)} + \cdots + \binom{n+1}{n}A^{(n)}B^{(1)} + \binom{n+1}{n+1}A^{(n+1)}B^{(0)}$$

La formule est donc bien héréditaire.
Par récurrence, elle est donc vraie pour tout n.

Exercice 21

Fonctions symétriques

1. Pour traiter cette question, il faut anticiper le développement de

$$a_n\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k) = a_n(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n)$$

   (a) Le terme de degré n est a_nX^n donc le coefficient est a_n

   (b) Pour obtenir un terme de degré $n-1$ dans le développement du produit, on sélectionne :
   - le facteur a_n ;
   - $-\alpha_i$ avec i l'un des indices de $[\![1;\ n]\!]$;
   - le facteur X parmi les $n-1$ facteurs restants.

   Cela donne n termes. Le terme de degré $n-1$ est donc :

$$\left[a_n \times (-\alpha_1) + a_n \times (-\alpha_2) + \cdots + a_n \times (-\alpha_n)\right]X^{n-1}$$

   Le coefficient de degré $n-1$ est donc

$$-a_n\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$$

   (c) Même principe : on anticipe le développement de $P[X]$.

   Il n'y a qu'un seul terme de degré 0, c'est $a_n \times (-\alpha_1) \times \cdots \times (-\alpha_n) = a_n(-1)^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k$.

2. (a) D'après la question précédente, si on note $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ les coefficients de P, on a

$$a_{n-1} = -a_n\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$$

   Donc, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \text{ car } a_n \neq 0$$

(b) En exploitant la première question, on sait que :

$$a_0 = a_n(-1)^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k$$

On obtient donc :

$$\prod_{k=1}^{n} \alpha_k = \frac{a_0}{(-1)^n a_n} = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}$$

Exercice 22

Examinons $\mathbb{K}_n[X]$:

Soient P et Q deux polynômes de degré au plus n. Soient λ et μ deux scalaires. On a :

$$\deg(\lambda P + \mu Q) \leq \max\left(\deg(\lambda P);\ \deg(\mu Q)\right)$$

Or $\deg(\lambda P) = \begin{cases} -\infty \text{ si } \lambda = 0 \\ \deg(P) \text{ sinon.} \end{cases}$ et $\deg(\mu Q) = \begin{cases} -\infty \text{ si } \mu = 0 \\ \deg(Q) \text{ sinon.} \end{cases}$.

On obtient bien, $\deg(\lambda P + \mu Q) \leq n$, ce qui prouve que $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Examinons E_1 :

$P = -X^2 \in E_1$ et $Q = X^2 + X \in E_1$. Or $P + Q = X \notin E_1$. Par conséquent E_1 n'est pas un sous-espace vectoriel.

Examinons E_2 :

Soient $(P;\ Q) \in E_2^2$ et $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a :

$$\lambda P(-X) + \mu Q(-X) = \lambda P(X) + \mu Q(X)$$

Donc $\lambda P + \mu Q$ est pair, ce qui prouve que E_2 est un sous-espace vectoriel.

Examinons E_3 :

Soient $(P;\ Q) \in E_3^2$ et $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a :

$$\lambda P(1) + \mu Q(1) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0$$

Donc $\lambda P + \mu Q \in E_3$, ce qui prouve que E_3 est un sous-espace vectoriel.

Examinons E_4 :

Soient $(P;\ Q) \in E_4^2$ et $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$. Il existe deux polynômes S et T tels que $P = AS$ et $Q = AT$. En particulier :

$$\lambda P + \mu Q = \lambda AS + \mu AT = A\left(\lambda S + \mu T\right)$$

Ainsi, $\lambda P + \mu Q$ est aussi un multiple de A, ce qui prouve que E_4 est un sous-espace vectoriel.

Examinons E_5 :

On a $P = X^2 \in E_5$ et $Q = 1^2 \in E_5$. Or $P + Q = X^2 + 1$ ne peut pas être le carré d'un polynôme. En effet, les racines de $X^2 + 1$ sont i et $-$i et ce sont des racines simples. Or, le carré d'un polynôme ne possède que des racines doubles. E_5 n'est donc pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 23

1. Pour tout k, $A_k(X) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-a)^{k-j} X^j$.

   Soit maintenant un polynôme $P \in E$ qui s'écrit $P(X) = \sum_{j=0}^{n} c_j X^j$.

On souhaite déterminer les éventuels scalaires $(\alpha_k)_{0\leq k\leq n}$ tels que :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k = P$$

En identifiant les termes, degré par degré, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_0 & +\cdots & +\cdots & +\cdots & = c_0 \\ & \alpha_1 & +\cdots & +\cdots & = c_1 \\ & & \ddots & +\vdots & = \vdots \\ & & & \alpha_n & = c_n \end{cases}$$

Ce système est échelonné et il possède donc une solution unique, ce qui montre que les (A_k) forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Une autre option pour montrer ce résultat consiste à exploiter la formule de Taylor !

2. Il y a une grosse astuce ici qui consiste à exploiter la formule du binôme de Newton. On écrit :

$$\begin{aligned} X^n &= (X-a+a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (X-a)^k \end{aligned}$$

Les $n+1$ coordonnées de X^n sont donc $\left(\binom{n}{k} a^{n-k}\right)_{0\leq k\leq n}$.

Exercice 24

Examinons φ_a :

Soient P et Q deux polynômes et λ et μ deux scalaires.
On a $\varphi_a(\lambda P + \mu Q) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = \lambda\varphi_a(P) + \mu\varphi_a(Q)$ donc φ_a est bien un morphisme.
Son noyau est formé des polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ qui possèdent 1 comme racine, c'est à dire de l'ensemble des polynômes multiples de $(X-1)$:

$$\mathrm{Ker}(\varphi_a) = \{(X-1)P \text{ avec } P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\}$$

Son image est $\mathbb{K}$ car pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ le polynôme constant α vérifie $\varphi_a(\alpha) = \alpha$

Examinons φ_b :

Considérons les polynômes constants $P = Q = 1$
On a $\varphi_b(P+Q) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc φ_b n'est pas un morphisme.

Examinons φ_c :

Soient P et Q deux polynômes et λ et μ deux scalaires.
On a $\varphi_c(\lambda P + \mu Q) = \lambda P(1) + \mu Q(1) - (\lambda P'(1) + \mu Q'(1)) = \lambda(P(1) - P'(1)) + \mu(Q(1) - Q'(1)) = \lambda\varphi_c(P) + \mu\varphi_c(Q)$.
φ_c est donc un morphisme.
Son noyau est formé des polynômes $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tels que $P(1) - P'(1) = 0$, c'est à dire $P(1) = P'(1)$.
Exploitons ici la formule de Taylor. On sait qu'un polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ peut s'écrire :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} c_k (X-1)^k \text{ avec } c_k = \frac{P^{(k)}(1)}{k!}$$

La condition $P(1) = P'(1)$ s'écrit donc $c_0 = c_1$. Ainsi :

$$\mathrm{Ker}(\varphi_c) = \left\{c_0(1 + (X-1)) + (X-1)^2 P(X) \text{ avec } c_0 \in \mathbb{K} \text{ et } P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]\right\}$$

On montre facilement que φ_c est surjectif. En effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ le polynôme constant α vérifie $\varphi_c(\alpha) = \alpha$. Donc son image est $\mathbb{K}$.

Examinons φ_d :

On montre facilement que φ_d est aussi un morphisme.
Son noyau est formé des polynômes P tels que $P(0) + XP'(0) = 0$, ce qui donne $P(0) = P'(0) = 0$. Ainsi, un polynôme P est dans le noyau si et seulement si 0 est racine de multiplicité au moins 2. Ainsi :

$$\mathrm{Ker}\,(\varphi_d) = \left\{X^2 P \text{ avec } P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]\right\}$$

On montre que φ_d est surjective. Soit ainsi $P = aX + b \in \mathbb{K}_1[X]$. Le polynôme P vérifie $\varphi_d(P) = P$ car $P(0) = b$ et $P'(0) = a$.

Examinons φ_e :

φ_e n'est pas un morphisme. Soit le polynôme $P = X$. On a $\varphi_e(P) = 1$. Or $\varphi_e(2P) = 4 \neq 2\varphi_e(P)$.

Examinons φ_f :

On vérifie facilement que φ_f est un morphisme.
Son noyau est réduit à 0 car, pour tout $P \in E$, $XP = 0$ si et seulement si $P = 0$.
Son image s'écrit trivialement :

$$\mathrm{Im}\,(\varphi_f) = \{XP \text{ avec } P \in \mathbb{K}_n[X]\}$$

En particulier, ce morphisme n'est pas surjectif car le polynôme 1 n'a pas d'antécédent !

Planche n° 18: Continuité et applications

Exercice 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in I$ et $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrer, à l'aide de la définition d'une limite, les propositions suivantes :

1. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2$ alors $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$;
2. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2$ alors $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \ell_1\ell_2$;
3. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$;
4. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = +\infty$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique. Montrer que f possède une limite en $+\infty$ si et seulement si f est constante.

Exercice 3

Étudier l'existence et donner la valeur éventuelle des limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sin(x^2)}{1+x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x^2)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x + \cos x)^2$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$

f) $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + \sin x}{1+x^2}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos(e^x) + 2\sin(2e^{-x}) + x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

m) $\lim\limits_{x\to 1} \left|\dfrac{\sqrt{|x^3 - 3x + 2|}}{2x^2 - x - 1}\right|$

n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

o) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+4}}$

p) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$

q) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

r) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$.

Exercice 4

Étudier les limites à gauche et à droite en 0 des fonctions suivantes.

$$f_1 : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \qquad f_2 : x \mapsto x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \qquad f_3 : x \mapsto x^2\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

Exercice 5

Soient I un intervalle et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

1. Montrer que si f est continue sur I alors $|f|$ est continue sur I.
2. Montrer que l'on a $\sup(f,g) = \dfrac{|f-g| + (f+g)}{2}$.
3. En déduire que si f et g sont continues sur I alors $\sup(f,g)$ est continue sur I.
4. Montrer que si f et g sont continues sur I alors $\inf(f,g)$ est continue sur I.

Exercice 6

Étudier la continuité de $x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Exercice 7

Déterminer le domaine de définition, étudier la continuité et les éventuels prolongements par continuité des fonctions suivantes.

$f_1 : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ $\qquad$ $f_2 : x \mapsto \dfrac{x \ln x}{x-1}$ $\qquad$ $f_3 : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{(x^2-1)^2}{|x-1|}$ $\qquad$ $f_5 : x \mapsto \sin(x)\sin(1/x)$ $\qquad$ $f_6 : x \mapsto \cos(x)\cos(1/x)$

$f_7 : x \mapsto \sin(x+1)\ln|x+1|$

Exercice 8

Soit P un polynôme de degré impair. Montrer que P possède une racine réelle.

Exercice 9

Montrer que l'équation $e^x = \pi^2 \ln(x^2+1)$ possède au moins trois solutions réelles.

Exercice 10

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue.

1. Montrer que f possède un point fixe.
2. Montrer que si, de plus, f est décroissante, alors le point fixe est unique.

Exercice 11

Soient I un intervalle et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ne prenant qu'un nombre fini de valeur(s). Que peut-on dire de f ?

Exercice 12

Soient I un intervalle et $(f,g) \in (\mathcal{C}(I,\mathbb{R}))^2$ tel que pour tout $x \in I$, on a $f(x) \neq 0$ et $f(x)^2 = g(x)^2$.

1. Montrer que l'on a $f = g$ ou $f = -g$.
2. Montrer que ce résultat est faux dans chacun des cas suivants :
   (a) f n'est pas continue ;
   (b) f s'annule sur I ;
   (c) I n'est pas un intervalle.

Exercice 13

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f possède un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Montrer que f possède un extremum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux (justifier).

1. L'image d'un intervalle par une fonction est un intervalle.
2. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
3. L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert.
4. L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé.
5. L'image d'un intervalle borné par une fonction continue est un intervalle borné.
6. L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné.
7. L'image d'un intervalle ouvert borné par une fonction continue est un intervalle ouvert borné.

Exercice 16

Un cycliste parcourt dix-huit kilomètres en une heure.

Montrer qu'il existe, pendant cette heure, une demi-heure au cours de laquelle il a parcouru exactement neuf kilomètres.

Exercice 17

Une fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que ses limites sont nulles en $+\infty$ et $-\infty$.

Montrer que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle borné et semi-fermé ou bien borné et fermé.

Corrigé de la planche n° 18: Continuité et applications

Exercice 2

La réciproque est évidente. Montrons le sens direct.
On considère donc une fonction f périodique, qui possède une limite en $+\infty$. On va noter $T > 0$ la période de f.

Montrons d'abord que cette limite ne peut pas être $\pm\infty$ en utilisant les suites.
On suppose par exemple que la fonction tend vers $+\infty$ (le cas $-\infty$ se traite de manière similaire).
On sait que, pour tout entier n, $f(nT) = f(0)$ mais cela est contradictoire avec la limite en $+\infty$.

On va maintenant montrer qu'il est impossible que f converge et soit non constante par l'absurde.
Il existe $(a;\ b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \neq b$ et $f(a) \neq f(b)$.
Soit de plus, ℓ la limite finie de f en $+\infty$.
Pour tout entier n, on a $f(a+nT) = f(a)$ et par passage à la limite on obtient $f(a) = \ell$.
De même, pour tout entier n, on a $f(b+nT) = f(b)$ et par passage à la limite on obtient $f(b) = \ell$.
Cela donne $f(a) = f(b)$, ce qui est absurde !
Méthode directe pour montrer l'implication :
Soit ℓ la limite finie de f. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre A tel que, pour tout $x > A$, $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell - \varepsilon$.
Soit alors n tel que $nT > A$.
n existe car $\mathbb{R}$ est archimédien. On en déduit, $\forall x \in [nT;\ (n+1)T[$, $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell - \varepsilon$. Mais en raison de la périodicité de f, cela entraîne :

$$\forall x \in [0;\ T[,\ \ell - \varepsilon < f(x) < \ell - \varepsilon$$

Et comme cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit

$$\forall x \in [0;\ T[,\ f(x) = l$$

Exercice 3

1. Pour tout $x > 0$, on a
$$\frac{x\sin(x^2)}{1+x^2} = \frac{\sin(x^2)}{\frac{1}{x}+x}$$
Le théorème des Gendarmes permet de conclure, la limite est nulle.
2. Cette expression n'a pas de limite. En effet, la suite $u_n = \sqrt{n\pi}$ tend vers $+\infty$ et pourtant, $\cos\left((u_n)^2\right) = (-1)^n$ n'a pas de limite.
3. En utilisant le conjugué, on obtient, pour tout $x \geq 1$:
$$\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$
Ainsi, l'expression tend vers 1.
4. On peut conclure par le théorème de minoration, la limite est $+\infty$.
5. Pour tout $x > 1$, $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$. Ainsi, la limite est nulle.
6. On sait que pour $x > 0$, en raison des propriétés de partie entière :
$$1 \geq x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor > x\left(\frac{1}{x} - 1\right) = 1 - x$$
La limite en 0^+ est donc de 1.
De même, en 0^- la limite est de 1.

7. Pour tout $x > 0$, on a
$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\ln(1+x)/x}$$
Par croissance comparée et composition de limite, la limite recherchée est donc $\mathrm{e}^0 = 1$.
8. Utilisons un développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 :
$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{(x+x\varepsilon(x))/x} = \mathrm{e}^{1+\varepsilon(x)}$$
On en déduit que la limite recherchée est e.
9. En factorisant par les termes dominants, on obtient une limite de 1.
10. Pour tout $x > 0$, on a, par utilisation du conjugué puis factorisation par le terme dominant :
$$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} &= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}+1}\end{aligned}$$
La limite recherchée est donc $\frac{1}{2}$.
11. Un peu de calcul montre que, pour tout $x > 1$:
$$\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{(\ln(\ln x)-\ln(x))/x}$$
On conclut ensuite par croissance comparée : la limite est 1. En effet, pour tout $x > \mathrm{e}$, $\ln(x) < x$ et donc $0 < \frac{\ln(\ln(x))}{x} < \frac{\ln(x)}{x}$.
12. Pour tout x, $\cos(e^x) + 2\sin(2e^{-x}) + x^2 \geq x^2 - 3$. En particulier, on a
$$\frac{\cos(e^x) + 2\sin(2e^{-x}) + x^2}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{x^2-3}{\sqrt{1+x^2}}$$
Or, on peut avec les techniques de factorisation montrer facilement que cette dernière expression tend vers $+\infty$. La limite est donc $+\infty$.
13. Un peu de calcul montre que, pour tout $x \notin \left\{-\frac{1}{2};\ 1;\ -2\right\}$, on a :
$$\left|\frac{\sqrt{|x^3-3x+2|}}{2x^2-x-1}\right| = \left|\frac{|x-1|\times\sqrt{x+2}}{(2x+1)(x-1)}\right| = \left|\frac{\sqrt{x+2}}{(2x+1)}\right|$$
Donc, quand $x \to 1$, la limite est $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
14. En posant $X = \frac{1}{x}$, on se ramène au cas n° 8, la limite est donc de e.
15. Un peu de travail sur le conjugué montre que, pour tout x du domaine de validité de cette expression :
$$\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}} = 3 \times \frac{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{2+\frac{4}{x}}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{4+\frac{3}{x}}}$$
La limite est donc $1+\sqrt{2}$

16. Pour tout $x \notin \{1;\ -1\}$, on a, après calcul :

$$\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{-1}{x+1}$$

La limite est donc de $\frac{-1}{2}$.

17. Encore une fois, pour $x \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$, on a

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

La limite recherchée est donc $\frac{1}{2}$.

18. Toujours à l'aide du conjugué et avec une factorisation, on obtient pour $x > 0$:

$$\sqrt{x^2+2x} - x = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

La limite est donc 1.

Exercice 4

Pour tout $x \neq 0$, on a un encadrement usuel de la partie entière :

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$$

En exploitant cet encadrement, on peut répondre aux questions.

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -\infty$
2. Grâce à l'encadrement, on obtient :
   - pour $x > 0$: $1 - x \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$
   - pour $x < 0$: $1 - x \geq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq 1$

   On conclut avec le théorème des gendarmes dans les deux cas, la limite est nulle.
3. Pour tout $x \neq 0$, $x^2 > 0$ donc :

$$x - x^2 < x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq x$$

On conclut ensuite à l'aide du théorème des Gendarmes, la limite est nulle.

Exercice 7

Les lieux d'éventuelles discontinuités se situent autour des entiers. Soit ainsi $n \in \mathbb{Z}$.

Pour tout $x \in [n;\ n+1[$, $\lfloor x \rfloor = n$. On en déduit :

$$\lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 = n + (x-n)^2$$

On en déduit en particulier, $\lim\limits_{x \to (n+1)^-} \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 = n+1$

Or, pour $x = n+1$, on a

$$\lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 = n+1$$

Ainsi, cette fonction est continue

Exercice 8

f_1 est définie sur $\mathbb{R}^*$. On peut la prolonger en posant $\tilde{f}_1(0) = 0$.

f_2 est définie sur $]0;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$. On peut la prolonger en posant $\tilde{f}_2(0) = 0$ et $\tilde{f}_2(1) = 1$. Pour la limite en 1, poser le changement de variable $X = x - 1$ puis utiliser un DL1 sur le logarithme.

f_3 est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Elle n'est pas prolongeable en 1 car les limites à gauche et à droite de 1 sont différentes.

f_4 est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. On peut la prolonger en posant $f_4(1) = 0$.

f_5 est définie sur $\mathbb{R}^*$. On peut la prolonger en posant $f_5(0) = 0$. Pour s'en convaincre, faire un DL1 de $\sin(x)$ en 0.

f_6 est définie sur $\mathbb{R}^*$. On ne peut pas la prolonger car elle ne possède pas de limite en 0.

f_7 est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On peut la prolonger en posant $f_7(-1) = 0$. Encore une fois, un changement de variable $X = x + 1$ puis un DL1 de sinus permettent de conclure !

Exercice 9

Soit P un tel polynôme. Il existe un entier n tel que le degré de P est $2n + 1$.
Notons (c_k) les coefficients de P. On a

$$P[X] = \sum_{k=0}^{2n+1} c_k X^k$$

On va montrer que $P(x)$ change de signe en étudiant les limites de P en $\pm\infty$.
En effet, pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} P(x) &= c_{2n+1}x^{2n+1}\left(1 + c_{2n}\frac{x^{2n}}{x^{2n+1}} + c_{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{x^{2n+1}} + \cdots + c_0\frac{1}{x^{2n+1}}\right) \\ &= c_{2n+1}x^{2n+1}\left(1 + \frac{c_{2n}}{x} + \frac{c_{2n-1}}{x^2} + \cdots + \frac{c_0}{x^{2n+1}}\right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } c_{2n+1} > 0 \\ -\infty \text{ si } c_{2n+1} < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \begin{cases} -\infty \text{ si } c_{2n+1} > 0 \\ +\infty \text{ si } c_{2n+1} < 0 \end{cases}$$

En particulier, il existe un intervalle $[a;\ b]$ sur lequel P change de signe. On conclut ensuite à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires en remarquant que P est continue.

Exercice 10

Trouver le nombre de solutions de l'équation revient à trouver le nombre d'antécédents de 0 de la fonction

$$\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^x - \pi^2 \ln(x^2 + 1)$$

Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables car, pour tout x, $x^2 + 1 > 0$. Elle est donc également continue.

> Ici, une erreur serait de dériver la fonction et de chercher à faire son tableau de variations. En effet, le signe de la dérivée est impossible à obtenir. On va plutôt chercher à montrer que la fonction change de signe au moins trois fois.

Un petit calcul de limites donne $\lim\limits_{-\infty} \varphi = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \varphi = +\infty$.

Pour lever l'indétermination en $+\infty$, on a écrit, pour tout x, $\varphi(x) = \mathrm{e}^x\left(1 - \dfrac{\pi^2 \ln(x^2+1)}{\mathrm{e}^x}\right)$ et on a conclu à l'aide des croissances comparées.

Cette petite étude de limite nous montre que φ s'annule déjà au moins une fois. On calcule ensuite $\varphi(1) = \mathrm{e} - \pi^2 \ln(2) < 0$ et $\varphi(0) = 1$.
On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $]-\infty;\ 0]$ puis sur $[0;\ 1]$ puis sur $[1;\ +\infty[$.
Cela suffit à conclure : φ s'annule au moins trois fois !

Exercice 11

1. C'est une application du théorème des valeurs intermédiaires à la fonction

$$g : x \mapsto f(x) - x$$

   Cette fonction change de signe et est continue sur $[a;\ b]$ donc elle s'annule sur $[a;\ b]$
2. Supposons qu'il y ait deux points fixes $x_1 < x_2$.
   On a $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$, ce qui conduit à $f(x_1) < f(x_2)$, ce qui est absurde puisque f est décroissante.

Exercice 12

On peut dire que cette fonction est constante. Montrons-le par l'absurde.
Si f n'est pas constante sur I, $\exists x_1 < x_2 / f(x_1) \neq f(x_2)$. Mais, sur $[x_1;\ x_2]$, f prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$. En effet, $[x_1;\ x_2] \subset I$ et f est continue sur I.
Ainsi, dans ce cas, l'hypothèse que f ne prend qu'un nombre fini de valeurs devient absurde.

> Cet exercice permet de prouver que, sur un intervalle, une fonction continue ne prend qu'une valeur ou bien une infinité de valeurs !

Exercice 13

1. Remarquons que f ne change pas de signe. En effet, le cas échéant, par application de théorème des valeurs intermédiaires, f s'annulerait.
   Comme on a $f(x)^2 = g(x)^2$ pour tout $x \in I$, g ne s'annule jamais et, par suite, ne change pas non plus de signe.
   Supposons par exemple que f est positive.
   Pour tout x, l'égalité $f(x)^2 = g(x)^2$ est équivalente à $f(x) = |g(x)|$. Mais comme g ne change pas non plus de signe, on en déduit que g est positive sur I ou bien négative sur I.

   On obtient ainsi, pour tout $x \in I$, $f(x) = g(x)$ (cas où g est positive) ou bien, pour tout $x \in I$, $f(x) = -g(x)$ (cas où g est négative).
2. Cf correction en TD.

Exercice 16

1. Faux ! Prendre la fonction partie entière. L'image de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{Z}$ qui n'est pas un intervalle.
2. Vrai. C'est du cours.
3. Faux ! Considérer pour cela une fonction constante. L'image d'un intervalle est un intervalle réduit à un point, qui est fermé.
4. Faux. Considérer l'image de $[0;\ +\infty[$ par arctan.
5. Faux ! Considérer l'image de $]0;\ 1]$ par la fonction inverse.
6. Vrai. C'est du cours.
7. Faux ! Considérer l'image de $]0;\ 1[$ par la fonction inverse.

Planche n° 19: Matrices

Exercice 1

Calculer AB et BA dans chacun des cas suivants lorsque c'est possible :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Déterminer deux matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que :

1. $AB = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ et $BA \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.
2. $AB = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, $BA = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ et $A \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ et $B \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

Exercice 3

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

Exercice 4

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer JMJ.

Exercice 5

Calculer les puissances successives des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

1. Pour $n \geq 2$ déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente la valeur de A^n.

Exercice 7

On dit qu'une matrice carrée est *nilpotente* si l'une de ses puissances est nulle. Montrer que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes de même taille qui commutent est une matrice nilpotente. Ceci est-il encore vraie si on enlève l'hypothèse de commutativité ?

Exercice 8

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *trace* de M et on note $\mathrm{tr}(M)$ la somme des éléments diagonaux de M. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

1. Montrer que l'on a $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.
2. A-t-on $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$?
3. Montrer que l'on a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Exercice 9

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB, AC. La matrice A est-elle inversible ?
2. Déterminer les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 11

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$. En étudiant $\sum_{k=0}^{p-1} M^k$, montrer que $I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.
2. En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 12

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, vérifiant $P(0) \neq 0$, tel que $P(M) = 0$. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.
2. Pour $n \geq 2$, la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et dont tous les autres coefficients valent 1 est-elle inversible ?

Exercice 13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Montrer que A est inversible.

Exercice 14

Déterminer, suivant la valeur du réel a, le rang de la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16

Déterminer les matrices associées canoniquement aux applications linéaires suivantes, puis déterminer des équations de leurs images et noyaux.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (3x-y, -x+y, -2y) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, -2x+3y) \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, -2x-4y) \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x, 2x-z, x-y+z) \end{array}$$

$$f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y, x+2z) \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-2y, x+2y) \end{array}$$

Exercice 17

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f : (x,y,z) \mapsto (x-z, y, y)$.

1. Déterminer A, la matrice canoniquement associée à f.
2. Calculer A^2, A^3 et A^4. En déduire une formule probable pour A^n, puis la démontrer, par récurrence.
3. En déduire l'expression de f^n, où f^n désigne f composée n fois par elle-même.

Exercice 18

n désigne un entier naturel non nul et A est une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ fixée.

Dire si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$:

$U = \{\text{matrices triangulaires supérieures de } \mathrm{M}_n(\mathbb{C})\}$ $\quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{\text{matrices inversibles de } \mathrm{M}_n(\mathbb{C})\}$

$D = \{\text{matrices diagonales de } \mathrm{M}_n(\mathbb{C})\}$ $\quad R = \{\text{matrices à coefficients réels de } \mathrm{M}_n(\mathbb{C})\}$

$\mathcal{M}_A = \{AM \text{ avec } M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})\}$ $\quad \mathcal{P}_A = \{P(A) \text{ avec } P \in \mathbb{C}[X]\}$

Corrigé de la planche n° 19: Matrices

Exercice 1

1. AB seulement peut se calculer :
$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 7 \\ 18 & 11 \end{pmatrix}$$

2. On calcule :
$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
et
$$BA = 7$$

3. On calcule :
$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$$
et
$$BA = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. On calcule :
$$AB = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & 11 & 9 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$
et
$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 12 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ conviennent. Il suffit de faire le calcul pour s'en convaincre.

2. On conserve la même matrice A et on considère maintenant $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$. On vérifie qu'on a bien $AB = BA = 0$.

> L'exercice qui précède permet de prouver que deux matrices peuvent avoir un produit nul, sans pour autant que l'une des deux matrices soient nulles. En particulier, on ne pourra pas utiliser les techniques d'équation produit nul !
> On ne pourra pas non plus dire que $AB = AC$ entraîne $B = C$, sauf dans le cas où A est injective.

Exercice 3

Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
A et B commutent si et seulement si :

$$\begin{cases} 3a - c = 3a + 7b \\ 3b - d = -a + b \\ 7a + c = 3c + 7d \\ 7b + d = -c + d \end{cases} \iff \begin{cases} 7b + c = 0 \\ a + 2b - d = 0 \\ 7a - 2c - 7d = 0 \\ 7b + c = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = -7b \\ a + 2b - d = 0 \\ 7a + 14b - 7d = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c = -7b \\ a = d - 2b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = d - 2b \\ b = b \\ c = -7b \\ d = d \end{cases}$$

On en déduit que A et B commutent si et seulement si il existe deux nombres b et d tels que :

$$B = \begin{pmatrix} d - 2b & b \\ -7b & d \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'ensemble des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il est facile de montrer que ces deux matrices sont libres et forment donc une base de cet espace.

Exercice 4

On note $(m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

La matrice MJ a pour coefficients $\left(\sum_{1 \leq k \leq n} m_{ik}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. C'est à dire que chaque ligne L_i de cette matrice contient n coefficients identiques égaux à la somme des coefficients de la i-ème ligne de M.
Multiplions maintenant à gauche cette matrice par J.
On obtient la matrice dont les coefficients sont $\left(\sum_{1 \leq l \leq n} \sum_{1 \leq k \leq n} m_{lk}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. Tous les coefficients de cette matrice sont égaux et valent la somme de tous les coefficients de M.

Exercice 5

- On traite le cas de A. On calcule les premières puissances et on en déduit une conjecture que l'on va prouver par récurrence :

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = 3^{n-1}A \qquad (P_n)$$

  P_1 est vraie. Donc la propriété est initialisée.
  On suppose, pour un certain n que P_n est vraie. On calcule maintenant A^{n+1} :

  $$\begin{aligned} A^{n+1} & A \times A^n \\ & A \times (3^{n-1} \times A) \\ & 3^{n-1}A^2 \end{aligned}$$

Or un petit calcul donne $A^2 = 3A$. On obtient donc

$$A^{n+1} = 3^{n-1} \times 3A = 3^n A$$

Donc la proposition est vraie au rang $n+1$. Elle est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout n.

- On prouve de la même manière, par récurrence la proposition

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} \qquad (Q_n)$$

- C^n n'existe pas pour $n \geq 2$ en raison d'une incompatibilité de dimension.
- On prouve, par récurrence la proposition

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix} \qquad (R_p)$$

- E est un peu plus compliquée à traiter. Comme E est triangulaire supérieure, toutes ses puissances seront aussi triangulaires supérieures d'après les propriétés des matrices triangulaires supérieures. Donc il existe six suites (a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n) et (f_n) telles que, pour tout n :

$$E^n = \begin{pmatrix} a_n & d_n & f_n \\ 0 & b_n & e_n \\ 0 & 0 & c_n \end{pmatrix}$$

On connaît d'autre part les premiers termes de ces suites. On a

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1 & b_1 = 2 & c_1 = 3 \\ d_1 = 1 & e_1 = 1 & f_1 = 0 \end{array}$$

De plus, $E_{n+1} = E^n \times E$. Cela nous permet de découvrir les relations de récurrence vérifiées par ces suites.
On obtient ainsi :

$$E^{n+1} = \begin{pmatrix} a_n & b_n + d_n & e_n + f_n \\ 0 & 2b_n & c_n + 2e_n \\ 0 & 0 & 3c_n \end{pmatrix}$$

On en déduit que les six suites vérifient pour tout n les relations de récurrences :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = 2b_n \\ c_{n+1} = 3c_n \\ d_{n+1} = b_n + d_n \\ e_{n+1} = c_n + 2e_n \\ f_{n+1} = e_n + f_n \end{cases}$$

Il nous faut maintenant démêler tout cela. Les trois premières suites sont faciles car elles sont géométriques. On connaît leur premier terme et leur raison. On obtient ainsi pour tout n :

$$\begin{cases} a_n = 1 \\ b_n = 2^n \\ c_n = 3^n \end{cases}$$

Les trois dernières récurrences sont difficilement exploitables. Il nous faut donc adopter une autre approche autrement appelée l'instinct (ou talent).

Quand on calcule à la main les toutes premières puissances, on découvre qu'un motif se met en place pour les coefficients d_n, e_n et f_n et qui ressemble un peu au motif du triangle de Pascal. Cela nous conduit à poser la conjecture suivante, pour tout n :

$$\begin{cases} d_n = b_n - a_n = 2^n - 1 \\ e_n = c_n - b_n = 3^n - 2^n \\ f_n = \frac{e_n - d_n}{2} = \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2} \end{cases}$$

On va donc poser notre hypothèse de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2} \\ 0 & 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \qquad (S_n)$$

On vérifie facilement que S_1 est vraie.
On suppose à un certain rang n que S_n est vraie. On calcule ensuite :

$$\begin{aligned} E^{n+1} &= E^n \times E \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^n + 2^n - 1 & 3^n - 2^n + \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2} \\ 0 & 2 \times 2^n & 3^n + 2 \times (3^n - 2^n) \\ 0 & 0 & 3 \times 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 & \frac{2 \times 3^n - 2^{n+1} + 3^n - 2^{n+1} + 1}{2} \\ 0 & 2^{n+1} & 3^n + 2 \times 3^n - 2^{n+1} \\ 0 & 0 & 3 \times 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 & \frac{3^{n+1} - 2^{n+2} + 1}{2} \\ 0 & 2^{n+1} & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ouf ! L'hypothèse de récurrence est bien héréditaire. Comme elle est initialisée, elle est vraie pour tout n.

Exercice 6

1. On a, après calcul, $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$.
   Le reste est de degré 1. On le note $R[X] = mX + p$. Il existe donc un polynôme Q tel que

   $$X^n = (X-1)(X-2)Q[X] + mX + p$$

   En évaluant cette relation en 1 et 2, on obtient le système :

   $$\begin{cases} 1 = m + p \\ 2^n = 2m + p \end{cases}$$

   Ce qui donne $m = 2^n - 1$ et $p = 1 - m = 2 - 2^n$. Ainsi, le reste est $R[X] = (2 - 2^n)X + 2^n - 1$.
2. Un peu de calcul montre que $A^2 = 3A$ donc $A^3 = 3A^2 = 9A$.
   De même, $A^4 = 3A^3 = 27A$
   Par une récurrence assez immédiate, on a donc $A^n = 3^{n-1}A$.

Exercice 7

1. Notons (a_{ij}) et (b_{ij}) les coefficients respectifs de A et B. Les coefficients de $A + B$ sont $(a_{ij} + b_{ij})$ et donc on a :

   $$\mathrm{tr}(A+B) = \sum_{k=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ii} + \sum_{k=1}^{n} b_{ii}) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

2. Non, il suffit de considérer $A = B = I_2$ comme contre-exemple.

3. Calculons les termes diagonaux de AB. Ce sont les $\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right)_{1\leq i\leq n}$. On a donc :

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

De même, on a

$$\mathrm{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}$$

Travaillons sur cette dernière somme :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(BA) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}. \text{ On peut échanger les sommes :}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ik}. \text{ On renomme les indices :}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\\
&= \mathrm{tr}(AB)
\end{aligned}$$

Exercice 9

1. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ Si A était inversible, on aurait $AB = AC \Longrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \Longrightarrow B = C$, ce qui est absurde.
   Ainsi A n'est pas inversible !
2. Soient $(C_i)_{1\leq i\leq 3}$ les trois colonnes de F.
   $AF = 0 \iff \forall 1 \leq i \leq 3,\ AC_i = 0$. Les matrices F qui vérifient $AF = 0$ sont donc constituées de vecteurs colonnes appartenant au noyau de A. Il s'agit donc de calculer $\mathrm{Ker}(A)$.
   $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$. On obtient donc

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \iff x_3 = -x_2 \text{ et } x_1 = 0$$

   Ainsi, $\mathrm{Ker}(A)$ est engendré par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On en déduit que F est nécessairement une matrice qui s'écrit

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$$

   Avec $(\lambda_1;\ \lambda_2;\ \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 10

Après calcul, on obtient $A^2 - A = 2I$, ce qui donne $A(A - I) = 2I$, ou encore :

$$A \times \left(\frac{1}{2}(A - I)\right) = I$$

On en déduit :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I)$$

Exercice 11

1. Cela ressemble fortement à une somme de termes de suite géométrique.
   Un petit calcul similaire donne :
$$(I-M)\times\sum_{k=0}^{p-1}M^k = I - M^p = I \text{ car } M^p = 0 \text{ par hypothèse.}$$
   On en déduit que $(I-M)$ est inversible et que son inverse est $\sum_{k=0}^{p-1}M^k$
2. On a
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = I_3 - A$$
   Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.
   Or, $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$. On en déduit d'après la question précédente que $I_3 - A$ est inversible et d'inverse
$$I_3 + A + A^2 = \begin{pmatrix} 13 & -9 & -5 \\ 3 & -2 & -1 \\ 21 & -15 & -8 \end{pmatrix}$$

Exercice 12

1. On suppose que P est de degré n, que ses coefficients sont $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ avec $a_0 \neq 0$ et que $P(M) = 0$. Ainsi :
$$\sum_{0\leq k\leq n} a_k M^k = 0$$
   Or $M^0 = I$. On en déduit donc, puisque $a_0 \neq 0$:
$$I = \frac{-1}{a_0}\sum_{1\leq k\leq n} a_k M^k$$
   C'est à dire :
$$I = M \times \left(\frac{-1}{a_0}\sum_{1\leq k\leq n} a_k M^{k-1}\right)$$
   En particulier, M est inversible et $M^{-1} = \left(\frac{-1}{a_0}\sum_{1\leq k\leq n} a_k M^{k-1}\right)$
2. Soit A cette matrice. On va calculer A^2, pour voir...
   Notons s_{ij} les coefficients de A^2. Pour tout $(i;\ j) \in [\![1;\ n]\!]^2$:
$$s_{ij} = \sum_{1\leq k\leq n} a_{ik}a_{kj}$$
   - Dans le cas où $i \neq j$, cette somme est composée de $n-2$ termes égaux à 1.
   - Dans le cas contraire, cette somme est composée de $n-1$ termes égaux à 1.

   On a donc $s_{ij} = \begin{cases} n-2 \text{ si } i \neq j \\ n-1 \text{ si } i = j \end{cases}$
   On en déduit que $A^2 = (n-2)A + (n-1)I$, c'est à dire que
$$I = \frac{1}{n-1}\left(A^2 - (n-2)A\right) = A \times \left(\frac{1}{n-1}\left(A - (n-2)I\right)\right)$$

Exercice 13

On va montrer que le noyau de A est réduit à 0.
Soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$. On note $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ les coordonnées de X.
Soit $i_0 \in [\![1;\ n]\!]$ tel que $|x_{i_0}|$ est la plus grande coordonnée de X en module.
La i_0-ème coordonnée de AX vaut $\sum\limits_{1\leq j\leq n} a_{i_0 j}x_j = 0$. On obtient donc

$$a_{i_0 i_0}x_{i_0} = -\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i_0}} a_{i_0 j}x_j$$

Par passage au module et application de l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$|a_{i_0 i_0}|\,|x_{i_0}| \leq \sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i_0}} |a_{i_0 j}|\,|x_j|$$

Or, on sait que $|a_{i_0 i_0}| > \sum\limits_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i_0}} |a_{i_0 j}|$ donc, si $x_{i_0} \neq 0$, on obtient :

$$\sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i_0}} |a_{i_0 j}|\,|x_{i_0}| < |a_{i_0 i_0}|\,|x_{i_0}| \leq \sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i_0}} |a_{i_0 j}|\,|x_j|$$

Cette série d'inégalité est absurde ! En effet, par hypothèse, $|x_{i_0}|$ est la plus grande coordonnée en module !

Exercice 14

On utilise le premier pivot. On obtient donc

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & -a^4+1 \\ 0 & 0 & -a^4+1 & -a^5+a \\ 0 & -a^4+1 & -a^5+a & -a^6+a^2 \end{pmatrix}$$

En permutant des lignes, on obtient la matrice suivante qui est triangulaire supérieure :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1-a^4 & a(1-a^4) & a^2(1-a^4) \\ 0 & 0 & 1-a^4 & a(1-a^4) \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 \end{pmatrix}$$

Si $1-a^4 = 0$, c'est à dire $a \in \{1;\ -1\}$, cette matrice est de rang 1.
Si $1-a^4 \neq 0$, cette matrice est de rang 4.

Exercice 15

On rappelle les étapes d'inversion d'une matrice carrée M :

- On résout $MX = Y$ avec Y quelconque ;
- S'il la solution existe et est unique, on lit M^{-1} par identification des coefficients de la solution. En effet, dans ce cas, la solution est $X = M^{-1}Y$.

Avec cette méthode, on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

C n'est pas inversible

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3i}{4} & \frac{i}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 16

Pour f_1 :
La matrice est :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Le noyau est $\left\{\vec{0}_{\mathbb{R}^2}\right\}$. L'image est le plan engendré par les vecteurs libres

$$\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Pour f_2 :
La matrice est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Le noyau est la droite de $\mathbb{R}^3$ dont le système d'équations cartésienne est

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases}$$

L'image est $\mathbb{R}^2$ car les trois vecteurs colonnes de la matrice engendrent $\mathbb{R}^2$.

Pour f_3 :
La matrice est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

L'image est la droite engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Le noyau est la droite d'équation $y + 2x = 0$.

Pour f_4 :
La matrice est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les trois vecteurs de la matrice sont libres donc l'image est $\mathbb{R}^3$ et le noyau est $\left\{\vec{0}_{\mathbb{R}^3}\right\}$.

Pour f_5 :
La matrice est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

L'image est $\mathbb{R}^2$. Le noyau est la droite de $\mathbb{R}^3$ dont un système d'équations est

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

Pour f_6 :
La matrice est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

L'image est $\mathbb{R}^2$, le noyau est réduit à $\vec{0}_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice 17

1. On lit, par identification :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cela conduit à formuler, pour tout entier n non nul, l'hypothèse

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -(n-1) & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (P_n)$$

Montrons cette hypothèse par récurrence.
P_1, P_2 et P_3 sont vraies donc l'hypothèse est largement initialisée.
On suppose maintenant que, pour un certain entier n, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & -(n-1) & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Au rang suivant, un petit calcul donne :

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & -(n-1) & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & -n & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'hypothèse est bien héréditaire. On en déduit, par principe de récurrence que P_n est bien vraie pour tout entier naturel non nul n.

3. Pour tout entier naturel non nul n, et pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$f^n(X) = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(X) = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}} X = A^n X$$

Ainsi, $f^n(X) = \begin{pmatrix} x-(n-1)y-z \\ y \\ y \end{pmatrix}$.

Exercice 18

U est un s.e.v. Nous l'avons déjà vu en cours.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ n'est pas un s.e.v. car la matrice nulle n'est pas inversible.

D est un s.e.v. On montre assez facilement qu'une combinaison linéaire de matrices diagonales est diagonale.

R n'est pas un s.e.v. car $I_n \in R$ or $\mathrm{i}I_n \notin R$.

$\mathcal{M}_A$ est un s.e.v. En effet, soient M et N deux matrices de cet ensemble et deux scalaires λ et μ.
On sait qu'il existe deux matrices P et Q telles que $M = AP$ et $N = AQ$. Et ainsi :

$$\lambda M + \mu N = \lambda AP + \mu AQ = A\left(\lambda P + \mu Q\right) \in \mathcal{M}_A$$

$\mathcal{P}_A$ est un s.e.v. En effet, soient M et N deux matrices de cet ensemble et deux scalaires λ et μ.
On sait qu'il existe deux polynômes P et Q telles que $M = P(A)$ et $N = Q(A)$. Et ainsi :

$$\lambda M + \mu N = \lambda P(A) + \mu Q(A) = \left(\lambda P + \mu Q\right)(A) \in \mathcal{P}_A$$

En effet $\lambda P + \mu Q$ est bien un polynôme.

Planche n° 20: Dérivation et applications

Exercice 1

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle $[a;\ \alpha[$ et dérivables sur $]a;\ \alpha[$ avec α qui désigne un nombre ou $+\infty$. On suppose en outre que g' ne s'annule pas sur $]a;\ \alpha[$.

Pour tout $x \in]a;\ \alpha[$, on définit la fonction $\varphi : t \mapsto f(t)(g(x) - g(a)) - g(t)(f(x) - f(a))$.
Notons bien que, x et a sont des paramètres fixés dans la définition de φ.

a) Expliquer pourquoi on peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction φ entre a et x.

b) En déduire l'existence d'un nombre $c \in]a;\ x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

c) En déduire que si $\lim\limits_{c \to a} \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ existe et vaut β (éventuellement infini), alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \beta$$

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{e^{2x} - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x) - x}{\ln(1 + x)}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\ln(2x + 1) - \ln(2x + 3)\right)$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \sin(2x)}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x \ln x)}{x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(4x)}{\sin x}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 1}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + x^2) - \ln(x^2)$.

Exercice 3

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si f est une application dérivable en a alors $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$ pour h suffisamment petit.
2. Une application f n'est pas dérivable en a si et seulement si $\left|\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}\right| \xrightarrow{x \to a} +\infty$.
3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, et $c \in]a, b[$. L'application f est dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ si et seulement si elle l'est sur les intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$.
4. Une application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée est nulle est constante.
5. Il existe une application $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et dont la dérivée tend vers 0.
6. Il existe une application $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$, et dont la dérivée ne tend pas vers 0.

Exercice 4

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Montrer que si f est dérivable en a alors le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Calculer cette limite.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable en a. Montrer que le rapport $\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}$ admet une limite lorsque x tend vers a et calculer cette limite.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que son application réciproque, f^{-1}, est dérivable, et déterminer la valeur de $(f^{-1})'(1)$.
3. Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable et donner la valeur de $(f^{-1})''(1)$.

Exercice 7

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $]0,1[$ par $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) = xf_n'(x)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n de degré n et à coefficients entiers naturels tel que : $\forall x \in]0,1[,\ f_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1-x)^{(n+1)}}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est strictement positive sur $]0,1[$.

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annulant $n+1$ fois sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ admettant une même limite finie en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ et que f' s'annule sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[0,a]$, dérivable sur $[0,a[$, et telle que $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(a)f'(a) < 0 \end{cases}$. Montrer qu'il existe $c \in]0,a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$. Montrer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle en 0 et de dérivée croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{f(x)}{x} \leq f'(x)$.

Exercice 13

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$. Ce résultat est-il vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^*$?

Exercice 14

Déterminer le nombre de racines réelles des polynômes $X^5 - X^3 + 1$ et $4X^3 - 18X^2 + 24X - 9$.

Exercice 15

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$ et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $|\tan x| \geq |x|$.

Exercice 16

Le but de cet exercice est de déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\ln n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n + 1$ et conclure.

Exercice 17

Soient f l'application définie par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2}$.

1. Montrer que l'intervalle $]0,1[$ est stable par f.
2. Montrer que f possède un unique point fixe dans l'intervalle $]0,1[$, que l'on notera α.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2e}{9}|u_n - \alpha|$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n$.
6. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Exercice 18

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \alpha$ et que $\alpha \in [0,1]$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Exercice 19

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$$

Dans toute la suite, on pose $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ de sorte que, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Montrer par récurrence que (u_n) est bien définie, est minorée par 0, majorée par 2 et est croissante.
3. Donner le maximum de $|f'|$ sur $[0;\ 2]$. On notera K ce maximum.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$. On notera α la solution de cette équation.
5. Montrer que pour tout n, $0 \leq \alpha - u_{n+1} \leq K(\alpha - u_n)$.
6. En déduire pour tout n que
$$0 \leq \alpha - u_n \leq K^n(\alpha - u_0)$$
7. En déduire la convergence de (u_n) vers une limite que l'on précisera.

Exercice 20

Le but de cet exercice est de trouver une valeur approchée de l'unique racine réelle du polynôme X^3+X-1.

1. Montrer que le polynôme $X^3 + X - 1$ possède une unique racine réelle α et que l'on a $\alpha \in]0, 1[$.
2. Montrer que α est le point fixe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n$ et en déduire que (u_n) converge vers α.
5. En déduire, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

Exercice 21

Soit une fonction f continue et définie sur un intervalle $[a;\ c]$ et dérivable deux fois sur $]a;\ c[$. Soit $b \in]a;\ c[$.

Soit la fonction polynômiale $P : x \mapsto f(a) \times \dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b) \times \dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c) \times \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-b)(c-a)}$.

Et soit $\varphi : x \mapsto f(x) - P(x)$.

1. Montrer que $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c)$.
2. En déduire qu'il existe θ tel que $\varphi''(\theta) = 0$. Déterminer alors l'expression de $f''(\theta)$.
3. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que $a = b - h$ et $c = b + h$. Exprimer alors $f''(\theta)$ en fonction de b et h.

Corrigé de la planche n° 20: Dérivation et applications

Exercice 1

a)

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &= f(a)(g(x)-g(a)) - g(a)(f(x)-f(a)) \\
&= f(a)g(x) - f(a)g(a) - g(a)f(x) + g(a)f(a) \\
&= f(a)g(x) - g(a)f(x) \\
\varphi(x) &= f(x)(g(x)-g(a)) - g(x)(f(x)-f(a)) \\
&= f(x)g(x) - f(x)g(a) - g(x)f(x) + g(x)f(a) \\
&= -f(x)g(a) + g(x)f(a)
\end{aligned}$$

On obtient $\varphi(a) = \varphi(x)$.

De plus, φ est continue sur $[a;\ x]$ comme combinaison linéaire de fonctions continues et elle est dérivable sur $]a;\ x[$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables.

On est dans les conditions d'application du théorème de Rolle.

b) Il existe $c \in]a;\ x[$ tel que

$$\begin{aligned}
\varphi'(c) = 0 &\iff f'(c)(g(x)-g(a)) - g'(c)(f(x)-f(a)) = 0 \\
&\iff \frac{f'(c)}{g'(c)}(g(x)-g(a)) = f(x)-f(a) \text{ car g' ne s'annule pas}
\end{aligned}$$

Mais puisque g' ne s'annule pas, on sait que $\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \neq 0$ et donc $g(x)-g(a) \neq 0$ par application de l'égalité des accroissements finis. Ainsi, on obtient :

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

c) Lorsque x tend vers a, c tend aussi vers a car c est compris entre a et x. En supposant $\lim\limits_{c\to a} \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, on obtient bien $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \beta$.

> Le résultat obtenu plus haut au moyen d'un exercice s'appelle la règle de l'Hospital. Elle est très utile pour déterminer des limites de quotients dont les dénominateurs et numérateurs tendent vers 0.

Exercice 2

1. Faisons un développement limité d'ordre un sur les fonctions $x \mapsto \sin(3x)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ toutes deux dérivables en 0. Il existe ainsi deux fonctions ε_n et ε_d continues en 0 telles que $\varepsilon_n(0) = \varepsilon_d(0) = 0$ et, pour tout x proche de 0 :

$$\frac{\sin(3x)}{e^{2x}-1} = \frac{3x + x\varepsilon_n(x)}{1+2x-1+x\varepsilon_d(x)} = \frac{3+\varepsilon_n(x)}{2+\varepsilon_d(x)}$$

On en déduit :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{e^{2x}-1} = \frac{3}{2}$$

2. Toujours avec un développement limité d'ordre un appliqué aux fonctions $x \mapsto \sin(2x) - x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$. On a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x) - x}{\ln(1+x)} = 1$$

3. Cette limite est plus compliquée à déterminer. Pour tout $x > \frac{-1}{2}$, on a :

$$x\left(\ln(2x+1) - \ln(2x+3)\right) = x \ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right) = x \ln\left(\frac{2x+3}{2x+3} - \frac{2}{2x+1}\right) = x \ln\left(1 - \frac{2}{2x+1}\right)$$

Maintenant, on pose la changement de variable $X = \frac{1}{2x+1}$, c'est à dire, après calcul, $x = \frac{2-X}{2X} = \frac{1}{X} - \frac{1}{2}$.
De plus, $x \to +\infty \iff X \to 0^+$. On cherche donc :

$$\lim_{X \to 0^+} \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{2}\right) \ln(1-X)$$

Or, pour tout $X > 0$, en faisant un développement limité d'ordre 1 sur $\ln(1-X)$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{2}\right) \ln(1-X) &= \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{2}\right)\left[-X + X\varepsilon(X)\right] \\ &= -1 + \frac{X}{2} + \left(\varepsilon(X) - \frac{X}{2}\varepsilon(X)\right)\end{aligned}$$

Avec ε une fonction continue en 0 et nulle en 0.
La limite recherchée est donc -1

4. Pour changer, utilisons des techniques de trigonométrie. Pour tout $x \notin \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned}\frac{x \sin x}{1 - \cos x} &= \frac{x \sin(x)}{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{2x \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{x \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

Un développement limité d'ordre 1 de $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ en 0 donne :

$$\frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \frac{x \cos(x)}{\frac{x}{2} + x\varepsilon(x)} = \frac{\cos(x)}{\frac{1}{2} + \varepsilon(x)}$$

Avec ε une fonction continue en 0 telle que $\varepsilon(0) = 0$.
La limite recherchée est donc 2.

5. Faisons un développement limité d'ordre un du numérateur. Il existe deux fonctions ε_n continue en 0 avec $\varepsilon_n(0) = 0$ telle que, pour tout x proche de 0 :

$$\frac{\sin x - \sin(2x)}{x^2} = \frac{-x + x\varepsilon_n(x)}{x^2} = \frac{-1 + \varepsilon_n(x)}{x}$$

En 0^+ la limite est donc $-\infty$ tandis qu'en 0^- elle est de $+\infty$.

6. On sait que $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées. On va exploiter le développement limité d'ordre un de sinus en 0. Il existe une fonction ε continue en 0 avec $\varepsilon(0) = 0$ telle que pour tout x proche de 0 par valeurs supérieures :

$$\frac{\sin(x\ln x)}{x} = \frac{x\ln(x) + x\ln(x)\varepsilon(x\ln(x)}{x} = \ln(x)\left(1 + \varepsilon(x\ln(x))\right)$$

On en déduit que la limite recherchée vaut $-\infty$.

7. Par la même technique de développement limité, on obtient une limite de 4.
8. Pour tout $x > 0$, on a

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)$$

On procède au changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$.

On cherche donc la limite quand X tend vers 0^+ de $\dfrac{1}{X}\left(\sqrt{1+X^2} - \sqrt[3]{1+X^3}\right)$.

On peut utiliser des techniques de développement limités d'ordre 1 aux fonctions $x \mapsto \sqrt{1+X^2}$ et $x \mapsto \sqrt[3]{1+X^3}$. Ces deux fonctions ont des dérivées nulles en 0.

Ainsi, il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 continues en 0 telles que $\varepsilon_1(0) = \varepsilon_2(0) = 0$ et telles que :

$$\sqrt{1+X^2} - \sqrt[3]{1+X^3} = (1 + X\varepsilon_1(X)) - (1 + X\varepsilon_2(X)) = X\left(\varepsilon_1(X) - \varepsilon_2(X)\right)$$

On a donc

$$\frac{1}{X}\left(\sqrt{1+X^2} - \sqrt[3]{1+X^3}\right) = (\varepsilon_1(X) - \varepsilon_2(X))$$

La limite recherchée est donc nulle.

9. $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) - \ln(x^2)$. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\ln(1+x^2) - \ln(x^2) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

La limite recherchée est donc nulle.

Exercice 3

1. C'est faux. La dérivée est une limite qui peut ne jamais être atteinte.
2. C'est faux. Considérer par exemple la fonction valeur absolue qui n'est pas dérivable en 0 mais dont le taux d'accroissement ne tend pas vers $+\infty$.
3. C'est faux. Considérer valeur absolue qui est dérivable sur $[-1;\ 0]$ et sur $[0;\ 1]$ mais qui n'est pas dérivable sur $[-1;\ 1]$.
4. C'est faux ! La fonction $x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ n'est pas constante.
5. Oui ! Prendre par exemple $x \mapsto \ln(x)$
6. Oui ! Prendre par exemple $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin(x^2)$. On a, pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2\sqrt{x}\cos(x^2) - \dfrac{\sin(x^2)}{2x^{3/2}}$.

   En particulier f' ne tend pas vers 0 en $+\infty$ même si f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 4

Pour tout $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} &= \frac{f(a+h)-f(a)}{2h} + \frac{f(a)-f(a-h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \times \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a)-f(a-h)}{h}\right]\end{aligned}$$

Sachant que f est dérivable en a, par passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a)$$

La réciproque est fausse. Considérer pour cela la fonction valeur absolue et $a = 0$. Pour tout $h \neq 0$, on a

$$\frac{|h|-|-h|}{2h} = 0$$

Or valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Exercice 5

Pour tout $x \neq a$, on a

$$\begin{aligned}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a} &= \frac{xf(a)-af(a)+af(a)-af(x)}{x-a} \\ &= \frac{xf(a)-af(a)}{x-a} + \frac{af(a)-af(x)}{x-a} \\ &= f(a) - a \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{aligned}$$

Lorsque x tend vers a, la limite de ce rapport est donc $f(a) - af'(a)$.
On aurait pu également s'en sortir en utilisant un développement limite de $f(x)$. Ainsi, il existe une fonction ε telle que $\varepsilon(a) = 0$ et ε continue en a et telle que :

$$\begin{aligned}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a} &= \frac{xf(a)-a\left[f(a)+f'(a)(x-a)+\varepsilon(x)(x-a)\right]}{x-a} \\ &= \frac{xf(a)-af(a)-af'(a)(x-a)-a\varepsilon(x)(x-a)}{x-a} \\ &= \frac{f(a)(x-a)-af'(a)(x-a)-a\varepsilon(x)(x-a)}{x-a} \\ &= f(a)-af'(a)-a\varepsilon(x)\end{aligned}$$

On obtient, bien sûr, avec cette technique, la même limite : $f(a) - af'(a)$.

Exercice 6

1. f est dérivable et, pour tout x, on a $f'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$. Donc f est strictement croissante.
   En outre, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.
   Ainsi, f établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. f' ne s'annule jamais. Ainsi, f^{-1} est dérivable et on a, pour tout x :

   $$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$

   En particulier, $\left(f^{-1}\right)'(1) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(1)}$.
   Reste à trouver l'antécédent de 1 par f. Mais on vérifie très simplement que $f(0) = 1$. Ainsi :

   $$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

3. $\left(f^{-1}\right)'$ est dérivable, comme inverse de fonction dérivable qui ne s'annule pas.

   Ainsi, pour tout x,

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)''(x) &= \frac{-\left(f'\circ f^{-1}\right)'(x)}{\left(f'\circ f^{-1}(x)\right)^2}\\ &= \frac{-\left(f^{-1}\right)'(x)\times f''\circ f^{-1}(x)}{\left(f'\circ f^{-1}(x)\right)^2}\\ &= \frac{-f''\circ f^{-1}(x)}{\left(f'\circ f^{-1}(x)\right)^3}\end{aligned}$$

   On calcule donc $f''(x) = \mathrm{e}^x$ et on en déduit :

$$\left(f^{-1}\right)''(1) = \frac{-\mathrm{e}^0}{2^3} = \frac{-1}{8}$$

Exercice 21

Soient $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ les n+1 antécédents de 0 par f.
En supposant $n \geq 1$, on peut appliquer n fois le théorème de Rolle sur chacun des intervalles $[a_0;\ a_1]$, $[a_1;\ a_2]$, ..., $[a_{n-1};\ a_n]$ car :

- f est dérivable ;
- pour chacun de ces intervalles les images du début et de la fin de l'intervalle par f sont identiques.

On en déduit que f' s'annule n fois en des nombres $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$. On peut poursuivre ainsi le raisonnement, dans le cas où $n \geq 2$. On en déduit que f'' va s'annule n-1 fois. Et ainsi de suite...

Ce « et ainsi de suite » nous indique qu'il faut certainement exploiter le raisonnement par récurrence. Notre hypothèse de récurrence P_n sera donc :
P_n : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable et si f s'annule n+1 fois alors $f^{(n)}$ s'annule une fois.
P_0 s'écrit : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 0 fois dérivable et si f s'annule 0+1 fois alors $f^{(0)}$ s'annule une fois. C'est une tautologie ! La propriété est donc initialisée.
Supposons la proposition vraie pour un certain rang n et montrons la pour le rang suivant. On veut donc montrer :
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est n+1 fois dérivable et si f s'annule n+2 fois alors $f^{(n+1)}$ s'annule une fois.
Pour ce faire, on va considérer une fonction n+1 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ s'annulant $n+2$ fois et on reprend le petit raisonnement fait en préambule. On note ainsi $a_0 < a_1 < \cdots < a_{n+1}$ les n+2 antécédents de 0 par f.
f vérifie le théorème de Rolle sur chacun des intervalles $[a_i;\ a_{i+1}]$ avec $0 \leq i \leq n$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle n+1 fois.
On en déduit que f' s'annule n+1 fois. Et comme f' est n fois dérivable, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à f'.
On en déduit que $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$ s'annule une fois. Cela permet de prouver que l'hypothèse P_n est héréditaire.
L'hypothèse étant héréditaire et initialisée, elle est vraie pour tout n.

Exercice 22

Notons ℓ la limite de f en $\pm\infty$. Pour $\varepsilon = 1$ il existe deux nombres $A < B$ tels que :

- pour tout $x \in]B;\ +\infty[$, $\ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1$ (car $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$) ;
- pour tout $x \in]-\infty;\ A[$, $\ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1$ (car $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$)

On en déduit que f est bornée sur $]-\infty;\ B[\cup]A;\ +\infty[$.
D'autre part, on sait que f est continue car f est dérivable donc l'image de $[A;\ B]$ par f est un intervalle fermé borné, c'est à dire qu'il existe $m < M$ tels que $f([A;\ B]) = [m;\ M]$.
En choisissant $\tilde{M} = \max\{M;\ \ell + 1\}$ et $\tilde{m} = \min\{m;\ \ell - 1\}$, $\tilde{m}$ et $\tilde{M}$ sont respectivement minorants et majorants de f.
Reste à prouver que f' s'annule. Pour ce faire, on va montrer que f admet un maximum ou un minimum.

Notons $s = \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ et $t = \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.
Pour tout x, $t \leq f(x) \leq s$. En particulier, on en déduit que $t \leq \ell \leq s$ par passage à la limite. Si $s = t$ alors f est constante et dans ce cas, le problème est réglé. On se place donc dans le cas contraire.
On peut par exemple supposer que $s > \ell$ (le cas $t < \ell$ se traitant de manière similaire). Pour $\varepsilon = \dfrac{s-\ell}{2}$, il existe deux nombre $C < D$ tels que pour tout $x \in]-\infty;\ C[\cup]D;\ +\infty[$, $f(x) \in]\ell-\varepsilon;\ \ell+\varepsilon$.
Mais, par construction, $\ell + \varepsilon = \dfrac{\ell+s}{2} < s$.
On en déduit que la borne supérieure de f sur $]-\infty;\ C[\cup]D;\ +\infty[$ est strictement inférieure à s.
Par conséquent, le maximum de f sur $[C;\ D]$ (qui existe puisque f est continue) est forcément s. On en déduit que f possède un maximum sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de conclure : sa dérivée s'annule.

Exercice 23

On va faire une disjonction de cas.
Supposons que $f(a) > 0$. Cela signifie que $f'(a) < 0$. En particulier, il existe $b \in]0;\ a[$ tel que $f(b) > f(a)$.
En effet, dans le cas contraire, on aurait pour tout $x \in]0;\ a[$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$, ce qui conduirait par passage à la limite à $f'(a) \geq 0$, ce qui est contradictoire avec le signe de $f'(a)$.
On exploite maintenant le fait qu'une fonction continue sur un intervalle fermé-borné possède un maximum et minimum.
Puisque $f(b) > f(a)$ et que f est continue sur $[0;\ a]$, cela signifie que le maximum de f sur $[0;\ a]$ est strictement compris entre 0 et a.
Le lemme du cours concernant les extrema locaux de fonction dérivables permet de conclure. Il existe c compris entre 0 et a tel que $f'(c) = 0$.
Le cas où $f(a) < 0$ se traite de manière similaire en raisonnant cette fois-ci sur le minimum de f sur $[0;\ a]$.

Exercice 24

L'expression $\dfrac{f(x)}{x}$ représente presque un taux d'accroissement de f. Nous allons donc exploiter les accroissements finis pour aborder cet exercice.
Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe A tel que, pour tout $c > A$, $|f'(c) - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
En raison du théorème des accroissements finis, cela entraîne que pour tout $x > A$, $\left|\dfrac{f(x)-f(A)}{x-A} - \ell\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Reste à prouver que $\dfrac{f(x)-f(A)}{x-A}$ n'est pas trop « éloigné » de $\dfrac{f(x)}{x}$.
On va donc travailler sur l'expression

$$\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - \frac{f(x)}{x} = \frac{-f(A)}{x-A} + \frac{Af(x)}{x(x-A)}$$

Il est clair que $\dfrac{-f(a)}{x-A}$ tend vers 0 en $+\infty$ donc il existe $A' > A$ tel que, pour tout $x > A'$, $\left|\dfrac{-f(a)}{x-A}\right| < \dfrac{\varepsilon}{4}$.
Intéressons-nous maintenant à l'expression $\dfrac{Af(x)}{x(x-A)}$ et montrons qu'elle tend aussi vers 0 en $+\infty$.
Comme f' converge en $+\infty$, $|f'|$ est majorée par un réel $M > 0$ sur un voisinage $]B;\ +\infty[$. On peut même choisir $B > A'$.
Mais alors, on a pour tout $x > B$, $|f(x) - f(B)| \leq M\,|x - B|$ et en particulier, $|f(x)| \leq |f(B)| + M\,|x - B|$.
Ainsi, on obtient :

$$\left|\frac{Af(x)}{x(x-A)}\right| \leq \left|\frac{f(B)}{x(x-A)}\right| + \left|\frac{M(x-B)}{x(x-A)}\right|$$

Cette dernière majoration nous confirme que $\dfrac{Af(x)}{x(x-A)}$ tend vers 0 en $+\infty$. Ainsi, il existe $B' > B > A' > A$ tel que, pour tout $x > B'$, $\left|\dfrac{Af(x)}{x(x-A)}\right| < \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Finalement, $\left|\dfrac{f(x)-f(A)}{x-A}-\dfrac{f(x)}{x}\right| \leq \left|\dfrac{-f(A)}{x-A}\right| + \left|\dfrac{Af(x)}{x(x-A)}\right| < \dfrac{\varepsilon}{4}+\dfrac{\varepsilon}{4}=\dfrac{\varepsilon}{2}$.
On a donc bien, pour tout $x > B'$:

$$\left|\frac{f(x)}{x}-\ell\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Autre option délirante : par le théorème de Césaro
On peut traiter cet exercice de la même manière que le théorème de Cesàro (vu en DM).
On va donc commencer par prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{f(\lfloor x\rfloor)}{\lfloor x\rfloor}=0$ puis par démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(\lfloor x\rfloor)}{\lfloor x\rfloor}=\ell$.

On sait qu'il existe un nombre $A>0$ tel que, pour tout $x>A$, $f'(x)\in[\ell-1;\ \ell+1]$. En particulier, f' est bornée sur $]A;\ +\infty[$. Notons M un majorant de $|f'|$ sur $]A;\ +\infty[$.
On en déduit, par application de l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x>A+1$:

$$|f(x)-f(\lfloor x\rfloor)| \leq M(x-\lfloor x\rfloor)$$

Ainsi,

$$\left|\frac{f(x)-f(\lfloor x\rfloor)}{x}\right| \leq M\frac{(x-\lfloor x\rfloor)}{x} \leq \frac{M}{x}$$

En particulier, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{M}{x}=0$ donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-\frac{f(\lfloor x\rfloor)}{x}=0$$

Or :

$$\frac{f(x)}{x}-\frac{f(\lfloor x\rfloor)}{\lfloor x\rfloor}=\frac{f(x)}{x}-\frac{f(\lfloor x\rfloor)}{x}+\frac{f(\lfloor x\rfloor)}{x}-\frac{f(\lfloor x\rfloor)}{\lfloor x\rfloor}$$

Mais, pour tout $x>A+1$:

$$\left|\frac{f(\lfloor x\rfloor)}{x}-\frac{f(\lfloor x\rfloor)}{\lfloor x\rfloor}\right| = \left|f(\lfloor x\rfloor)\times\frac{\lfloor x\rfloor-x}{x\lfloor x\rfloor}\right| \leq |f(x)|\times\frac{1}{(x-1)^2}$$

Or, en raison de l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(x)| \leq |f(A)|+M|x-A|$$

Ce qui donne :

$$\left|\frac{f(\lfloor x\rfloor)}{x}-\frac{f(\lfloor x\rfloor)}{\lfloor x\rfloor}\right| \leq \frac{|f(A)|+M|x-A|}{(x-1)^2}$$

Cette dernière expression tend vers 0.
On en déduit finalement que

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}-\frac{f(\lfloor x\rfloor)}{\lfloor x\rfloor}\right|=0$$

Pour achever cette démonstration, nous allons prouver que la suite $\dfrac{f(n)}{n}$ tend vers 0 en utilisant le théorème de Césaro.
Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f(n)-f(0)=\sum\limits_{0\leq k\leq n-1} f(n+1)-f(n)$.
Soit la suite $u_n=f(n+1)-f(n)=\dfrac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n}$. En raison de l'égalité des accroissements finis, cette suite tend vers l.
On en déduit, par le théorème de Cesàro que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{0\leq k\leq n-1} u_k=l$.
Or, par construction, $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{0\leq k\leq n-1} u_k=\dfrac{f(n)}{n}-\dfrac{f(0)}{n}$, ce qui permet de conclure quant à la limite de $\dfrac{f(n)}{n}$.

Exercice 29

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln(k+1) - \ln(k) = \dfrac{\ln(k+1) - \ln(k)}{k+1-k}$. On reconnaît que cette dernière expression est un taux d'accroissement.
   Or la fonction logarithme est dérivable sur son domaine de définition et sa dérivée est la fonction inverse.
   Ainsi, $\exists t \in]k;\ k+1[/\ \ln(k+1) - \ln(k) = \dfrac{1}{t}$. Or, $t \in]k;\ k+1[\Longrightarrow \dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{t} < \dfrac{1}{k}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$.
   On en déduit :
   $$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) < \frac{1}{k}$$
   Ici, on a même prouvé l'inégalité stricte !
2. On somme les inégalités précédentes pour $k \in [\![1;\ n-1]\!]$. Les termes centraux sont télescopiques. On obtient :
   $$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \ln(n) - \ln(1) < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$
   En faisant un changement d'indice sur la première somme, on obtient :
   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \ln(n) < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$
3. Notons que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1$. La première inégalité prouvée à la question précédente donne donc :
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 < \ln(n)$$
   C'est à dire :
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \ln(n) + 1$$
   La seconde inégalité que l'on a prouvé à la question précédente s'écrit :
   $$\ln(n) < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$
   Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Ainsi, on a
   $$\ln(n) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
   On a donc bien l'encadrement recherché :
   $$\ln(n) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \ln(n) + 1$$
   En particulier, on en déduit que, pour $n > 1$, en divisant par $\ln(n)$ la série d'inégalités précédente :
   $$1 < \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} < 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$
   Cela nous prouve, par le théorème des Gendarmes, que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1$, c'est à dire que
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Exercice 30

Notons que f est définie et dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas. En particulier f est continue.

1. Il faut déterminer le sens de variation de f. On dérive, pour tout $x \neq -2$:

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$$

   Sur $]0;\ 1[$, cette fonction est strictement positive donc f est strictement croissante. Or $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{e}{3} < 1$. Ainsi, $f\left(]0;\ 1[\right) \subset]0;\ 1[$.

2. Trouver un point fixe de f revient à trouver un zéro de $\varphi : x \mapsto f(x) - x$. Cette fonction est dérivable sur $[0;\ 1]$ comme différence de fonctions dérivables. De plus, $\varphi(0) = \frac{1}{2} > 0$ et $\varphi(1) = \frac{e}{3} - 1 < 0$.
   Ainsi φ change de signe. Comme φ est continue sur $[0;\ 1]$, elle s'annule au moins une fois sur cet intervalle par application du théorème des valeurs intermédiaires.
   Montrons que cet antécédent de 0 est unique. Pour ce faire, il faut étudier les variations de φ. Un peu de calcul montre que, pour tout $x \neq -1$:

$$\varphi'(x) = f'(x) - 1 = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2} - 1$$

   Le signe de cette expression n'est pas évident. Il faut donc étudier les variations de φ'. Or cette fonction est dérivable sur son ensemble de définition comme quotient de fonctions dérivables.
   Avec d'autres calculs, on obtient, pour tout $x \neq 0$:

$$\varphi''(x) = f''(x) = \frac{e^x(x^2+2x+2)}{(x+2)^3}$$

   Or la fonction $x \mapsto x^2 + 2x + 2$ est toujours positive car son discriminant -8 est négatif. On en déduit que φ'' est positive, ce qui prouve que φ' est croissante. On calcule enfin $\varphi'(0) = \frac{-3}{4} < 0$ et $\varphi'(1) = \frac{2e}{9} - 1 < 0$. Ainsi, φ est strictement décroissante et, par suite, φ est injective.
   Le zéro de φ est donc unique.

3. Cela se fait par récurrence. On pose, pour tout n l'hypothèse :

$$P_n : u_n \text{ existe et } u_n \in]0;\ 1[$$

   P_0 est bien sûr vraie donc la propriété est *initialisée*.
   Supposons la propriété vraie pour un certain n. Comme $u_n \neq -2$, on sait que $f(u_n)$ existe donc u_{n+1} existe.
   De même, sachant que $u_n \in]0;\ 1[$ et que $]0;\ 1[$ est stable par f, on en déduit que $f(u_n) \in]0;\ 1[$, c'est à dire $u_{n+1} \in]0;\ 1[$. La propriété est donc bien héréditaire.
   Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout n.

4. C'est une application de l'inégalité des accroissements finis.
   En effet, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$, $\alpha = f(\alpha)$ (car est un point fixe). On cherche donc à montrer :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{2e}{9}|u_n - \alpha|$$

   Pour ce faire, on va chercher à majorer $|f'|$ sur l'intervalle $[0;\ 1]$. On a montré précédemment que $f''(x) = \varphi''(x) > 0$ pour tout x de $[0;\ 1]$. Cela montre que f' est strictement croissante. Or $f'(0) = \frac{1}{4}$ et $f'(1) = \frac{2e}{9}$.

Ainsi, $f'([0;\ 1]) = \left[\frac{1}{4};\ \frac{2\mathrm{e}}{9}\right]$ et en particulier, pour tout x de $[0;\ 1]$,

$$|f'(x)| \leq \frac{2\mathrm{e}}{9}$$

Nous savons d'autre part que α et u_n sont deux nombres de $[0;\ 1]$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc bien, pour tout n :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{2e}{9}|u_n - \alpha|$$

5. On peut montrer cela par récurrence sur n. Posons ainsi, pour tout n l'hypothèse Q_n :

$$Q_n :\ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n$$

Q_0 s'écrit $|u_0 - \alpha| \leq 1$ et est vraie car u_0 et α sont deux nombres de l'intervalle $]0;\ 1[$.
On suppose que, pour un certain rang n, Q_n est vraie. Montrons alors que Q_{n+1} est également vraie.
Mais on sait, d'après la question précédente que :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2\mathrm{e}}{9}|u_n - \alpha|$$

Or, par hypothèse de récurrence $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2\mathrm{e}}{9}\right)^n$. On obtient donc :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2\mathrm{e}}{9} \times \left(\frac{2\mathrm{e}}{9}\right)^n \text{ soit } |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2\mathrm{e}}{9}\right)^{n+1}$$

La propriété est donc initialisée et héréditaire donc vraie pour tout n.

6. C'est très facile !
La suite $\left(\frac{2\mathrm{e}}{9}\right)^n$ est géométrique de raison comprise strictement entre -1 et 1 donc elles tend vers 0.
On en déduit, d'après l'encadrement qui précède, que $|u_n - \alpha|$ tend vers 0 ce qui montre que (u_n) tend vers α.

Exercice 31

On pose $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur ne s'annule pas, comme quotient de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} > 0$$

(u_n) est définie par la relation, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. On sait que f est strictement croissante car sa dérivée est strictement positive. Or $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{\mathrm{e}}{1 + \mathrm{e}} < 1$.
On en déduit que $f([0;\ 1]) \subset [0;\ 1]$.
Montrons par récurrence que, pour tout n, $u_n \in [0;\ 1]$.
$u_0 \in [0;\ 1]$. La propriété est initialisée.
Je suppose que, pour un certain n, $u_n \in [0;\ 1]$. Or $[0;\ 1]$ est stable par f donc $f(u_n) = u_{n+1} \in [0;\ 1]$.
La propriété est donc héréditaire.
Par principe de récurrence elle est vraie pour tout n.

2. Posons $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ et montrons que φ ne s'annule qu'une seule fois.
$\varphi(0) = \dfrac{1}{2} > 0$ et $\varphi(1) = \dfrac{-1}{1+\mathrm{e}} < 0$. Or φ est continue sur $[0;\ 1]$ donc elle s'annule au moins une fois.
Pour montrer que φ est injective, on étudie ses variations.
φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x :

$$\varphi'(x) = f'(x) - 1 = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} - 1$$

Or $(\mathrm{e}^x+1)^2 \geq \mathrm{e}^x + 1 > \mathrm{e}^x$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} < 1$ donc $\varphi'(x) < 0$ pour tout x de $[0;\ 1]$.
φ est strictement décroissante donc l'antécédent est unique !

3. C'est encore une fois une application de l'inégalité des accroissements finis ! Il s'agit de majorer $|f'|$ sur $[0;\ 1]$. Sachant que le sens de variation de f' n'est pas évident et que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut déterminer les variations de f' en calculant f''. Un peu de calcul donne, pour tout x,

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^3}$$

Or, pour $x \geq 0$, $\mathrm{e}^x \geq 1$ et donc f'' est négative sur $[0;\ 1]$. On en déduit que f' est décroissante. On peut donc facilement déterminer le tableau de variations de f' et, par suite, celui de $|f'|$.

x	0	1
$f'(x)$	$\frac{1}{4}$ ↘	$\frac{\mathrm{e}}{(1+\mathrm{e})^2}$
$\lvert f'(x)\rvert$	$\frac{1}{4}$ ↘	$\frac{\mathrm{e}}{(1+\mathrm{e})^2}$

On en déduit que le maximum de $|f'|$ sur $[0;\ 1]$ est $\dfrac{1}{4}$.
En particulier d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout n :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha| \iff |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

Il ne nous reste plus qu'à prouver par récurrence la proposition :

$$P_n : |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}$$

Cette proposition est vraie au rang 0 car u_0 et α sont des nombres de $[0;\ 1]$ donc $|u_0 - \alpha| \leq \dfrac{1}{4^0} = 1$.
Supposons la vraie au rang n. D'après ce que l'on vient de montrer, au rang n+1, on sait que

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n+1}}$$

On en déduit que la proposition est héréditaire.
Par principe de récurrence elle est vraie pour tout n.

4. C'est très facile. En effet, la suite $\left(\frac{1}{4^n}\right)$ est géométrique de raison comprise strictement entre -1 et 1 donc cette suite converge vers 0.
   On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 32

1. f est définie sur $[-1;\ +\infty[$ et dérivable sur $]-1;\ +\infty[$. Cela s'obtient par composition sachant que racine est définie sur $\mathbb{R}^+$ et C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. On va montrer par récurrence, pour tout n, la proposition P_n :
$$P_n : u_n \text{ et } u_{n+1} \text{ existent et } \quad 0 \leq u_n \leq u_{n+1}$$
   $u_1 = \sqrt{1}$. Donc la proposition P_0 est vraie.
   On suppose que pour un certain n P_n est vraie. En particulier $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ existe en raison du domaine de définition de f.
   f étant croissante comme composée de fonctions croissantes, on a ainsi :
$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2) \iff 1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \sqrt{3}$$
   Or $\sqrt{3} \leq 2$ et $0 \leq 1$. Ainsi, on obtient bien :
$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$$
   Ce qui prouve que P_{n+1} est vraie.
   Ainsi, par principe de récurrence, pour tout n, P_n est vraie. En particulier (u_n) est croissante et bornée par 0 et 2.
3. Pour tout $x > -1$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$. Or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ est décroissante sur $]-1;\ +\infty[$ comme composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.
   En particulier, $f'([0;\ 2]) = [f'(2);\ f'(0)] = \left[\frac{\sqrt{3}}{6};\ \frac{1}{2}\right]$. On en déduit que $|f'|$ possède pour maximum $K = \frac{1}{2}$ sur $[0;\ 2]$.
4. On résout $f(x) = x \iff \sqrt{x+1} = x$. Pour $x \in [-1;\ 0[$, cette équation n'a pas de solution car une racine est positive. On raisonne donc pour tout $x \geq 0$:
$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} = x &\iff x+1 = x^2 \text{ car carré est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+\\ &\iff x^2 - x - 1 = 0\\ &\iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ &\text{(on élimine } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ car ce nombre est négatif)}\end{aligned}$$
   Finalement on a $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or).
5. C'est une application de l'inégalité des accroissements finis sachant que, pour tout n :
   - $|f'|$ est majorée par K sur $[0;\ 2]$;
   - $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\alpha) = \alpha$

   On en déduit que, pour tout n :
$$|f(\alpha) - f(u_n)| \leq K\,|\alpha - u_n| \iff |\alpha - u_{n+1}| \leq K\,|\alpha - u_n|$$
   Mais comme f est croissante, pour tout n, $\alpha - u_n$ est du même signe de $\alpha - u_{n+1}$. Or, $\alpha - u_0 \geq 0$ car $\alpha \geq 0$.
   Par une récurrence très rapide, on en déduit que, pour tout n, $\alpha - u_n \geq 0$. Finalement cette série d'inégalité s'écrit :
$$0 \leq (\alpha - u_{n+1}) \leq K(\alpha - u_n)$$

6. Cela se fait par récurrence. On pose, pour tout n, $Q_n : 0 \leq \alpha - u_n \leq K^n(\alpha - u_0)$.
   Q_0 s'écrit $0 \leq \alpha - u_0 \leq 1 \times (\alpha - u_0)$ et est vraie.
   On suppose Q_n vraie à un certain rang n. Au rang $n+1$, on sait d'après la question précédente que
   $$0 \leq \alpha - u_{n+1} \leq K(\alpha - u_n)$$
   En exploitant l'hypothèse de récurrence, il vient :
   $$0 \leq \alpha - u_{n+1} \leq K \times K^n(\alpha - u_0) \quad \text{soit} \quad 0 \leq \alpha - u_{n+1} \leq K^{n+1}(\alpha - u_0)$$
   Cela prouve que l'hypothèse Q_n est héréditaire.
   Par principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.
7. Sachant que $K = \dfrac{1}{2} \in]-1;\ 1[$, la suite $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0 en $+\infty$.
   Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - \alpha) = 0$. On en déduit $\lim u_n = \alpha$.

Exercice 34

1. On calcule $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$ et enfin $P(c) = f(c)$. On en déduit $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c) = 0$.
2. La fonction φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle sur $[a;\ b]$ et sur $[b;\ c]$. En effet, sur ces intervalles, φ est dérivable et les valeurs de φ aux extrémités de chacun des intervalles sont les mêmes.
   On en déduit qu'il existe $(\alpha;\ \beta) \in]a;\ b[\times]b;\ c[$ tels que $\varphi'(\alpha) = \varphi'(\beta) = 0$.
   Mais φ' vérifie encore les hypothèses du théorème de Rolle sur $[\alpha;\ \beta]$. On en déduit qu'il existe $\theta \in]\alpha;\ \beta[\subset]a;\ c[$ tel que $\varphi''(\theta) = 0$.
   Un peu de calcul donne $f''(\theta) = P''(\theta) = 2\left[\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{f(c)}{(c-b)(c-a)}\right]$.
3. On réexploite la formule du dessus sachant que $b - a = c - b = h$ et $c - a = 2h$. On obtient :
   $$f''(\theta) = \frac{f(a) + f(c) - 2f(b)}{h^2}$$

Le résultat ci-dessus est une sorte de généralisation de l'égalité des accroissements finis pour la dérivée seconde. L'une de ces exploitations concerne par exemple la résolution d'équations différentielles du second ordre par la méthode d'Euler.

Planche n° 21: Compléments sur les suites

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right). \end{cases}$

1. Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$.
   Montrer que pour tout $x \geq \sqrt{a}$, on a $f(x) \leq x$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{a}$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 > e \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e\ln(u_n). \end{cases}$

1. Tracer les courbes d'équation $y = x$ et $y = e\ln(x)$, et essayer de deviner le comportement de la suite.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Montrer que si $u_0 \geq e$, alors la suite converge vers e.
4. On suppose maintenant que $u_0 < e$. Montrer que la suite ne peut pas être minorée par 0. En déduire que la suite n'est définie que pour un nombre fini de termes.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$. Montrer que la suite est bien définie, étudier sa convergence et déterminer son éventuelle limite. (*Indication* : On pourra commencer par tracer les courbes d'équation $y = x$ et $y = \sqrt{x+4}$, et essayer de deviner le comportement de la suite.)

Exercice 4

Soient $f : x \mapsto 1 + \dfrac{2}{x}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'intervalle $[1,3]$ est stable par f, c'est-à-dire que $f([1,3]) \subset [1,3]$.
   Que peut-on en déduire sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Quel est le sens de variation de f sur $[1,3]$?
2. Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   Montrer que (v_n) est croissante et (w_n) décroissante.
3. En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leur limite respective.
4. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Exercice 5

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in]-\infty, 2] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}. \end{cases}$

1. Pour quelles valeurs de u_0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ? (*Indication* : On pourra étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2-x}$ et s'intéresser aux intervalles I de $\mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset I$.)
   On suppose désormais que u_0 a une telle valeur.
2. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Qu'en déduit-on ?

4. On cherche à présent les points fixes de $f \circ f$.
   (a) Déterminer les points fixes de f et montrer qu'ils sont points fixes de $f \circ f$.
   (b) Montrer que les points fixes de $f \circ f$ sont racines d'un polynôme de degré 4.
   (c) Déterminer les points fixes de $f \circ f$ en utilisant les deux questions précédentes.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6

Donner un équivalent simple des suites de termes généraux suivants :

$$\frac{3n^4-2n^2+1}{2n^3+1};\quad \frac{\ln n+n+1}{3n^2+2n+1};\quad n^3\frac{\ln n+e^n+1}{1+n^2};\quad \ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right);\quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right);\quad \sin\sin\frac{\pi}{n^2};$$

$$\frac{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\tan\frac{\pi}{n}};\quad \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\cos\left(\frac{\pi}{n^2}\right)-e^{\frac{1}{n}}};\quad \frac{\ln(n^3+3)}{n+2};\quad 1+e^{2/n}-\frac{3}{n};\quad \ln(n+2)-\ln(n+1).$$

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est décroissante. (*Indication :* Que vaut $f_{n+1} - f_n$?)
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$, et retrouver ainsi la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Montrer : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
6. Donner un équivalent simple de $\frac{1}{n} - u_n$ en $+\infty$.

Exercice 8

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln x = n$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ que nous noterons u_n.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et déterminer sa limite.
3. En déduire : $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$.
4. Montrer : $u_n - n \underset{+\infty}{\sim} -\ln n$.

Exercice 9

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie au fausse (en justifiant).

1. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
3. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$.
4. $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$ si et seulement si $u_n - v_n \underset{+\infty}{=} o(1)$
5. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang alors $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.
6. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

Exercice 10

Soit une suite (u_n) qui ne s'annule pas.

1. On suppose qu'il existe $\alpha \in]0;\ 1[$ et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq N$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \alpha$.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq |u_N|\,\alpha^{n-N}$.
   (b) Que peut-on en déduire concernant la limite de (u_n) ?
2. Une première application du résultat précédent
   (a) Soit x un nombre réel. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{x^n}{n!}$.
   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 0$.
   (b) En déduire que $x^n = o(n!)$
3. Une seconde application du résultat précédent.
   En utilisant une démarche similaire à la question précédente, prouver les relations suivantes. β et α sont deux réels fixés avec $\alpha > 1$.

$$n! = o(n^n) \qquad\qquad n^\beta = o\left(\alpha^n\right)$$

Exercice 11

Lorsque c'est possible, déterminer les limites suivantes :

$$\forall n \geq 2,\ u_n = \frac{n\sin(n)}{n^2-1} \qquad\qquad \forall n \geq 1,\ v_n = \frac{n+(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\forall n,\ w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad\qquad \forall n \geq 2,\ z_n = \frac{2^n}{3^n-5}$$

Exercice 12

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. *Justifier.*

a) Si une suite est croissante et n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.
b) Si une suite converge vers une limite strictement positive alors tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.
c) Si une suite est strictement croissante, ses termes deviennent positifs à partir d'un certain rang.
d) Toute suite positive qui tend vers $+\infty$ est croissante.
e) Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent alors (u_n) converge.
f) De toute suite non majorée, on peut extraire une sous-suite qui tend vers $+\infty$.

Exercice 13

On considère l'algorithme suivant :

```
Saisir n
a vaut 1
b vaut 2
m vaut 1,5
Pour i allant de 1 à n:
    Si m^2 > 2:
        b vaut m
    Sinon:
        a vaut m
    Fin si
m vaut (a+b)/2
Fin pour
Afficher a et b
```

1. Que va afficher l'algorithme si l'utilisateur saisit 2 ?
2. On note a_n la valeur de a en sortie d'algorithme et b_n la valeur de b en sortie d'algorithme. Enfin, on note $\delta_n = b_n - a_n$
   (a) Quelle est la nature de la suite δ ? En déduire sa limite.
   (b) Pourquoi peut-on affirmer que les suites a et b sont adjacentes.
   (c) Quelle est la limite commune des suites a et b ?
3. Comment appelle-t-on ce type d'algorithme ?

Exercice 14

Soit $q > 1$ un réel.
On souhaite étudier la limite de la suite $h_n = \dfrac{q^n}{n}$ définie à partir du rang 1.
Pour cela, on pose, pour tout $n \geq 1$, $r_n = \dfrac{h_{n+1}}{h_n}$.

1. Montrer qu'il existe un certain rang p tel que, pour tout $n \geq p$, $r_n > \dfrac{q+1}{2}$. *On pourra s'intéresser à l'éventuelle convergence de la suite* (r_n).
2. (a) Montrer que pour tout $n \geq p$, $h_n \geq h_p \left(\dfrac{q+1}{2}\right)^{n-p}$.
   (b) Conclure quant à la limite de (h_n).

Exercice 15

Soit (u_n) une suite.
Pour tout n, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$.
On suppose que T_n est majorée.

1. Montrer que T_n converge.
2. Soit
   $K(n) = \{k \in \mathbb{N} / k \leq n \text{ et } u_k \geq 0\}$ et $L(n) = \{k \in \mathbb{N} / k \leq n \text{ et } u_k < 0\}$.
   Montrer que $S_n = \sum_{k \in K(n)} u_k + \sum_{k \in L(n)} u_k = \sum_{k \in K(n)} |u_k| - \sum_{k \in L(n)} |u_k|$.
3. En déduire que S_n converge.

Exercice 16

Soit une suite (u_n). Pour tout entier n, on pose $v_n = \dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$.

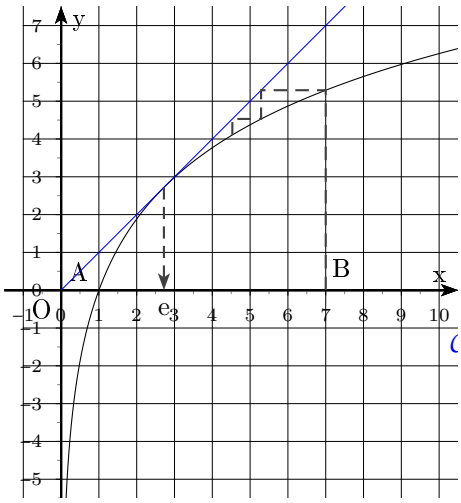
1. On suppose que la suite (u_n) converge vers un nombre ℓ. Montrer que la suite (v_n) converge aussi vers ℓ.
2. En trouvant un contre-exemple, montrer que la réciproque est fausse.

Corrigé de la planche n° 21: Compléments sur les suites

Exercice 2

1. On trace la courbe de $f : x \mapsto \mathrm{e}\ln(x)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, sachant que
   - $f(1) = 0$
   - $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$
   - $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$

   On trace également la première bissectrice. Pour notre test, on part de $u_0 = 7$.



   La suite semble décroissante et converger vers e.

2. On veut montrer, pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n \iff u_n - u_{n+1} \geq 0 \iff f(u_n) - u_n \geq 0$.
   Cela nous conduit à poser la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
   Pour tout $x > 0$, on calcule, $\varphi'(x) = \dfrac{x - \mathrm{e}}{x}$. On calcule $\varphi(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - f(\mathrm{e}) = 0$ puis on dresse le tableau de variations de φ :

x	0		e		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	‖	↘	0	↗	

   On obtient bien, pour tout $x > 0$, $\varphi(x) \geq 0$, ce qui montre que, pour tout n, $\varphi(u_n) \geq 0$, c'est à dire $u_{n+1} \leq u_n$. La suite est donc bien décroissante.

3. On va montrer par récurrence que, pour tout n, $u_n \geq \mathrm{e}$. On note P_n cette hypothèse.
   P_0 est bien sûr vraie car on suppose $u_0 \geq \mathrm{e}$ donc l'hypothèse est initialisée.
   On suppose que, pour un certain rang n, P_n est vraie, c'est à dire $u_n \geq \mathrm{e}$.
   Mais comme f est croissante, on en déduit $f(u_n) \geq f(\mathrm{e}) \iff u_{n+1} \geq \mathrm{e}$ car $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$, ce qui prouve que l'hypothèse est également héréditaire.
   Par récurrence elle est donc vraie pour tout n.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par e donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite ℓ.

Par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on en déduit que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, c'est à dire $\varphi(\ell) = 0$. Or l'étude de φ établie précédemment nous a montré que φ ne s'annule qu'en e. On a donc $\ell = \mathrm{e}$.

4. Par l'absurde ! Si la suite était minorée, elle convergerait vers une limite $\ell \leq u_0 < \mathrm{e}$ car la suite est décroissante. Mais on a vu précédemment que la seule solution de l'équation $f(\ell) = \ell$ était $\ell = \mathrm{e}$, ce qui conduit à une contradiction !

   On en déduit que (u_n) n'est pas minorée. En particulier, pour un certain rang p on a $u_p \leq 0$. Mais dans ce cas, on ne peut pas calculer u_{p+1} en raison du domaine de définition de f. Ainsi, (u_n) n'est plus définie à partir du rang $p+1$.

Exercice 3

Le tracé de la courbe sur brouillon montre que (u_n) semble croissante et convergente vers une limite légèrement inférieure à 3.

On va prouver notre conjecture par récurrence. On pose ainsi pour tout n, $P_n : 3 \geq u_{n+1} \geq u_n \geq 0$ qui doit établir que (u_n) est croissante et majorée par 3.
On commence par calculer $u_1 = \sqrt{4} = 2$. On a bien $3 \geq u_1 \geq u_0 \geq 0$, ce qui prouve que P_0 est vraie.
Supposons, pour un certain n, que P_n est vraie, c'est à dire $3 \geq u_{n+1} \geq u_n$. Remarquons que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+4}$ est croissante et définie sur $[-4;\ +\infty[$, comme composée de fonctions croissantes.
On peut donc appliquer f à cette inégalité dont tous les membres sont supérieurs à -4 et on en déduit $f(3) \geq f(u_{n+1}) \geq f(u_n) \geq f(0)$, c'est à dire $\sqrt{7} \geq u_{n+2} \geq u_{n+1} \geq 2$. Or $3 \geq \sqrt{7}$ et $2 \geq 0$. Finalement P_{n+1} est également vraie.
La proposition est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout n. Cela prouve que (u_n) est croissante et majorée par 3. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite ℓ.
Par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, on en déduit que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Résolvons $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}^+$ (en effet, on sait que $\ell \geq u_0$. Pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \sqrt{x+4} = x \\ &\iff x + 4 = x^2 \text{ car } x \geq 0 \text{ et que carré est croissante} \\ &\iff x^2 - x - 4 = 0 \end{aligned}$$

Après calcul du discriminant on obtient l'unique solution $\ell = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Exercice 4

1. f est définie sur $\mathbb{R}_*$. En outre, elle est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$. On a donc

$$f([1;\ 3]] = [f(3);\ f(1)] = \left[\frac{5}{3};\ 3\right] \subset [1;\ 3]$$

   L'intervalle $[1;\ 3]$ est bien stable par f.

   On va en déduire la proposition suivante, pour tout n, $P_n : u_n$ existe et appartient à $[1;\ 3]$.

   P_0 est vraie car $u_0 = 1$.

   On suppose P_n vraie pour un certain n, c'est à dire $u_n \in [1;\ 3]$. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$ existe bien et est dans $f([1;\ 3]) \subset [1;\ 3]$, ce qui prouve que la proposition est héréditaire.

   Par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout n. Ainsi la suite (u_n) est bien définie et bornée par 1 et 3.

2. Notons que, pour tout n, $v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f \circ f(u_{2n}) = f \circ f(v_n)$.

   De même, $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$. Or la fonction $f \circ f$ est croissante sur $[1;\ 3]$ car f est décroissante.

Cette remarque établie, on va maintenant montrer par récurrence, pour tout n, la proposition $Q_n : v_n \leq v_{n+1}$.

On calcule $v_1 = u_2 = \dfrac{5}{3} > v_0$ donc la propriété est initialisée.

On suppose que, pour un certain n, Q_n est vraie. Sachant que $f \circ f$ est croissante, on en déduit $f \circ f(v_{n+1}) \geq f \circ f(v_n)$, c'est à dire $v_{n+2} \geq v_{n+1}$. On en déduit que l'hypothèse Q_n est héréditaire.

Par principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout n, ce qui prouve que (v_n) est croissante.

On vient de prouver que, pour tout n, $v_{n+1} \geq v_n$. Or f est décroissante donc on en déduit $f(v_{n+1}) \leq f(v_n)$, c'est à dire $u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$, ce qui s'écrit aussi $w_{n+1} \leq w_n$, ce qui montre que (w_n) est décroissante.

3. (v_n) et (w_n) convergent car elles sont monotones et bornées. Elles convergent donc nécessairement vers des points fixes de $f \circ f$. On va donc résoudre, pour $x > 0$ l'équation :

$$\begin{aligned} f \circ f(x) = x &\iff 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{x}} = x \\ &\iff \frac{x + 2 + 2x}{x + 2} - x = 0 \\ &\iff \frac{x + 2 + 2x - x^2 - 2x}{x + 2} = 0 \\ &\iff x^2 - x - 2 = 0 \end{aligned}$$

Après calcul du discriminant, on obtient deux racines $r_1 = 2$ et $r_2 = -1$. On doit écarter r_2 car elle n'est pas dans l'intervalle $[1;\ 3]$. On en déduit que (v_n) et (w_n) convergent vers 2.

4. Comme la suite des termes pairs et la suite des termes impairs convergent vers 2, on en déduit que (u_n) converge vers 2.

Exercice 5

1. La fonction f est décroissante comme composée d'une fonction décroissante et d'une fonction croissante. De plus, elle est définie sur $]-\infty;\ 2]$. Il faut donc s'assurer que (u_n) reste dans cet intervalle.

   On constate ainsi que 2 est une valeur limite du domaine de définition de f. En résolvant $f(x) = 2$, on obtient $x = -2$. Compte-tenu du sens de variations de f, pour tout $x < -2$, on a $f(x) > f(-2) = 2$, ce qui prouve que $f \circ f(x)$ n'existe alors pas !

   En pratique, cela signifie que pour $u_0 < -2$, u_1 existe mais pas u_2.

   On va maintenant montrer que, pour $u_0 \in [-2;\ 2]$, la suite est bien définie.

   Montrons ainsi par récurrence l'hypothèse $P_n : u_n \in [-2;\ 2]$.

   P_0 est vraie donc l'hypothèse est initialisée.

   Supposons maintenant pour un certain n que P_n est vraie, c'est à dire $u_n \in [-2;\ 2]$. On en déduit que $u_{n+1} = f(u_n)$ existe bien. D'après le sens de variation de f, $f([-2;\ 2]) = [0;\ 2] \subset [-2;\ 2]$. Donc $u_{n+1} \in [0;\ 2] \subset [-2;\ 2]$. Ainsi l'hypothèse est héréditaire.

   Comme elle est aussi initialisée, elle est vraie pour tout n.

2. À partir de maintenant, on suppose que $u_0 \in [-2;\ 2]$ et on sait que, pour tout n, $u_n \in [-2;\ 2]$ d'après ce qui précède.

   En faisant quelques dessins, on voit que le sens de variation des suites extraites dépend de la position des tous premiers termes entre eux, ce qui nous conduit à réaliser une disjonction de cas.

   - Dans le cas où $u_2 \geq u_0$, en appliquant f à l'inégalité, on obtient $u_3 \leq u_1$ puis en ré-appliquant f on obtient $u_4 \geq u_2 \geq u_0$. Cette petite manipulation nous donne donc le principe de la démonstration.
     On va donc prouver par récurrence, pour tout n, l'hypothèse $P_n : u_{2n+2} \geq u_{2n}$.
     Par hypothèse, P_0 est vraie, ce qui initialise la démonstration.
     On va maintenant supposer que P_n est vraie pour un certain n, c'est à dire $u_{2n+2} \geq u_{2n}$.
     En appliquant f deux fois à ces deux inégalités, sachant que la fonction est décroissante, on obtient $u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$ puis $u_{2n+4} \geq u_{2n+2}$, ce qui prouve que p_{n+1} est vraie.

L'hypothèse étant initialisée et héréditaire elle est vraie pour tout n, ce qui prouve que la suite (u_{2n}) est croissante.
Or, toujours en raison du sens de variation de f, pour tout n, partant de $u_{2n+2} \geq u_{2n}$, on en déduit $u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$, ce qui prouve que la suite (u_{2n+1}) est décroissante et achève l'étude de ce cas.

- Dans le cas où $u_2 \leq u_0$, on montre de la même manière que (u_{2n}) est décroissante et que (u_{2n+1}) est croissante !

3. On a déjà montré cela dans la première question. On en déduit que les deux suites extraites sont bornées aussi. Comme elles sont monotones, elles convergent (pas forcément vers la même limite d'ailleurs).

4. (a) On va résoudre $f(x) = x$ pour tout $x \in]-\infty;\ 2]$.
Remarquons que, pour $x < 0$ cette équation n'a pas de solutions car une racine est positive. On raisonne donc pour $x \in [0;\ 2]$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \sqrt{2-x} = x \\ &\iff 2 - x = x^2 \text{ car ces nombres sont positifs et que carré est strictement croissante} \\ &\iff x^2 + x - 2 = 0 \end{aligned}$$

Après calcul et vérification de la compatibilité, on obtient $x = 1$.
Bien sûr, on vérifie que, si $x = f(x)$, on a aussi $f \circ f(x) = f(x) = x$, ce qui prouve qu'un point fixe de f est également un point fixe de $f \circ f$.

(b) Pour les raisons expliquées précédemment, on raisonne pour $x \in [0;\ 2]$:

$$\begin{aligned} f \circ f(x) = x &\iff \sqrt{2 - \sqrt{2-x}} = x \\ &\iff 2 - \sqrt{2-x} = x^2 \\ &\iff 2 - x^2 = \sqrt{2-x} \end{aligned}$$

Une telle équation n'a de solution que pour $2 - x^2 \geq 0$ (car une racine est positive). Cela conduit à restreindre encore l'intervalle d'étude à $\left[0;\ \sqrt{2}\right]$. Un point fixe de $f \circ f$ noté $x \in \left[0;\ \sqrt{2}\right]$ vérifie donc :

$$(2 - x^2)^2 = 2 - x$$

Ce qui est bien un polynôme de degré 4.

(c) On sait que 1 est racine de ce polynôme. On peut donc utiliser les techniques de factorisation (en utilisant des identifications de coefficients puis des résolutions de systèmes). On obtient, après calcul :

$$(2 - x^2)^2 = 2 - x \iff x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0 \iff (x-1)(x^3 + x^2 - 3x - 2) = 0$$

Mais, on constate que -2 est racine évidente de $x^3 + x^2 - 3x - 2$. On peut donc poursuivre la factorisation. On obtient finalement après quelques lignes (ou pages) de calculs :

$$(2 - x^2)^2 = 2 - x \iff (x-1)(x+2)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

Parmi ces quatre racines 1, -2, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, seule 1 convient car elle appartient au domaine de validité déterminé précédemment, c'est à dire $\left[0;\ \sqrt{2}\right]$.
Finalement, $f \circ f$ ne possède qu'un point fixe : 1.

5. Notons que les suites extraites définies pour tout n par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ vérifient les relations de récurrence $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.
Or nous savons que ces deux suites convergent. Elles convergent donc vers des points fixes de $f \circ f$. Comme il n'y a qu'un point fixe de $f \circ f$, leur limite est donc commune, ce qui prouve que (u_n) converge vers cette limite, qui est 1.

Dans le cas où f est décroissante, on sait que $f \circ f$ est croissante. Il peut donc être commode d'étudier alors les suites extraites des termes de rang pairs et des termes de rang impairs qui seront donc toutes deux monotones ! C'est ce qui a été réalisé dans l'exercice précédent.

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\frac{3n^4-2n^2+1}{2n^3+1} &= \frac{3n^4}{2n^3}\left(\frac{1-\frac{2}{3n^2}+\frac{1}{3n^4}}{1+\frac{1}{2n^3}}\right)\\ &= \frac{3n}{2}\left(\frac{1-\frac{2}{3n^2}+\frac{1}{3n^4}}{1+\frac{1}{2n^3}}\right)\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\frac{2}{3n^2}+\frac{1}{3n^4}}{1+\frac{1}{2n^3}}\right) = 1$, par somme et quotient. On en déduit :

$$\frac{3n^4-2n^2+1}{2n^3+1} \sim \frac{3n}{2}$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\frac{\ln n+n+1}{3n^2+2n+1} &= \frac{n}{3n^2}\left(\frac{1+\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{3n}+\frac{1}{3n^2}}\right)\\ &= \frac{1}{3n}\left(\frac{1+\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{3n}+\frac{1}{3n^2}}\right)\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{3n}+\frac{1}{3n^2}}\right) = 1$, par croissances comparées, somme et quotient. On en déduit :

$$\frac{\ln n+n+1}{3n^2+2n+1} \sim \frac{1}{3n}$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}n^3\frac{\ln n+e^n+1}{1+n^2} &= \frac{n^3\mathrm{e}^n}{n^2}\left(\frac{1+\frac{1}{\mathrm{e}^n}+\frac{\ln n}{\mathrm{e}^n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)\\ &= n\mathrm{e}^n\left(\frac{1+\frac{1}{\mathrm{e}^n}+\frac{\ln n}{\mathrm{e}^n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{\mathrm{e}^n}+\frac{\ln n}{\mathrm{e}^n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right) = 1$, par croissances comparées, somme et quotient. On en déduit :

$$\frac{\ln n+n+1}{3n^2+2n+1} \sim n\mathrm{e}^n$$

la technique générale pour le début de cet exercice consiste à factoriser par les termes dominants et à exploiter les résultats sur les croissances comparées.

Examinons maintenant, pour tout n, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)$. Nous allons pour ce faire exploiter les développements limités d'ordre un.
Posons $u = \dfrac{1}{n^2+1}$. Il est clair que u tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Or, on a, en 0, $\ln(1+u) = u+o(u)$, c'est à dire, $\ln(u) = u\,(1+o(1))$, ce qui permet d'obtenir, en 0 :

$$\ln(1+u) \sim u$$

En particulier :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right) \sim \frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$$

Examinons, pour tout $n \neq 0$, $\sin\sin\frac{\pi}{n^2}$. Grâce à un développement limité d'ordre un de sinus en 0, on obtient $\sin(u) \sim u$ et, par suite, sachant que $\sin\frac{\pi}{n^2}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\sin\sin\frac{\pi}{n^2} \sim \sin\frac{\pi}{n^2} \sim \frac{\pi}{n^2}$$

Avec des développements limités d'ordre un et des changements de variables, on obtient également, pour tout $n \neq 0$

$$\frac{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\tan\frac{\pi}{n}} \sim \frac{n^2}{\pi}$$

Attaquons-nous, pour tout $n \neq 0$, à l'expression $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\cos\left(\frac{\pi}{n^2}\right)-e^{\frac{1}{n}}}$. Grâce à des développements limités d'ordre un en 0 sur les fonctions $x \mapsto \sqrt{1+x}$, $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$, on obtient, pour tout $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\cos\left(\frac{\pi}{n^2}\right)-e^{\frac{1}{n}}} &= \frac{\frac{1}{n}-\left(1+\frac{1}{2n}\right)+1+o\left(\frac{1}{n}\right)}{1+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{2n}\right)}{-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}+o(1)}{-1+o(1)}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\cos\left(\frac{\pi}{n^2}\right)-e^{\frac{1}{n}}} \sim \frac{-1}{2}$$

En utilisant la technique habituelle de factorisation par les termes dominants et les propriétés de logarithme, on obtient assez facilement, pour tout $n \neq 0$:

$$\frac{\ln(n^3+3)}{n+2} \sim \frac{3\ln(n)}{n}$$

L'équivalence suivante est également facile :

$$1+e^{2/n}-\frac{3}{n} \sim 2$$

Enfin, pour la dernière équivalence, il faut travailler un peu sur l'expression. Ainsi, pour tout $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\ln(n+2)-\ln(n+1) &= \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) \\
&= \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{2}{n}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\ln(n+2) - \ln(n+1) \sim \frac{1}{n}$$

Si vous avez des difficultés à manipuler les "petits o", il faut revenir à la définition avec la fonction ε. Cela permet en particulier de vérifier rapidement les propriétés usuelles (produit, factorisation, simplification).

Exercice 9

1. C'est faux. Considérer par exemple, pour tout n, $u_n = n$ et $v_n = n+1$.
2. C'est faux. Considérer par exemple, pour tout n, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$.
3. C'est faux. Considérer par exemple, pour tout n, $u_n = n$ et $v_n = n+1$.
4. C'est vrai ! On a $e^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n} \iff \dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{e^{v_n}} \longrightarrow 1 \iff \mathrm{e}^{u_n - v_n} \longrightarrow 1 \iff u_n - v_n \longrightarrow 0$.
5. C'est faux ! Considérer pour tout $n \neq 0$, $u_n = 1$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$.
6. C'est vrai ! Supposons $u_n \sim v_n$ et $\lim u_n = +\infty$. Il existe une suite (I_n) de limite 1 telle que $v_n = I_n u_n$ et donc $\ln(v_n) = \ln(I_n) + \ln(u_n) = \ln(u_n)\left(1 + \frac{\ln(I_n)}{\ln(u_n)}\right)$. Or, on sait que $1 + \dfrac{\ln(I_n)}{\ln(u_n)} \longrightarrow 1$ par somme et quotient de limites. Donc :

$$\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$$

Exercice 10

1. (a) L'initialisation se fait au rang N. On vérifie aisément que $|u_N| \leq |u_N|\alpha^0$ est vraie.

   On suppose la propriété vraie pour un certain rang $n \geq N$. On sait par hypothèse que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \alpha$, ce qui donne :

$$|u_{n+1}| \leq \alpha\,|u_n| \Longrightarrow |u_{n+1}| \leq \alpha \times |u_N|\,\alpha^{n-N}$$

   On obtient donc bien $|u_{n+1}| \leq |u_N|\,\alpha^{n+1-N}$, ce qui prouve que la propriété est bien héréditaire. Comme elle est aussi initialisée, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq N$.

   (b) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^{n-N} = 0$ car $\alpha \in]0;\ 1[$. On en déduit que (u_n) tend vers 0.

2. (a) C'est très facile. Un peu de calcul donne $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{x}{n+1}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 0$.

   (b) D'après ce qui précède, il existe un rang N tel que pour tout n supérieur à N, $\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| \leq \frac{1}{5}$. On en déduit que la suite (v_n) vérifie l'hypothèse de la première question. Ainsi (v_n) tend vers 0, ce qui prouve

$$x^n = o(n!)$$

3. Posons pour tout entier n, $t_n = \dfrac{n!}{n^n}$ et $s_n = \dfrac{n^\beta}{\alpha^n}$. Un peu de calcul de développements limités donne :

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-n\times\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{-1+o(1)}$$

   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$. En particulier, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, $\left|\dfrac{t_{n+1}}{t_n}\right| < \frac{2}{\mathrm{e}} < 1$. Ainsi, toujours grâce aux résultats de la question 1, $\lim t_n = 0$, ce qui prouve que

$$n! = o(n^n)$$

   De la même manière, $\dfrac{s_{n+1}}{s_n} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^\beta \times \dfrac{1}{\alpha}$ tend vers $\dfrac{1}{\alpha}$. Sachant que $\dfrac{1}{\alpha}$ est plus petit que 1, on se retrouve encore une fois dans les hypothèses de la question 1, ce qui permet de conclure.

Exercice 12

a) Vrai, c'est l'un des résultats du cours.

b) Vrai, en notant $\ell > 0$ la limite, il suffit de prendre $\varepsilon = \ell$. Et si la limite est $+\infty$, c'est trivial.

c) Faux, considérer pour tout n, $u_n = \dfrac{-1}{n+1}$.

d) Faux, considérer pour tout n, $u_n = 10 + n + 4 \times (-1)^n$.

e) Faux, considérer pour tout n, $u_n = (-1)^n$

f) Vrai ! On sait que, pour tout entier n, l'ensemble $R_n = \{k \in \mathbb{N} / u_k \geq n\}$ contient une infinité d'entiers (sinon la suite serait majorée). De plus, pour tout n, on a $R_{n+1} \subset R_n$.
On construit donc l'extractrice φ de la manière suivante :
- $\varphi(0) = \min(R_0)$;
- $\forall n$, $\varphi(n+1) = \min\{k \in R_{n+1} / k > \varphi(n)\}$. Comme R_n contient une infinité de termes, on est sûr que $\varphi(n+1)$ existe car l'ensemble $\{k \in R_{n+1} / k > \varphi(n)\}$ est non vide et minoré.

Par construction, pour tout n, $u_{\varphi(n)} \geq n$ car $\varphi(n) \in R_n$, ce qui prouve que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ tend vers $+\infty$.

Exercice 14

1. Pour tout $n \geq 1$, $r_n = q \times \left(\dfrac{n}{n+1}\right)$. Or $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$ et la limite de cette suite est 1. Ainsi, $\lim r_n = q > 1$. En particulier, pour $\varepsilon = \dfrac{q-1}{2}$, à partir d'un certain rang p, $r_n \in]q-\varepsilon;\ q+\varepsilon[$. Mais, par construction, $q - \varepsilon = \dfrac{q+1}{2}$. On obtient ainsi le résultat escompté.

2. (a) Cela se fait par récurrence sur n. Pour $n = p$, on a bien $h_n \geq h_p \left(\dfrac{q+1}{2}\right)^0$.
Supposons l'inégalité vraie pour un certain rang n. Au rang suivant :
$$h_{n+1} = r_n h_n \geq \left(\frac{q+1}{2}\right) \times h_p \times \left(\frac{q+1}{2}\right)^{n-p} = h_p \times \left(\frac{q+1}{2}\right)^{n+1-p}$$
Donc la proposition est vraie au rang $n+1$, ce qui prouve qu'elle est héréditaire.
Par récurrence, elle est donc vraie pour tout n.
(b) On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{q+1}{2}\right)^{n-p} = +\infty$ car $\dfrac{q+1}{2} > 1$. Donc (h_n) tend vers $+\infty$, par le théorème de minoration.

Exercice 15

1. La suite (T_n) est croissante. En effet, pour tout n, $T_{n+1} - T_n = \sum\limits_{k=0}^{n+1} |u_k| - \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k| = |u_{n+1}| \geq 0$.
Or, par le théorème de convergence monotone, T_n est majorée si et seulement si elle converge.

2. Par construction, pour tout n, $[\![0;\ n]\!] = K(n) \cup L(n)$ et ces deux ensembles sont disjoints. On a donc, en réarrangeant les termes de S_n :
$$S_n = \sum_{k \in K(n)} u_k + \sum_{k \in L(n)} u_k$$
Or, pour tout $k \in K(n)$, $u_k \geq 0$ et donc $u_k = |u_k|$.
De même, pour tout $k \in L(n)$, $u_k < 0$ et donc $u_k = -|u_k|$.
On obtient ainsi :
$$S_n = \sum_{k \in K(n)} |u_k| - \sum_{k \in L(n)} |u_k|$$

3. Posons, pour tout n, $P_n = \sum\limits_{k \in K(n)} |u_k|$ et $M_n = \sum\limits_{k \in L(n)} |u_k|$.
(P_n) et (M_n) sont encore une fois des suites croissantes, toutes deux majorées par (T_n). On en déduit que (P_n) et (M_n) convergent. En conséquence, $S_n = P_n - M_n$ converge, en tant que différence de deux suites convergentes.

Exercice 16

1. On va couper les ε en quatre pour répondre à cette question. L'idée étant de contrôler d'une part $\dfrac{u_0+u_1+\cdots+u_p}{n+1}$ avec p fixé et d'autre part $\dfrac{u_{p+1}+u_1+\cdots+u_n}{n+1}$.

   Soit une suite (u_n) qui converge vers une limite ℓ. On pose, pour tout n, $\tilde{u}_n = u_n - \ell$, de sorte que $(\tilde{u}_n)$ tend vers 0.

   Mais, dans ce cas, on remarque que $v_n - \ell = \dfrac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n+1} - \ell = \dfrac{u_0+u_1+\cdots+u_n-(n+1)\ell}{n+1} = \dfrac{(u_0-\ell)+(u_1-\ell)\cdots+(u_n-\ell)}{n+1} = \dfrac{\tilde{u}_0+\tilde{u}_1+\cdots+\tilde{u}_n}{n+1}$.

   Ainsi, en posant $\tilde{v}_n = \dfrac{\tilde{u}_0+\tilde{u}_1+\cdots+\tilde{u}_n}{n+1}$, montrer que (v_n) tend vers ℓ est équivalent à montrer que $(\tilde{v}_n)$ tend vers 0 si $(\tilde{u}_n)$ tend vers 0.
   On va donc prouver la convergence vers 0 de $(\tilde{v}_n)$.

   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang p tel que, pour tout $n \geq p$, $|\tilde{u}_n| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. En particulier, d'après l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$|\tilde{v}_n| \leq \frac{\sum_{k=0}^{p-1}|u_k|}{n+1} + \frac{\sum_{k=p}^{n}|u_k|}{n+1} \leq \frac{\sum_{k=0}^{p-1}|u_k|}{n+1} + \frac{\sum_{k=p}^{n}\frac{\varepsilon}{4}}{n+1}$$

   Or, $\dfrac{\sum_{k=p}^{n}\frac{\varepsilon}{4}}{n+1} = \left(\dfrac{n-p+1}{n+1}\right) \times \dfrac{\varepsilon}{4} \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$ car $\dfrac{n-p+1}{n+1} \leq 1$.

   Il nous faut maintenant contrôler $\dfrac{\sum_{k=0}^{p-1}|u_k|}{n+1}$ mais cela est facile, car pour p fixé cette quantité tend vers 0. Ainsi, il existe un rang $q \geq p$ tel que, pour tout $n \geq q$, $\dfrac{\sum_{k=0}^{p-1}|u_k|}{n+1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Finalement, on obtient :

$$|\tilde{v}_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

   Ce qui prouve que $(\tilde{v}_n)$ tend vers 0 et achève la démonstration compte-tenu de la remarque initiale.

2. La suite définie pour tout n par $u_n = (-1)^n$ constitue un contre exemple. En effet, on peut montrer facilement que, dans ce cas, $v_n = \dfrac{(-1)^0+(-1)^1+\cdots+(-1)^n}{n+1} = \dfrac{1+(-1)^n}{2(n+1)}$ tend vers 0. Pourtant (u_n) n'a pas de limite !

Planche n° 22: Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

$E_1 = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \geq 2\}$

$E_2 = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = P(2)\}$

$E_3 = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P'(0) = 1\}$

$E_4 = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X^2) = P' + X^4 P\}$

$E_5 = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid A|P\}$ où $A \in \mathbb{K}[X]$ est fixé

Exercice 2

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Soit F l'ensemble des polynômes multiples de A. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $K[X]$ et déterminer un supplémentaire de F. (*Indication :* utiliser la division euclidienne).

Exercice 3

Le polynôme $6X^3 + X + 11$ est-il combinaison linéaire de $3X^2 - X + 1$ et $2X^3 - 2X^2 + X + 3$?

Exercice 4

Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants.

$$E_1 = \mathrm{Vec}\left((1,2,1,0),(4,-2,1,1),(7,2,4,2),(11,4,1,3)\right)$$

$$E_2 = \mathrm{Vec}\left(2X^4 + 3X + 1, 8X^2 - 4X, 9X^2 + 2X^3 - X, 4X^3 + 2X^2 + 3X + 1\right)$$

$$E_3 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y - z + 2t = 0 \quad \text{et} \quad 3y - 2z + t = 0\right\}$$

$$E_4 = \left\{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid P(0) = P(1) = P(-1) = P(2)\right\}$$

$$E_5 = \mathrm{Vec}\left((x \mapsto \cos(kx))_{k \in [\![0,n]\!]}\right)$$

Exercice 5

On se place ici dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes.

On considère pour tout entier n, les familles de fonctions $\mathcal{C}_n = (c_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $\mathcal{S}_n = (s_k)_{1 \leq k \leq n}$, où, pour tout entier naturel k, et pour tout réel x, $c_k(x) = \cos(kx)$, et $s_k(x) = \sin(kx)$.

L'objectif de cet exercice est de montrer que les familles $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont libres grâce à l'étude de la famille $\mathcal{E}_n = (e_k)_{-n \leq k \leq n}$, définie pour tout entier k et pour tout réel x par $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

1. Montrer que si la famille $\mathcal{E}_n$ est libre alors les familles $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont libres. La réciproque est-elle vraie ?
2. On va maintenant prouver que la famille $\mathcal{E}_n$ est libre.
   (a) Montrer que, pour toute famille de scalaires $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n}$, telle que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k c_k = 0$, on a $\alpha_0 = 0$.
   (b) En déduire que, pour tout entier m, la famille $(e_k)_{0 \leq k \leq m}$ est libre.
   (c) Montrer que la famille $\mathcal{E}_n$ est libre si et seulement si la famille $(e_k)_{0 \leq k \leq 2n}$ est libre. Conclure.

Exercice 6

1. La famille $\big((-1,2,3),(-3,-1,1),(2,0,-1),(0,1,1)\big)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. La famille $\big(X^2+X, X^2+1, X+1\big)$ est-elle une base de $\mathbb{K}_2[X]$?
3. Montrer que $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.
4. Montrer que $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z - 2t = 0 \text{ est } 2x + y = 0\}$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.

Exercice 7

1. Montrer que $\big((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,,-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $(3,7,-2)$ dans cette base.
2. Montrer que $\big((X-1)^2, X^2, (X+1)^2\big)$ et une base de $\mathbb{K}_2[X]$ et déterminer les coordonnées de X^2+X+1 dans cette base.

Exercice 8

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \geq 2$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.
Montrer que la famille $(e_1+e_2, e_2+e_3, \ldots, e_{n-1}+e_n)$ est libre.

Exercice 9

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels tels que $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$.

1. Montrer que les fonctions $f_1 : x \mapsto e^{\alpha_1 x}, \ldots, f_n : x \mapsto e^{\alpha_n x}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$. (*Indication* : Étudier le comportement en $+\infty$ d'une combinaison linéaire de ces fonctions.)
2. Montrer que les fonctions $g_1 : x \mapsto |x-\alpha_1|, \ldots, g_n : x \mapsto |x-\alpha_n|$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$. (*Indication* : Étudier la dérivabilité en α_i d'une combinaison linéaire de ces fonctions.)

Exercice 10

1. Montrer que la famille $\Big((1,2,3,4),(4,3,2,1)\Big)$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{K}^4$.
2. Montrer que la famille $\Big(X^3+X+1, X^3-3X+2, X^2-X+1\Big)$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{K}_5[X]$.

Exercice 11

Déterminer un supplémentaire de

1. $\Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y-z+t=0 \quad \text{et} \quad y-2z+t=0\Big\}$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. $\Big\{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P(0) = P'(1) = 0\Big\}$ dans $\mathbb{K}_4[X]$.

Exercice 12

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels tels que $\dim F + \dim G > \dim E$. Montrer que l'intersection de F et G n'est pas réduite au vecteur nul.

Exercice 13

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels. Montrer que F et G possèdent un supplémentaire commun dans E si et seulement si $\dim F = \dim G$.

Exercice 14

Déterminer le rang des applications linéaires suivantes.

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, 2x+y) \end{array}$
2. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \to & \mathbb{K}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x-y-z) \end{array}$
3. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$
4. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}_4[X] \\ P & \mapsto & X(P' - P'(0)) \end{array}$
5. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & P - P' \end{array}$
6. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_{2n}[X] \\ P & \mapsto & P(X^2) \end{array}$

Exercice 15

1. Soit $f: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)). \end{array} \right.$
   (a) Montrer que f est linéaire et déterminer son rang.
   (b) En déduire qu'il existe (au moins) un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 tel que $P(-1) = 2$, $P(0) = 1$ et $P(1) = 3$. Ce polynôme est-il unique ?
2. Soit $g: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1), P(2)). \end{array} \right.$
   (a) Montrer que g est linéaire et déterminer son rang.
   (b) En déduire qu'il existe (au moins) un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 tel que $P(-1) = 2$, $P(0) = 1$, $P(1) = 3$ et $P(2) = 1$. Ce polynôme est-il unique ?

Exercice 16

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E,F))^2$.

1. Montrer : $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leq \mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
2. On suppose $E = F$, $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $(f+g) \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer : $\dim E = \mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Exercice 17

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante : $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f \Longleftrightarrow \left(f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ et } \dim E = 2\mathrm{rg}(f) \right)$.

Exercice 18

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

Exercice 19

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $f: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(0), P'(0), P''(0), \ldots, P^{(n)}(0)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Exercice 20

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^3 = \mathrm{I}_E$.

1. Montrer l'inclusion $\mathrm{Im}(f - \mathrm{I}_E) \subset \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{I}_E)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{I}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{I}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 21

Les applications suivantes sont-elles des automorphismes de $\mathbb{K}_n[X]$?

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & 2P - (X-1)P' \end{array}$

2. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & 2P + (X-1)P' \end{array}$

Exercice 22

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que l'ensemble $\{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$ de dimension n et en déterminer une base.

Exercice 23

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux familles (finies) de vecteurs de E. Montrer : $\max(\mathrm{rg}(\mathcal{F}_1), \mathrm{rg}(\mathcal{F}_2)) \leq \mathrm{rg}(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \leq \mathrm{rg}(\mathcal{F}_1) + \mathrm{rg}(\mathcal{F}_2)$.

Corrigé de la planche n° 22: Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1

Notons que l'ensemble des polynômes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On exploite donc le critère de stabilité par combinaison linéaire.

Pour E_1 :

La réponse est non car l'élément neutre n'est pas dans cet ensemble.

Pour E_2 :

La réponse est oui, cet espace est bien stable par combinaison linéaire. Pour tous polynômes $(P;\ Q) \in E_2^2$ de cet ensemble et pour tous réels $(\lambda;\ \mu)$:

$$(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = \lambda P(2) + \mu Q(2) = (\lambda P + \mu Q)(2)$$

Donc $\lambda P + \mu Q \in E_2$.

Pour E_3 :

La réponse est non car l'élément neutre n'est pas dans cet ensemble.

Pour E_4 :

Ici, l'espace est encore une fois stable par combinaison linéaire. Donc la réponse est oui.

Pour E_5 :

La réponse est encore oui. Si P et Q sont deux polynômes divisibles par A alors il existe deux polynômes M et N tels que $P = AM$ et $Q = AN$. Et ainsi, pour tous réels $(\lambda;\ \mu)$:

$$\lambda P + \mu Q = \lambda AM + \mu AN = A\left(\lambda M + \mu N\right)$$

Donc $\lambda P + \mu Q$ est divisible par A.

Exercice 2

La stabilité par combinaison linéaire n'est pas compliquée à prouver. Reste à trouver un supplémentaire. Soit ainsi P un polynôme quelconque. On cherche un polynôme Q et un polynôme R tel que $P = Q + R$ et Q est un multiple de A. Cette écriture correspond à peu près à la division euclidienne de P par A ce qui nous conduit à suspecter qu'un supplémentaire pourrait être l'ensemble des polynômes de degré inférieur strictement à celui de A. On élimine le cas « A constant » qui est trivial.
Montrons ainsi que $\mathbb{K}[X] = F \oplus \mathbb{K}_n[X]$ avec $n + 1 = \deg(A)$. Notons que $\mathbb{K}_n$ est un bien un sous-espace vectoriel.
En raison de la division euclidienne il est clair que $\mathbb{K}[X] = F + \mathbb{K}_n[X]$. Reste à montrer que cette somme est directe. On peut conclure en notant que la division euclidienne implique l'unicité de la décomposition si l'on se souvient bien de son cours sur les polynômes. Ou bien analyser l'intersection $F \cap \mathbb{K}_n[X]$ qui est forcément réduite à 0 (il suffit pour cela de faire une petite analyse des degrés).

Exercice 4

Pour E_1 :

Il s'agit de vérifier si les vecteurs sont libres. Pour ce faire, on calcule le rang de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 11 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

En appliquant le pivot de Gauss astucieusement, on obtient un rang de 4. Donc ces quatre vecteurs engendrent $\mathbb{K}^4$. Une base de $\mathbb{K}^4$ est par exemple la base canonique, ou ces quatre vecteurs.

Pour E_2 :

On montre aussi que ces quatre polynômes sont libres. En effet, pour tout scalaires $(\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ \delta)$, on a :

$$\alpha\left(2X^4+3X+1\right)+\beta\left(8X^2-4X\right)+\gamma\left(9X^2+2X^3-X\right)+\delta\left(4X^3+2X^2+3X+1\right)=0$$

$$\iff \begin{cases} 2\alpha=0 \\ 2\gamma+4\delta=0 \\ 8\beta+9\gamma+2\delta=0 \\ 3\alpha-4\beta-\gamma+3\delta=0 \\ \alpha+\delta=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha=0 \\ \delta=0 \\ \gamma=0 \\ \beta=0 \end{cases}$$

Ils engendrent donc un espace de dimension quatre dont ils forment une base.

Pour E_3 :

On cherche des vecteurs libres qui engendrent E_3. Pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E_3 \iff \begin{cases} 3x-2y-z+2t=0 \\ 3y-2z+t=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=-3y+2z \\ 0=3x-2y-z-6y+4z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=\frac{8}{3}y-zy=y \\ z=z \\ t=-3y+2z \end{cases}$$

On a donc $E_3=\mathrm{Vec}\left(\begin{pmatrix} 8/3 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

Ces deux vecteurs sont libres, ils forment une base de E_3 qui est donc de dimension deux.

Pour E_4 :

Pour tout polynôme P dans E_4, le polynôme $Q(X)=P(X)-P(0)$ a pour racines 0, 1, -1, 2 donc est divisible par $X(X-1)(X+1)(X-2)$. Or ce polynôme est de degré au plus quatre.

Il existe donc λ tel que $Q(X)=\lambda X(X-1)(X+1)(X-2)$. On en déduit $P(X)=Q(X)+P(0)=\lambda X(X-1)(X+1)(X-2)+P(0)$. Or $P(0)$ est un scalaire quelconque.

Réciproquement, tout polynôme P qui s'écrit $P(X)=\lambda X(X-1)(X+1)(X-2)+\mu$ avec $(\lambda;\ \mu)\in\mathbb{K}^2$ est dans E_4.

On en déduit $E_4=\mathrm{Vec}\left(X(X-1)(X+1)(X-2);\ 1\right)$. Ces deux vecteurs sont libres. Ils forment une base de E_4 qui est de dimension deux.

Pour E_5 :

On va montrer que cette famille est libre. Soit ainsi des scalaires $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n}$ tels que, pour tout réel t,

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cos(kt) = 0$$

On rappelle la formule :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

Ainsi, pour tout $j \in [\![0;\ n]\!]$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos(jt)\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cos(kt) = 0 \iff \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left[\cos\left((k+j)t\right) + \cos\left((k-j)t\right)\right] = 0$$

On en déduit, en intégrant cette égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left[\int_0^{2\pi} \cos\left((k+j)t\right)\ \mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \cos\left((k-j)t\right)\ \mathrm{d}t\right] = 0$$

Or, pour tout $k \neq j$, $\int_0^{2\pi} \cos\left((k-j)t\right)\ \mathrm{d}t = 0$ et pour $k+j \in \mathbb{Z}^*$, $\int_0^{2\pi} \cos\left((k+j)t\right)\ \mathrm{d}t = 0$.
Ainsi, presque tous les termes de la dernière somme sont nuls, à l'exception du terme correspondant à $k = j$. On en déduit :

- en prenant $j = 0$:
$$4\pi\lambda_0 = 0$$
- en prenant $j \in [\![1;\ n]\!]$:
$$2\pi\lambda_j = 0$$

Ainsi, tous les λ_i sont nuls, ce qui permet de conclure : la famille est libre. L'espace vectoriel engendré par ces vecteurs est donc de dimension $n+1$ et la famille elle-même en constitue une base.

Exercice 5

1. Supposons la famille $\mathcal{E}_n$ libre. Montrons que $\mathcal{C}_n$ est libre. Soit $n+1$ réels $(\alpha_k)_{0\leq k\leq n}$ tels que :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k c_k = 0$$

Notons que, pour tout k, $c_k = \dfrac{e_k + e_{-k}}{2}$ car, pour tout x, $\cos(kx) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{2}$. On en déduit ainsi :

$$\alpha_0 \mathrm{e}_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_{-k} = 0$$

Sachant que la famille $\mathcal{E}_n$ est libre, on obtient bien pour tout k, $\alpha_k = 0$ donc la famille $\mathcal{C}_n$ est libre
On montre aussi grâce aux relations d'Euler que la famille $\mathcal{S}_n$ est libre.

La réciproque est vraie. En effet, supposons qu'il existe $2n+1$ réels $(\gamma_k)_{-n\leq k\leq n}$ tels que :

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e_k = 0$$

En prenant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\alpha_0 c_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{-k} + \alpha_k) c_k = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{-k} - \alpha_k) c_k = 0$$

En exploitant le fait que ces deux familles sont libres, on obtient un système de $2n+1$ équations à $2n+1$ inconnues :

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_{-1} = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_{-1} = 0 \\ \dots \\ \alpha_n + \alpha_{-n} = 0 \\ \alpha_n - \alpha_{-n} = 0 \end{cases}$$

L'unique solution est pour tout k, $\alpha_k = 0$, ce qui prouve que la famille $\mathcal{E}_n$ est libre.

2. (a) Montrer que, pour toute famille de scalaires $(\alpha_k)_{0\leq k\leq n}$, telle que $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k c_k = 0$, on a $\alpha_0 = 0$.

Intégrons cette égalité sur l'intervalle $[0;\ 2\pi]$. Notons que pour tout entier k non nul :

$$\int_0^{2\pi} c_k = \int_0^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x = 0$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k c_k = 0 &\iff \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_0^{2\pi} c_k \\ &\iff 2\pi\alpha_0 = 0 \\ &\iff \alpha_0 = 0 \end{aligned}$$

(b) Montrons-le par récurrence sur m.

Au rang 0, il est clair que $\{e_0\} = \{1\}$ est une famille libre car c'est une fonction non nulle.

Supposons la propriété vraie pour un certain rang m et montrons-le au rang suivant. Soient ainsi $m+2$ réels $(\alpha_k)_{0\leq k\leq m+1}$ tels que :

$$\sum_{k=0}^{m+1} \alpha_k e_k = 0$$

En prenant la partie réelle de cette équation, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{m+1} \alpha_k c_k = 0$$

D'après la question précédente, cela donne $\alpha_0 = 0$, et ainsi, pour tout x :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k e_k = 0 &\iff \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k e^{\mathrm{i}kx} = 0 \\ &\iff \sum_{k=0}^{m} \alpha_{k+1} e^{\mathrm{i}k+1x} = 0 \\ &\iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \sum_{k=0}^{m} \alpha_{k+1} e^{\mathrm{i}kx} = 0 \\ &\iff \sum_{k=0}^{m} \alpha_{k+1} e^{\mathrm{i}kx} = 0 \end{aligned}$$

On applique maintenant l'hypothèse de récurrence, et on en déduit pour tout $1 \leq k \leq m+1$, $\alpha_k = 0$.

L'hypothèse est donc vraie au rang $n+1$.

(c) Cette dernière question est facile ! En effet, pour toute famille de $2n+1$ scalaires $(\alpha_k)_{-n\leq k\leq n}$, on a l'équivalence, pour tout x :

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{\mathrm{i}kx}=0 &\iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{\mathrm{i}kx}=0\\ &\iff \sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{\mathrm{i}(n+k)x}=0\\ &\iff \sum_{k=0}^{2n}\alpha_{k-n} e^{\mathrm{i}kx}=0\end{aligned}$$

On a en déduit que la famille $\mathcal{E}_n$ est libre si et seulement si la famille $(e_k)_{0\leq k\leq 2n}$ est libre. Et comme, d'après la question précédente, on sait que la famille $(e_k)_{0\leq k\leq 2n}$ est libre, on en déduit que $\mathcal{E}_n$ est libre, et par suite $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{S}_n$ le sont aussi.

Exercice 6

1. Non, car elle est liée (quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont liés).
2. Notons $E_1 = X^2+X$, $E_2 = X^2+1$ et $E_3 = X+1$. Soit un polynôme quelconque $P[X] = aX^2+bX+c$ de $\mathbb{K}_2[X]$. Ce polynôme est-il combinaison linéaire à coefficients uniques de E_1, E_2 et E_3 ? Pour ce faire, il faut trouver les coefficients α, β et γ tels que $\alpha E_1+\beta E_2+\gamma E_3 = P$. En identifiant les coefficients cela conduit au système :
$$\begin{cases}\alpha+\beta=a\\ \alpha+\gamma=b\\ \beta+\gamma=c\end{cases}$$
On peut montrer facilement que ce système est de rang 3 donc la famille est bien une base.
3. Considérons l'application $\phi : (x;\ y;\ z)\mapsto x-y+2z$. On montre facilement que cette application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$ est linéaire. Son noyau E est donc bien un sous-espace vectoriel.
On a de plus les équivalences :
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E &\iff x-y+2z=0\\ &\iff x=y-2z\\ &\iff \begin{cases}x=y-2z\\ y=y\\ z=z\end{cases}\\ &\iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$
Or les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ sont libres. Ils forment donc une base de E.
4. C'est l'intersection des noyaux de deux applications linéaires. C'est donc un sous-espace vectoriel. Avec une technique similaire, on obtient :
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in F \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-2\\-7\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$
Or les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\-2\\-7\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}$ sont libres. Ils forment donc une base de F.

Exercice 7

1. On le montre à l'aide du déterminant qui est non nul.

   Pour trouver les coordonnées de $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, il faut trouver les nombres α, β et γ tels que

   $$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Après résolution du système on obtient

   $$\begin{cases} \alpha = \frac{5}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ \gamma = 5 \end{cases}$$

2. On va prouver que cette famille est génératrice. On se place dans le cas général où l'on cherche pour un polynôme $P[X] = aX^2 + bX + c$ quelconque les éventuels coefficients $(\alpha;\ \beta;\ \gamma) \in \mathbb{K}^3$ tels que :

   $$P[X] = \alpha(X-1)^2 + \beta X^2 + \gamma(X+1)^2$$

   Cela conduit au système :

   $$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ -2\alpha + 2\gamma = b \\ \alpha + \gamma = c \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ 2\beta + 4\gamma = 2a + b \\ -\beta = -a + c \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ \beta = a - c \\ 4\gamma = b + 2c \end{cases}$$

   Ce système possède donc une unique solution. Ainsi les trois polynômes forment une base. Dans le cas où $a = b = c = 1$, on obtient :

   $$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = 0 \\ \gamma = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Exercice 8

On note, pour tout $1 \leq i \leq n-1$, $f_i = e_i + e_{i+1}$. Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ $n-1$ coefficients tels que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i = 0$$

Cela revient à avoir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (e_i + e_{i+1}) = 0 &\iff \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} = 0 \\ &\iff \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i \sum_{i=2}^{n} \lambda_{i-1} e_i = 0 \\ &\iff \lambda_1 e_1 \sum_{i=2}^{n-1} (\lambda_i + \lambda_{i-1}) e_i + \lambda_{n-1} e_n = 0 \end{aligned}$$

Or les e_i sont libres donc on en déduit que les λ_i vérifient le système triangulaire inférieur :

$$\begin{array}{lllll}
\lambda_1 & & & & = 0 \\
\lambda_1 & +\lambda_2 & & & = 0 \\
 & \lambda_2 & +\lambda_3 & & = 0 \\
 & \cdots & & & = 0 \\
 & & & \lambda_{n-2} & \lambda_{n-1} = 0 \\
 & & & & \lambda_{n-1} = 0
\end{array}$$

Le rang de ce système étant $n-1$, on en déduit que la seule solution est que tous les λ_i soient nuls.

Exercice 9

1. Considérons une combinaison linéaire nulle de ces fonctions. Soient ainsi $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ des scalaires tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$$

En particulier, pour tout x :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{e}^{\alpha_i x} = 0 \text{ en divisant par } \mathrm{e}^{\alpha_n x} :$$

$$\lambda_n + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \mathrm{e}^{(\alpha_i - \alpha_n)x} = 0$$

Or, pour tout $2 \leq i \leq n$, $\alpha_i - \alpha_n < 0$. Par passage à la limite pour $x \to +\infty$, on obtient $\lambda_n = 0$.

On a donc, pour tout x :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \mathrm{e}^{\alpha_i x} = 0$$

On peut maintenant diviser par $\mathrm{e}^{\alpha_{n-1} x}$ et passer à la limite pour obtenir $\lambda_{n-1} = 0$.
En poursuivant ce procédé, on obtient, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i = 0$, ce qui permet de conclure.

2. On procède de même. On suppose ainsi qu'il existe n scalaires $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ tels que, pour tout x :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x) = 0$$

Par l'absurde, si on suppose que l'un des λ_i est non nul, on aboutit à une contradiction car la fonction $\lambda_i g_i$ n'est pas dérivable en α_i alors que tous les $\lambda_j g_j$, pour $j \neq i$, le sont et la fonction nulle l'est aussi.

Exercice 10

1. Ces deux vecteurs sont non colinéaires donc la famille est libre.
Pour obtenir une base de $\mathbb{K}^4$, on peut essayer de la compléter avec les deux premiers vecteurs de la base canonique. En effet, aucun des deux vecteurs de départ n'appartient au plan engendré par ces deux vecteurs. Reste à calcule formellement le rang avec les techniques habituelles de travail sur les lignes d'une matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 16 \\ 0 & 0 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

On obtient donc bien une famille de rang 4.

2. Répondons aux deux questions en une. En effet, si en complétant cette famille avec trois vecteurs, on obtient une base de $\mathbb{K}_5[X]$, c'est que la famille de base était bien libre !
Considérons ainsi les polynômes 1, X^4, X^5. Il s'agit ainsi de déterminer le rang de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est clair que le rang de ce système est 6 donc on obtient bien une base.

Exercice 11

1. Notons E ce sous-espace vectoriel. On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E &\iff \begin{cases} x = y + z - t \\ y = 2z - t \\ z = z \\ t = t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 3z - 2t \\ y = 2z - t \\ z = z \\ t = t \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $E = \mathrm{Vec}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

En complétant avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient une famille libre. Car la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 4.

Ainsi, un supplémentaire de E est $\mathrm{Vec}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

2. Il faut commencer par identifier l'espace en question avant de pourvoir construire un supplémentaire. Cherchons les polynômes qui vérifient $P(0) = P'(1) = 0$.
$P(0) = 0$ signifie que le polynôme de $\mathbb{K}_3[X]$ est un multiple de X. Il s'écrit donc $P[X] = aX^3 + bX^2 + cX$. Son polynôme dérivé est $P'[X] = 3aX^2 + 2bX + c$. On en déduit que l'espace est :

$$\left\{aX^3 + bX^2 + cX, \text{ avec } (a;\ b;\ c) \in \mathbb{K}^3 / 3a + 2b + c = 0\right\}$$

On peut réécrire cela, en notant E cet espace :

$$E = \left\{aX^3 + bX^2 + (-3a - 2b)X, \text{ avec } (a;\ b) \in \mathbb{K}^2\right\}$$

Ainsi $E = \mathrm{Vec}\left(X^3 - 3X;\ X^2 - 2X\right)$. On fabrique un supplémentaire en considérant l'espace engendré par 1, X, X^4. En utilisant les techniques matricielles, on obtient bien que la famille $X^3 - 3X$, $X^2 - 2X$, 1, X, X^4 est libre et donc forme une base.
Finalement, $\mathrm{Vec}\left(1;\ X;\ X^4\right)$ est un supplémentaire de E dans $\mathbb{K}_4[X]$.

Exercice 12

On a $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G)$. Or $\dim(F + G) \leq \dim(E)$. Ainsi, $\dim(F \cap G) \geq \dim(F) + \dim(G) - \dim(E) > 0$, ce qui permet de conclure.

Exercice 13

Le sens direct est évident. En effet, s'ils possèdent un supplémentaire commun, noté H, on a $\dim(H) = \dim(E) - \dim(F) = \dim(E) - \dim(G)$. Ainsi, $\dim(F) = \dim(G)$.
Le sens réciproque est moins évident. On va raisonner par récurrence descendante sur $\dim(F) = \dim(G)$.
Si $\dim(F) = \dim(G) = n$, dans ce cas, $F = G = E$. Un supplémentaire commun est donc $\{0\}$.
Si $\dim(F) = \dim(G) < n$, on considère $x \notin F \cup G$. Un tel vecteur existe. Prouvons-le par l'absurde en supposant que l'on a $F \cup G = E$. Dans ce cas, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel et, d'après l'exercice 6, cela signifie que $F \subset G$ ou $G \subset F$, ce qui n'est possible que si $F = G = E$ et ce qui est contradictoire par rapport à l'hypothèse $\dim(F) = \dim(G) < \dim(E)$.
Maintenant que l'on a prouvé l'existence de $x \notin F \cup G$, considérons $\tilde{F} = F \oplus \mathrm{Vec}\,(x)$ et $\tilde{G} = G \oplus \mathrm{Vec}\,(x)$. On a $\dim\left(\tilde{F}\right) = \dim\left(\tilde{G}\right) = \dim(F) + 1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence descendante. Soit ainsi $\tilde{H}$ un supplémentaire commun de $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$. En considérant maintenant $H = \tilde{H} \oplus \mathrm{Vec}\,(x)$, H est par construction un supplémentaire commun de F et G.

Exercice 14

Notons qu'ici, on ne cherche pas à prouver que ces applications sont linéaires. Souvent cependant, il faudra le faire. Il s'agira alors de montrer que l'image d'une combinaison linéaire est une combinaison linéaire des images.

1. On va calculer directement l'image de f puis sa dimension.

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / \ \vec{X} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \vec{X} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \vec{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

   Or ces deux vecteurs sont libres. On en déduit que $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.
2. Même principe, cette fois-ci, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}^2$ donc $\mathrm{rg}(f) = 2$.
3. Pour changer, calculons le noyau de f. $P \in \mathrm{Ker}(f) \iff P' = 0$.
   On en déduit $\mathrm{Ker}(f) = \{\text{polynômes constants}\} = \mathrm{Vec}\,(1)$. Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ et donc, par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{K}_n[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = n + 1 - 1 = n$.
4. Encore une fois, calculons le noyau de cette application. $P \in \mathrm{Ker}(f) \iff P'[X] = P[0]$. On en déduit d'une part que P est de degré un et d'autre part que ces coefficients vérifient la condition nécessaire et suffisante $P'[X] = (aX + b)' = a = P(0) = b$.
   Donc $P[X]$ s'écrit forcément $P[X] = aX + a = a(X + 1)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vec}\,((1 + X))$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$. Enfin, on applique le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{K}_3[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - 1 = 3$.

5. Le noyau est ici réduit à 0. Cela se prouve en exploitant les connaissances sur les équations différentielles. Par le théorème du rang, on obtient :

$$\mathrm{rg}(f) = n + 1$$

6. Ici encore le noyau est réduit à 0. Ainsi $\mathrm{rg}(f) = n + 1$.

Exercice 15

1. (a) Pour tous polynômes P et Q, pour tous réels λ et μ, on a

$$f(\lambda P+\mu Q) = \begin{pmatrix} (\lambda P + \mu Q)(-1) \\ (\lambda P + \mu Q)(0) \\ (\lambda P + \mu Q)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda P(-1) + \mu Q(-1) \\ \lambda P(0) + \mu Q(0) \\ (\lambda P(1) + \mu Q(1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} P(-1) \\ P(0) \\ P(1) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} Q(-1) \\ Q(0) \\ Q(1) \end{pmatrix} = \lambda f(P)+\mu f(Q)$$

f est donc bien linéaire. On va montrer que le rang de f est 3. Pour ce faire, on pourrait montrer que f est surjective en utilisant les polynômes de Lagrange ou bien examiner le noyau de f. Choisissons cette seconde piste.
$P \in \mathrm{Ker}(f) \iff \{0;\ 1;\ -1\}$ sont des racines de P. Cela donne la condition nécessaire et suffisante que $X(X-1)(X+1)$ divise P. Or ce dernier polynôme est de degré 3 et on sait que P est de degré au plus 3.
Ainsi, $P \in \mathrm{Ker}(f) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} / P = \lambda X(X-1)(X+1)$.
On en déduit que le noyau est engendré par un seul polynôme non nul. Sa dimension est donc 1. On conclut ensuite à l'aide du théorème du rang :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 4 - 1 = 3$$

(b) D'après ce qui précède, f est surjective mais pas injective. Donc le problème possède au moins une solution. Cette solution n'est pas unique car f n'est pas injective. Plus précisément, toutes les solutions sont égales à un $\lambda X(X-1)(X+1)$ près.

2. (a) Même technique que précédemment pour prouver la linéarité. Le noyau est formé des polynômes de degré au plus 3 qui ont pour racines $-1, 0, 1, 2$. Cela n'est possible que si le polynôme est nul. Ainsi, le noyau est réduit à 0.
Une application du théorème du rang conduit à $\mathrm{rg}(g) = 4 - 0 = 4$.

(b) Cette fois-ci, g est un isomorphisme. Donc le problème possède une unique solution.

Exercice 17

Montrons le sens direct. On suppose ainsi que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
Pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $f(f(x)) = 0$, ce qui prouve $f \circ f = 0$.
Le théorème du rang donne $\dim(E) = \dim(Ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2\mathrm{rg}(f)$.
Montrons maintenant le sens réciproque. On suppose ainsi que $f^2 = 0$ et $\dim(E) = 2\mathrm{rg}(f)$.
Commençons par montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Soit ainsi $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. En particulier, $f(y) = f \circ f(x) = f^2(x) = 0$. Donc $y \in \mathrm{Ker}(f)$. De plus, le théorème du rang donne : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont de même dimensions. Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, on en déduit $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 18

Notons que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$. Or, $\mathrm{rg}(f) = 1$. Ainsi, l'image de f^2 est un sous-espace vectoriel de dimension 0 ou 1. Mais l'image de f^2 correspond à l'image de $f_{|\mathrm{Im}(f)}$. On en déduit que la restriction de f à l'image de f, notée $f_{|\mathrm{Im}(f)}$ est un endomorphisme d'un espace de dimension 1 ($\mathrm{Im}(f)$) vers un espace de dimension 0 et 1 ($\mathrm{Im}(f^2)$). Donc la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$ est une homothétie.
On obtient donc bien $f \circ f = \lambda f$.

Exercice 19

Notons que les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension : $n+1$.
La linéarité de cette application est assez triviale.
Il suffit donc de prouver que cette application est injective pour conclure. On va examiner le noyau de cette application. On cherche donc un polynôme de degré au plus n tel que

$$P(0) = P'(0) = \cdots = P^{(n)}(0) = 0$$

Cela signifie que 0 est racine de multiplicité au moins $n+1$ de P. Mais comme P est de degré au plus n, cela entraîne que P est nul. Le noyau est donc réduit à 0, ce qui permet de conclure.

Exercice 21

Dans les cas $n = 0$ et $n = 1$, on montre sans trop de difficulté que ces deux applications sont bien des automorphismes. On suppose donc maintenant $n \geq 2$.

1. Il faut s'assurer que cette application vérifie :
   - la linéarité, c'est à dire que pour tout $(P;\ Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$ et pour tout $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a bien $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$;
   - $\mathbb{K}_n[X]$ est bien stable par cette application ;
   - l'application est bijective.

   Commençons par la linéarité :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= 2(\lambda P + \mu Q) - (X-1)(\lambda P + \mu Q)' \\ &= \lambda(2P - (X-1)P') + \mu(2Q - (X-1)Q') \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

   Examinons ensuite la stabilité. Pour ce faire, analysons $\deg(2P-(X-1)P') \leq \max(\deg(2P);\ \deg((X-1)P'))$.
   Or, $\max(\deg(2P);\ \deg((X-1)P')) = \max(\deg(P);\ \deg(P)) = \deg(P)$. Ce qui prouve que $\deg(f(P)) \leq n$, c'est à dire $f(P) \in \mathbb{K}_n[X]$. $\mathbb{K}_n[X]$ est bien stable par cette application.

   Il faut maintenant analyser si cette application est bijective. Il faut et il suffit pour cela de prouver qu'elle est injective car l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont identiques et donc ont la même dimension. Nous allons donc examiner son noyau.

$$P \in \operatorname{Ker}(f) \iff 2P - (X-1)P' = 0$$

   Notons $(c_k)_{0 \leq k \leq n}$ les coefficients de P. On a :

$$\begin{aligned} 2P[X] + (X-1)P'[X] &= \sum_{k=0}^{n} 2c_k X^k - (X-1)\sum_{k=1}^{n} kc_k X^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2c_k X^k - \sum_{k=1}^{n} kc_k X^k + \sum_{k=1}^{n} kc_k X^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2c_k X^k - \sum_{k=1}^{n} kc_k X^k + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)c_{k+1} X^k \\ &= (2c_0 + c_1) + \sum_{k=1}^{n-1} (-kc_k + (k+1)c_{k+1} + 2c_k) X^k + (2c_n - nc_n) X^n \\ &= (2c_0 + c_1) + \sum_{k=1}^{n-1} ((2-k)c_k + (k+1)c_{k+1}) X^k + (2-n)c_n X^n \end{aligned}$$

   L'analyse des coefficients donne la condition nécessaire et suffisante pour que P soit dans le noyau

de f :

$$\begin{cases} 2c_0 + c_1 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \\ 3c_3 = 0 \\ -c_3 + 4c_4 = 0 \\ \dots \\ (3-n)c_{n-1} + nc_n = 0 \\ (2-n)c_n = 0 \end{cases}$$

On obtient, pour tout $k \geq 3$, $c_k = 0$. Reste à résoudre :

$$\begin{cases} 2c_0 + c_1 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -2c_0 \\ c_2 = \frac{-c_1}{2} = c_0 \end{cases}$$

On obtient ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{c_0(1 - 2X + X^2) \text{ avec } c_0 \in \mathbb{K}\} = \mathrm{Vec}\left(X^2 - 2X + 1\right)$.
Donc f n'est pas injective. On en déduit que f n'est pas un automorphisme.

2. Il faut s'assurer que cette application vérifie :
   - la linéarité, c'est à dire que pour tout $(P;\ Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$ et pour tout $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a bien $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$;
   - $\mathbb{K}_n[X]$ est bien stable par cette application ;
   - l'application est bijective.

   Commençons par la linéarité :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= 2(\lambda P + \mu Q) + (X-1)(\lambda P + \mu Q)' \\ &= \lambda(2P + (X-1)P') + \mu(2Q + (X-1)Q') \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

   Examinons ensuite la stabilité. Pour ce faire, analysons $\deg(2P+(X-1)P') \leq \max(\deg(2P);\ \deg((X-1)P'))$.
   Or, $\max(\deg(2P);\ \deg((X-1)P')) = \max(\deg(P);\ \deg(P)) = \deg(P)$. Ce qui prouve que $\deg(f(P)) \leq n$, c'est à dire $f(P) \in \mathbb{K}_n[X]$. $\mathbb{K}_n[X]$ est bien stable par cette application.

   Il faut maintenant prouver que cette application est bijective. Il faut et il suffit pour cela de prouver qu'elle est injective car l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont identiques et donc ont la même dimension. Nous allons donc examiner son noyau.

$$P \in \mathrm{Ker}(f) \iff 2P + (X-1)P' = 0$$

   Notons $(c_k)_{0 \leq k \leq n}$ les coefficients de P. On a :

$$\begin{aligned} 2P[X] + (X-1)P'[X] &= \sum_{k=0}^{n} 2c_k X^k + (X-1)\sum_{k=1}^{n} kc_k X^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2c_k X^k + \sum_{k=1}^{n} kc_k X^k - \sum_{k=1}^{n} kc_k X^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2c_k X^k + \sum_{k=1}^{n} kc_k X^k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)c_{k+1} X^k \\ &= (2c_0 - c_1) + \sum_{k=1}^{n-1} (kc_k - (k+1)c_{k+1} + 2c_k)X^k + (2c_n + nc_n)X^n \\ &= (2c_0 - c_1) + \sum_{k=1}^{n-1} ((k+2)c_k - (k+1)c_{k+1})X^k + (n+2)c_n X^n \end{aligned}$$

L'analyse des coefficients donne la condition nécessaire et suffisante pour que P soit dans le noyau de f :

$$\begin{cases} 2c_0 - c_1 = 0 \\ 3c_1 - 2c_2 = 0 \\ 4c_2 - 3c_3 = 0 \\ \dots \\ (n+1)c_{n-1} - nc_n = 0 \\ (n+2)c_n = 0 \end{cases}$$

Ce système a pour unique solution $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$. Ainsi, f est bien injective. On en déduit que f est bijective. C'est donc un automorphisme.

Exercice 22

Cet espace est le noyau de l'application $\varphi : P \mapsto P(\alpha)$ qui est linéaire. De plus, on peut facilement montrer que φ est surjective. On a ainsi :

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbb{K}_n[X]) - \dim(\mathbb{K}) = n + 1 - 1 = n$$

Tous les polynômes qui appartiennent à cet espace sont divisibles par $X - \alpha$. On va ici s'appuyer sur le fait que la famille suivante est une base de $\mathbb{K}^n$ en raison de la formule de Taylor sur les polynômes :

$$\left\{1;\ (X-\alpha);\ (X-\alpha)^2;\ \dots;\ (X-\alpha)^n\right\}$$

Ainsi, une base de cet espace s'obtient très facilement à partir de cette famille en supprimant le premier élément :

$$\left\{(X-\alpha);\ (X-\alpha)^2;\ \dots;\ (X-\alpha)^n\right\}$$

En effet, on vérifie aisément que cette famille est libre, qu'elle contient n éléments et que tous les éléments sont divisibles par $(X - \alpha)$. Cela suffit pour prouver que c'est une base de notre espace !

Planche n° 23: Variables aléatoires

Exercice 1

On considère un dé pipé à 6 faces, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k. On note X la valeur de la face obtenue.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance. Comparer avec un dé non pipé.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, puis son espérance.

Exercice 2

A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ? (on discutera en fonction de p).

Exercice 3

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

1. Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.
2. En réalité, la soirée était bien arrosée, et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

Exercice 4

On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour y déceler l'éventuelle présence d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec une probabilité p. Pour cela, on regroupe les individus par groupes de n (on suppose N divisible par n). On rassemble la collecte de sang des individus d'un même groupe et on teste l'échantillon. Si le résultat est positif, on analyse alors le sang de chacun des individus du groupe.

1. Déterminer la probabilité qu'un groupe soit infecté.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de groupes positifs.
3. Soit Y la variable aléatoire déterminant le nombre d'analyses effectuées. Calculer l'espérance de Y en fonction de N, n et p.
4. Discuter de l'avantage de ce protocole de dépistage dans le cas où $N = 1000$, $n = 10$ et $p = 0,01$.
5. Déterminer, en fonction de n, la valeur maximale de p pour que ce protocole soit plus avantageux que le test systématique de chacune des personnes.

Exercice 5

On tire au hasard un entier X entre 1 et n, puis de nouveau au hasard un entier Y entre 1 et X. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

Exercice 6

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;\ 1]$ et X une variable aléatoire réelle de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

1. Quelle est la valeur de X la plus probable ?
2. Quelle est la loi suivie par $Y = n - X$?

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, N]\!]$. Montrer : $E(X) = \sum_{k=0}^{N-1} P(X > k)$.

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.
On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = k) = a\binom{n}{k}$.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Calculer l'espérance de $X(X-1)$.
4. En déduire la variance de X.

Exercice 9

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note X le nombre de boules noires obtenues.

1. Déterminer la loi de X.
2. (a) En considérant le coefficient de t^{n-1} dans le développement de $(1+t)^{n-1}(1+t)^n$, montrer $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k} = \binom{2n-1}{n-1}$.
   (b) En déduire l'espérance de X.
3. (a) En considérant le coefficient de t^{n-2} dans le développement de $(1+t)^{n-2}(1+t)^n$, établir une égalité analogue à celle de la question précédente.
   (b) En déduire l'espérance de $X(X-1)$.
   (c) En déduire la variance de X.

Exercice 10

Soit X une variable aléatoire réelle de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de la variable $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

Exercice 11

Dans une urne contenant n boules blanches et n boules noires, on prélève successivement et sans remise les boules. On note X le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de toutes les boules noires.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer son espérance.

Exercice 12

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini.

1. Démontrer l'**inégalité de Markov** : pour tout $a > 0$, $P(|X| \geq a) \leq \dfrac{E(|X|)}{a}$.
2. En déduire l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : pour tout $a > 0$, $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$.

Exercice 13

20 livres sont disposés sur une étagère. Parmi ces livres 5 sont de Zola.
On suppose que les livres sont rangés aléatoirement.
On note Z le nombre maximal de livres de Zola consécutifs que l'on peut trouver sur cette étagère. Par exemple, $Z = 3$ signifie qu'il y a exactement trois livres de Zola côte à côte sur cette étagère.

1. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;\ 5]\!]$, $P(Z = k)$.
2. On constate qu'il y a quatre livres de Zola côte à côte. Peut-on, avec une certitude d'au moins 95% suspecter que le bibliothécaire a rassemblé ces livres ?

Exercice 14

Un appareil reste allumé en permanence.
n désigne le nombre d'heures écoulées depuis sa mise en marche.
T désigne l'heure au cours de laquelle cet appareil tombe en panne.
Par exemple, $T = 1$ est l'évènement « l'appareil est tombé en panne la première heure » . On aura par hypothèse,
$P(T = 0) = 0$.
On suppose que le taux de panne $r = P(T = n | T \geq n)$ est constant : il correspond à la probabilité que l'appareil tombe en panne au bout de la n-ième heure sachant qu'il n'est pas tombé en panne précédemment. Une fois que l'appareil est tombé en panne, l'expérience s'arrête.

1. Tracer l'arbre correspondant aux 3 premières heures de fonctionnement.
2. Partant de la définition de r, en déduire la valeur de $P(T \geq n+1 | T \geq n)$

   On note $p_n = P(T \geq n)$
3. Déterminer p_1, p_2 puis établir une formule de récurrence donnant p_{n+1} en fonction de p_n.
   Indication: Utiliser $P_{T \geq n}(T \geq n+1)$
4. Donner pour tout n la valeur de p_n.
5. En déduire la valeur de $P(T = n)$

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier et B une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[\![-n;\ n]\!]$.

Déterminer $E(B^2)$.

Exercice 16

Règle du jeu *pigs*

Le jeu se joue à deux. Vous avez besoin d'un dé cubique et d'une feuille pour noter les scores. Il y a un score correspondant au tour en cours et un score global.

Au tout début, chaque joueur lance le dé pour déterminer qui commence.
Ensuite les joueurs jouent chacun à leur tour de la manière suivante :

(Étape 1) Le joueur lance le dé.

- (Cas n° 1) Si le dé ne tombe pas sur 1, le joueur ajoute la valeur de la face au score du tour en cours.
- (Cas n° 2) Si le dé tombe sur 1, le joueur perd les points accumulés pendant le tour et passe le dé à son adversaire.

(Étape 2) Le joueur annonce sa décision.

- (Décision n° 1) Il passe le dé à son adversaire et dans ce cas ajoute à son score global les points accumulés pendant le tour.
- (Décision n° 2) Il relance le dé (on retourne à la première étape).

Le premier joueur arrivé à un score supérieur ou égal à 100 gagne la partie.

L'enjeu de ce jeu réside dans la prise de décision à chaque lancer. Il ne faut ni être trop prudent, ni être trop avide de gains.
Nous allons prouver qu'il existe une stratégie optimale de jeu.

Élaboration de la stratégie

Réfléchissez à une stratégie optimale en définissant un critère de décision de passage ou non de tour. Il pourra être judicieux de prendre en considération le nombre de points accumulés pendant le tour en cours.

Corrigé de la planche n° 23: Variables aléatoires

Exercice 1

1. Soit α le nombre tel que, pour tout $k \in [\![1;\ 6]\!]$, $P(X = k) = \alpha k$.
   α vérifie
   $$P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = 6) = 1 \iff \alpha \times \frac{6 \times 7}{2} = 1$$
   On obtient ainsi $\alpha = \dfrac{1}{21}$

   Ainsi, pour tout $k \in [\![1;\ 6]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{k}{21}$.
   L'espérance vaut :
   $$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + \cdots + 6 \times P(X = 6) \\ &= \frac{1}{21} \times (1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2) \\ &= \frac{1}{21} \times \frac{6 \times (6+1) \times (2 \times 6 + 1)}{6} \\ &= \frac{1}{21} \times 7 \times 13 \\ &= \frac{13}{3} \simeq 4,3 \end{aligned}$$
   Dans le cas d'un dé non pipé, l'espérance vaut $\dfrac{7}{2} = 3,5$.

   L'espérance est donc plus grande dans le cas de ce dé pipé, ce qui semble cohérent puisque les grandes valeurs sont plus probables.
2. Pour tout $k \in [\![1;\ 6]\!]$, $P\left(Y = \dfrac{1}{k}\right) = P(X = k) = \dfrac{k}{21}$.

   On utilise la formule du transfert pour calculer l'espérance :
   $$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{1} \times P(X = 1) + \frac{1}{2} \times P(X = 2) + \cdots + \frac{1}{6} P(X = 6) \\ &= \alpha + \alpha + \cdots + \alpha \\ &= \frac{6}{21} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Exercice 2

Pour l'avion A :
On note M_1 et M_2 les évènements respectifs : « le premier moteur ne tombe pas en panne » et « le second moteur ne tombe pas en panne. »
Le voyage ne pose pas de problème correspond à l'évènement $M_1 \cap M_2$ et comme les probabilité de panne sont indépendantes, cet évènement se produit avec une probabilité $(1-p)^2$.

Pour l'avion B :
On note $(M_i)_{1 \leq i \leq 4}$ les évènements « le i-ème moteur ne moteur ne tombe pas en panne. »
Le voyage ne pose pas de problème correspond à l'évènement
$(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4) \cup \left(\overline{M_1} \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4\right) \cup \left(\overline{M_2} \cap M_1 \cap M_3 \cap M_4\right) \cup \left(\overline{M_3} \cap M_2 \cap M_1 \cap M_4\right) \cup \left(\overline{M_4} \cap M_2 \cap M_3 \cap M_1\right)$.
Sa probabilité est $(1-p)^4 + 4p(1-p)^3$.

Quel avion est-il préférable de prendre ?
On va chercher à savoir dans quels cas il est préférable de prendre l'avion A. Cela revient à résoudre l'inéquation suivante sur p :

$$\begin{aligned}
(1-p)^2 \geq (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 &\iff (1-p)^2 \geq (1-p)^3\left[1-p+4p\right] \\
&\iff 0 \geq (1-p)^3(1+3p) - (1-p)^2 \\
&\iff 0 \geq (1-p)^2\left[(1-p)(1+3p)-1\right] \\
&\iff 0 \geq (1-p)^2(2p-3p^2) \\
&\iff 0 \geq p(1-p)^2(2-3p) \\
&\iff 0 \geq -3p(p-1)^2\left(p-\frac{2}{3}\right) \\
&\iff 0 \leq p(p-1)^2\left(p-\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

Or nous savons que $p \in [0;\ 1]$. Cette expression est donc strictement positive pour $p \in \left]\frac{2}{3};\ 1\right[$.

Autrement dit, il est préférable de prendre l'avion A lorsque la probabilité de panne de moteur est supérieure à $\frac{2}{3}$. Notons que la plupart des moteurs ont des probabilités de panne très faibles. Dans la vraie vie, il est donc en général préférable de prendre un quadrimoteur.

Exercice 3

1. Pour simplifier, on s'intéresse l'univers formé de l'ordre des clefs dans le trousseau. Il est constitué de $n!$ issues équiprobables.
   Soit X le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de la bonne clef.
   Pour tout $i \in [\![1;\ n]\!]$, on réalise $X = i$ en :
   - plaçant la bonne clef en position i : 1 manière ;
   - plaçant les autres clefs dans les autres positions : $(n-1)!$ manières.

   Ainsi :
   $$P(X=i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$
   Donc le nombre moyen d'essais (qui est forcément inférieur ou égal à n) vaut :
   $$E(X) = \sum_{i=1}^{n} i \times P(X=i) = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)}{2}$$

2. Ici, à chaque essai la probabilité d'obtenir la clef est de $\dfrac{1}{n}$ et la probabilité de ne pas obtenir la bonne clef est de $\dfrac{(n-1)}{n}$.

   Comme il y a remise, tous les essais sont indépendants.

   Par conséquent, pour tout $i \in N^*$, on a
   $$P(X=i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} \times \frac{1}{n}$$
   En théorie le nombre d'essais nécessaires peut être infini. Le calcul de l'espérance conduit donc à déterminer une somme infinie :
   $$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} i \times P(X=i)$$
   Vous saurez l'an prochain comment manipuler avec rigueur les sommes infinies. Pour le moment, on va juste admettre que cette somme correspond à la limite de S_n avec
   $$S_n = \sum_{i=1}^{n} i \times P(X=i)$$

Avec, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} i \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i} \end{aligned}$$

La solution de ce problème nécessite des notions que nous verrons plus tard.

Exercice 4

1. Un groupe contient n individus.
   La probabilité qu'aucun individu du groupe ne soient infectés est $(1-p)^n$ donc la probabilité que le test global du groupe soit positif est $1-(1-p)^n$.
2. Comme la contamination est censée être indépendante entre groupes, X suit une loi binomiale de paramètres $\frac{N}{n}$ (le nombre de groupes) et $1-(1-p)^n$ (probabilité qu'un groupe soit contaminé).
3. On doit tester tous les groupes, cela correspond à $\frac{N}{n}$ analyses. Puis on doit analyser les individus du groupe si le groupe est testé positivement. On doit donc réaliser Xn tests supplémentaires.
   Finalement, on obtient $Y = \frac{N}{n} + nX$. On calcule ainsi
   $$E(Y) = \frac{N}{n} + nE(X) = \frac{N}{n} + n \times \frac{N}{n} \times (1-(1-p)^n) = \frac{N}{n} + N\,(1-(1-p)^n)$$
4. Une application numérique donne $E(Y) \simeq 196$. Cela correspond donc à un nombre de tests très inférieurs au 1 000 tests que l'on devrait faire selon un protocole classique.
5. Le test est plus avantageux lorsque $E(Y) \leq N$. Cela donne une inéquation :
   $$\begin{aligned} \frac{N}{n} + N\,(1-(1-p)^n) \leq N &\iff 1-(1-p)^n \leq 1 - \frac{1}{n} \\ &\iff (1-p)^n \geq \frac{1}{n} \\ &\iff (1-p) \geq \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \\ &\iff p \leq 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Exercice 5

On sait que, pour tout $1 \leq k \leq n$, $P(X=k) = \frac{1}{n}$.

De plus, pour tout $1 \leq l \leq k$, $P(Y=l|X=k) = \frac{1}{k}$.

Or, les évènements "$X=k$" pour $k \in [\![1;\ n]\!]$ forment un système complet. On peut donc exploiter la formule des probabilités totales ! Ainsi, pour tout $1 \leq l \leq n$:

$$\begin{aligned} P(Y=l) &= \sum_{k=1}^{n} P(Y=l|X=k)P(X=k) \\ &= \sum_{k=l}^{n} P(Y=l|X=k)P(X=k) \text{ car pour } l>k, \text{ on a } P(Y=l|X=k)=0 \\ &= \sum_{k=l}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=l}^{n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Cette dernière somme ne se simplifie pas aisément ! On garde donc la formule, valable pour tout $1 \leq l \leq n$:

$$P(Y = l) = \frac{1}{n}\sum_{k=l}^{n}\frac{1}{k}$$

Calculons maintenant l'espérance de Y grâce à la formule du transfert :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{l=1}^{n} l P(Y = l) \\
&= \sum_{l=1}^{n} l \left(\frac{1}{n}\sum_{k=l}^{n}\frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=l}^{n}\frac{l}{k}
\end{aligned}$$

Il faut maintenant travailler sur la double somme $\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=l}^{n}\frac{l}{k}$.

Pour pouvoir éventuellement intervertir les sommes, on va utiliser une fonction indicatrice. En effet, dans l'écriture ci-dessus, les valeurs de l'indice k dépendent des valeurs de l'indice l. Il faut donc contourner cette dépendance.
On pose ainsi $\mathbb{1}_{k\geq l}$ la fonction qui vaut 1 si $k \geq l$ et 0 sinon. On réécrit ensuite la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=l}^{n}\frac{l}{k} &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{k\geq l}\frac{l}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbb{1}_{k\geq l}\frac{l}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{k}\mathbb{1}_{k\geq l}l \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{n}\mathbb{1}_{k\geq l}l
\end{aligned}$$

Or, $\sum_{l=1}^{n}\mathbb{1}_{k\geq l}l = \sum_{l=1}^{k} l = \frac{k(k+1)}{2}$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=l}^{n}\frac{l}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\times\frac{k(k+1)}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k+1) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n+1+2}{2}\right) \text{ formule de la somme des termes d'une suite arithmétique} \\
&= \frac{n+3}{4}
\end{aligned}$$

Finalement, $E(Y) = \frac{1}{2n}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right)$

Exercice 7

Travaillons sur le membre de droite ! L'évènement $X > k$ est constitué des évènements disjoints $X = k+1$, $X = k+2$, $\cdots$, $X = n$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} P(X > k) &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=k+1}^{N-1} P(X = j) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{1}_{j \geq k+1} P(X = j) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{1}_{j \geq k+1} P(X = j) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{\sum_{k=0}^{j-1} P(X = j)}_{j \text{ termes identiques}} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} j P(X = j) \\
&= E(X)
\end{aligned}$$

Ici encore, on a utilisé une indicatrice afin d'intervertir les deux sommes.

Exercice 8

1. a vérifie :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1 &\iff a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1 \\
&\iff a 2^n = 1 \\
&\iff a = \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
E(X) = \sum_{k=0}^{n} k P(X = k) = a \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} &= a \sum_{k=1}^{n} \underbrace{k \binom{n}{k}}_{= n \binom{n-1}{k-1}} \\
= a \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} = n a \sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k'} &= n a 2^{n-1} = n \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

3. Par la formule du transfert :

   $E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) P(X = k) = a \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} = a \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}$ deux premiers termes nuls

   Un peu de calcul donne, pour tout $k \in [\![2;\ n]\!]$, $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$. Donc :

$$\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= a \sum_{k=2}^{n} n(n-1) \binom{n-2}{k-2} = a n(n-1) \sum_{k'=0}^{n-2} \binom{n-2}{k'} \\
&= a n(n-1) 2^{n-2} = \frac{n(n-1)}{4}
\end{aligned}$$

4. On a $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ d'après la formule de Huygens. Or $E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$.

   On en déduit, $E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = \frac{n(n-1)}{4} + \frac{n}{2} = \frac{n(n-1)+2n}{4} = \frac{n(n+1)}{4}$.

   Finalement :

$$V(X) = \frac{n(n+1)}{4} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(n(n+1) - n^2\right) = \frac{n}{4}$$

Une astuce permettait de traiter facilement cet exercice. En effet, pour tout $k \in [\![0;\ n]\!]$, $P(X=k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \binom{n}{k}$. Donc X suit tout simplement une binomiale $\mathcal{B}\left(n;\ \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 10

On utilise la formule du transfert :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Pour tout $k \in [\![0;\ n]\!]$, travaillons sur le terme :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+k}\binom{n}{k} &= \frac{1}{(k+1)} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)} \times \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)} \times \binom{(n+1)}{(k+1)}
\end{aligned}$$

On en déduit, en faisant le changement $k' = k+1$ à partir de la troisième ligne :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n+1}{k'} p^{k'-1} (1-p)^{n+1-k'} \\
&= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n+1}{k'} p^{k'} (1-p)^{n+1-k'} \\
&= \frac{1}{p(n+1)} \left[\underbrace{\sum_{k'=0}^{n+1} \binom{n+1}{k'} p^{k'} (1-p)^{n+1-k'}}_{\text{probabilité totale d'une binomiale}} - \underbrace{(1-p)^{n+1}}_{\text{terme de rang 0}} \right] \\
&= \frac{1}{p(n+1)} \left[1 - (1-p)^{n+1} \right]
\end{aligned}$$

Exercice 11

Ici l'ordre est important. On imagine que l'on poursuit les tirages jusqu'au bout.
L'univers Ω que l'on choisit est donc l'ensemble des ordres possibles pour les $2n$ boules. Son cardinal est donc $(2n)!$

1. Notons que X ne prend que des valeurs comprises entre n et $2n$.
   Soit $k \in [\![n;\ 2n]\!]$. On va déterminer $P(X=k)$.
   Compte-tenu de notre univers, l'évènement $X=k$ est réalisé par :
   - le choix de la dernière boule noire en position k : il y a n possibilités ;
   - le choix des positions des $n-1$ premières boules noires : il y a $\binom{k-1}{n-1}$ possibilités ;
   - l'ordre des $n-1$ premières boules noires : il y a $(n-1)!$ possibilités ;
   - l'ordre des boules blanches sur les n emplacements restants : il y a $n!$ possibilités.

Finalement :

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \frac{n \times \binom{k-1}{n-1} \times (n-1)! \times n!}{(2n)!} \\
&= \frac{n \times \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} \times (n-1)! \times n!}{(2n)!} \\
&= \frac{n \times (k-1)! \times n!}{(2n)!(k-n)!}
\end{aligned}$$

2. On calcule ainsi l'espérance :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=n}^{2n} k \times \frac{n \times (k-1)! \times n!}{(2n)!(k-n)!} \\
&= \sum_{k=n}^{2n} \frac{n \times k! \times n!}{(2n)!(k-n)!} \\
&= \frac{n \times (n!)^2}{(2n)!} \sum_{k=n}^{2n} \frac{k!}{(k-n)!n!} \\
&= \frac{n \times (n!)^2}{(2n)!} \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n}
\end{aligned}$$

Examinons maintenant la somme $\sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n}$.

On a précédemment montré (voir la planche d'exercices sur les sommes) que $\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}$ (on peut prouver cette formule par récurrence sur p en initialisant à $p = n$).
En exploitant cette formule, on obtient :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{n \times (n!)^2}{(2n)!} \times \binom{2n+1}{n+1} \\
&= \frac{n \times (n!)^2 \times (2n+1)!}{(2n)! \times (n+1)! \times n!} \\
&= \frac{n(2n+1)}{n+1}
\end{aligned}$$

Exercice 13

1. L'univers est composé de toutes les manières de disposer les 20 livres. Son cardinal est $20!$.
   On va considérer le problème comme étant la combinaison :
   - de l'ordre de 15 autres livres ;
   - de la position des 5 livres de Zola au sein des 16 emplacements possibles entre les autres livres ou aux extrêmités de l'étagère (14 espaces entre les autres livres et 2 positions aux extrêmités.

   Notons qu'il y a $15!$ manières de positionner les 15 autres livres. Ensuite, on va étudier pour chaque valeur de k, toutes les possibilités.
   - Pour $Z = 1$:
     Tous les livres de Zola sont séparés. Il y a 16 emplacements pour le premier, 15 emplacements pour le second et ainsi de suite jusqu'à 12 emplacements pour le cinquième.
     Ainsi, $P(Z=1) = \frac{15! \times 16!}{20! \times 11!} \simeq 0,2817$.
   - Pour $Z = 2$:
     Il y a 2 configurations distinctes possibles :
     — ou bien on a deux paires côte à côte et un dernier livre tout seul ;
     — ou bien on a une paire côte à côte et les trois autres livres tous séparés.

Pour la première configuration, il faut choisir l'emplacement des deux paires ($\binom{16}{2}$) possibilités puis l'emplacement du dernier livre (14 possibilités) et enfin l'ordre des cinq livres de Zola. Cela donne donc en tout $\binom{16}{2} \times 14 \times 5!$ possibilités.
Pour la seconde configuration, il faut choisir l'emplacement de la paire puis l'emplacement des 3 livres séparés (donc $16 \times \binom{15}{3}$ possibilités) et enfin l'ordre des cinq livres de Zola (5! possibilités).
Finalement, $P(Z=2) = \dfrac{15! \times \left(\binom{16}{2} \times 14 \times 5! + 16 \times \binom{15}{3} \times 5!\right)}{20!} \simeq 0,5779$.

- Pour $Z = 3$:
  Il y a encore une fois 2 configurations distinctes possibles :
  — ou bien on a une paire côte à côte et un triplet côte à côte ;
  — ou bien on a un triplet côte à côte et deux livres séparés.
  En utilisant le même genre de technique que précédemment, on obtient
  $P(Z=3) = \dfrac{15! \times \left(16 \times 15 \times 5! + 16 \times \binom{15}{2} \times 5!\right)}{20!} \simeq 0,1238$.
- Pour $Z = 4$:
  Il n'y a qu'une configuration possible. On obtient $P(Z=4) = \dfrac{15! \times 16 \times 15 \times 5!}{20!} \simeq 0,0154$
- Pour $Z = 5$, la configuration est la plus simple. On obtient : $P(Z=5) = \dfrac{15! \times 16 \times 5!}{20!} \simeq 0,0010$

2. La probabilité qu'il y ait au moins quatre livres de Zola côte à côte vaut

$$P(Z=4) + P(Z=5) \simeq 0,0165$$

C'est donc effectivement probable à moins de 5%. On peut donc suspecter une intervention d'un bibliothécaire.

Exercice 14

On utilise la formule du transfert :

$$\begin{aligned}
E(B^2) &= \sum_{k=-n}^{n} k^2 \times P(B=k) \\
&= \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} k^2 \\
&= \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{2}{2n+1} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)}{3}
\end{aligned}$$

> ⚠ Ici, on vérifie que $E(B^2) \neq E(B)^2$. Plus généralement, on n'a pas $E(f(B)) = f(E(B))$ sauf dans le cas où f est une fonction affine.

Planche n° 24: Développements limités

Exercice 1

n désigne un entier et $a < b$ sont deux réels. Soit une fonction f définie et de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a;\ b]$.

On suppose que, pour tout $0 \leq k \leq n$, $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f^{(k)}(x)$ existe et est finie.

Montrer, par récurrence sur n, que l'on peut prolonger f en a et que la fonction ainsi obtenue est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a;\ b]$.

Exercice 2

Donner un équivalent simple des expressions suivantes.

a) $\lfloor x \rfloor$ en $+\infty$;

b) $\dfrac{x^4 + 3x^2 - x + 2}{2x^3 - x}$ en $+\infty$ et en 0 ;

c) $\ln(1 + x^2) - \sin(x^2) + 2\cos^2(x)$ en $+\infty$;

d) $\dfrac{e^{x^2} - \sqrt[5]{1+x}}{2 + \ln(3x+1) - \sqrt{4+x}}$ en 0 ;

e) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x+2}}$ en 1 ;

f) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{2+x}$ en 0 et en $+\infty$;

g) $1 + e^{e^{e^x}} - \arctan x$ en $-\infty$;

h) $\sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}$ en $+\infty$;

i) $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ en π.

Exercice 3

Prolonger par continuité si besoin chacune des fonctions suivantes, puis étudier la classe de l'application obtenue.

$$f_1 : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x} \qquad f_2 : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} \sin x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$f_3 : x \mapsto x|x| \qquad f_4 : x \mapsto \begin{cases} x + a + be^x & \text{si } x \geq 0 \\ \cos x - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée n-ième des applications suivantes.

$$f_1 : x \mapsto \cos(3x) \qquad f_2 : x \mapsto (x^3 + 2x - 7)e^x \qquad f_3 : x \mapsto x^5 e^{3x}$$

$$f_4 : x \mapsto x^4 + 3x^3 + 10x - 4 \qquad f_5 : x \mapsto e^x \cos x \qquad f_6 : x \mapsto x^{n-1} \ln(1+x)$$

Exercice 5

Déterminer les développements limités suivants au voisinage de 0 :

a) $e^x \sqrt[3]{1+x}$ à l'ordre 3 ;

b) $\sin(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 3 ;

c) $\sqrt{1 + \sin x}$ à l'ordre 3 ;

d) $(e^x - 1)\sin x$ à l'ordre 3 ;

e) $\dfrac{x}{e^x - 1}$ à l'ordre 2 ;

f) $e^{\cos x} - (1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2 ;

g) $(\sin x)^4$ à l'ordre 8 ;

h) $\tan x$ à l'ordre 4 ;

i) $\dfrac{xe^{-x}}{2x+1}$ à l'ordre 4 ;

j) $(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 6

Déterminer les développements limités suivants :

1. $\sin(x)\cos(3x)$ à l'ordre 2 au voisinage de $\dfrac{\pi}{3}$;
2. $\sqrt{x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 1 ;
3. $\dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 1 ;
4. e^x à l'ordre 3 au voisinage de 1 ;
5. $\sqrt{\tan x}$ à l'ordre 3 au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$;
6. $\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$ à l'ordre 3 au voisinage de 1.

Exercice 7

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f : x \mapsto \arctan \dfrac{\sqrt{3}+x}{1+x\sqrt{3}}$.
Indication : on commencera par déterminer un développement limité de f' à un ordre bien choisi.

Exercice 8

Étudier les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{\tan x - x}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\arctan x}{\sin^3 x}$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\ln|x|}$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3+7x^2-8}{x^4+x^3-2}$.

Exercice 9

Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $f : x \mapsto x^{\sin x} - (\sin x)^x$.

Exercice 10

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang.
   (*Indication :* on pourra étudier le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$).

Exercice 11

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - e^{-x}}$ si $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f possède un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le calculer.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f'(0)$?
3. Préciser la position relative de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$. En effectuant le changement de variable $u = \frac{1}{x}$, montrer que le graphe de f possède une asymptote au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$ et déterminer la position relative du graphe de f et de son asymptote.

Exercice 13

Soit f la fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f possède un développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 3 et le calculer. Qu'en déduit-on sur le graphe de f ?

Exercice 14

Étudier au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\arcsin x}$.
(prolongeable par continuité ? dérivable ? position de la courbe par rapport à la tangente ?)

Exercice 15

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$.
Étudier au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$.
(prolongeable par continuité ? dérivable ? position de la courbe par rapport à la tangente ?)

Exercice 16

Soit $n \geq 1$. Soit $f : x \mapsto \dfrac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
3. En interprétant $f(x)$ comme une somme, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice 17

Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. (a) Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0. On note $\tilde{f}$ ce prolongement.
   (b) Déterminer un développement limité d'ordre deux de $\tilde{f}$ en 0.
2. Quelle est la classe de $\tilde{f}$?

Corrigé de la planche n° 24: Développements limités

Exercice 2

1. Par encadrement et à l'aide du théorème des Gendarmes, on peut montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$. Par conséquent :
$$\lfloor x \rfloor \underset{+\infty}{\sim} x$$
2. Par des techniques de factorisation :
$\frac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x} \underset{0}{\sim} \frac{-2}{x}$ et $\frac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{2}$
3. On obtient :
$$\ln(1+x^2) - \sin(x^2) + 2\cos^2(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(1+x^2) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(x)$$
4. Par des techniques de développements limités, on obtient :
$$\frac{e^{x^2} - \sqrt[5]{1+x}}{2+\ln(3x+1)-\sqrt{4+x}} \underset{0}{\sim} \frac{-4}{55}$$
5. Toujours avec des développements limités, on obtient :
$$\frac{\ln x}{\sqrt{x+2}} \underset{0}{\sim} \frac{x-1}{\sqrt{3}}$$
6. Pour tout $x \notin \{-1;\ -2\}$, on a
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} = \frac{x^2+2x+2}{x^3+3x^2+2x}$$
À partir de cette écriture, on peut facilement trouver des équivalents en 0 et en $+\infty$:
$\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.
7. C'est une limite classique. On obtient $1 + \mathrm{e} + \frac{\pi}{2}$.
8. Avec des techniques de développement limité, on obtient :
$$\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$
9. Toujours avec des développements limités d'ordre 1, on obtient :
$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \underset{\pi}{\sim} \frac{\pi - x}{\sqrt{\pi}}$$

Exercice 3

a) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée et produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$.
Le théorème des gendarmes montre qu'on peut prolonger f en 0 en posant $f(0) = 0$. Reste à savoir la classe de la fonction obtenue. Pour ce faire, on calcule le taux d'accroissement entre 0 et $a \neq 0$.
$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0} = a\sin\left(\frac{1}{a^2}\right)$$
Avec les Gendarmes, encore une fois, on en déduit que les limites de ce taux d'accroissements sont les mêmes à gauche et à droite et égales à 0. On a donc $f'(0) = 0$.

Pour savoir si f' est continue en 0, on calcule, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{-2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} + 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$. On en déduit que f' ne possède pas de limite en 0.

Par conséquent, f' n'est pas continue en 0. On en déduit que f est de classe $\mathcal{D}^1(\mathbb{R})$ mais pas $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

b) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ car chacun de ses morceaux sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty;\ 0[$ et sur $]0;\ +\infty[$.

Ici, il faut vérifier si f est dérivable en 0. Pour $a > 0$, on a

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0} = \frac{\sin(a)}{\sqrt{a}} \underset{a\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \text{ (règle de l'Hospital)}$$

Pour $a < 0$, on a $\lim\limits_{a\to 0^-} \dfrac{f(a)-f(0)}{a-0} = 0$. On en déduit que f est dérivable en 0 et que l'on a $f'(0) = 0$.

Or, pour $x > 0$, $f'(x) = \sqrt{x}\cos(x) + \dfrac{\sin(x)}{2\sqrt{x}}$. Là encore, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0) = 0$ donc f' est continue à droite. De même, f' est continue à gauche. On en déduit que f' est au moins de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Cherchons à déterminer la dérivée seconde de f en 0. Pour $a > 0$, on calcule donc

$$\frac{f'(a)-f'(0)}{a-0} = \frac{\cos(a)}{\sqrt{a}} + \frac{\sin(a)}{2a\sqrt{a}}$$

Cette dernière expression n'a pas de limite quand a tend vers 0^+ donc f n'admet pas de dérivée seconde en 0.

c) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

En adoptant la même stratégie que précédemment, on montre que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. On montre aussi que f' est continue. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

En revanche la dérivée seconde n'existe pas car les taux d'accroissements de f' à gauche et à droite de 0 n'ont pas la même limite.

d) f est continue lorsque $a + b = 1$.

Pour $x < 0$, on a $f'(x) = -\sin(x) - 1$ et pour $x \geq 0$, on a $f'(x) = 1 + b\mathrm{e}^x$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ lorsque $1 + b = -1$, c'est à dire $b = -2$.

Continuons l'examen de f. Pour $x < 0$, on a $f''(x) = -\cos(x)$ et pour $x \geq 0$, on a $f''(x) = -2\mathrm{e}^x$. On en déduit que f n'admet pas de dérivée seconde en 0. Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à condition que $a = 3$ et $b = -2$.

Exercice 4

1. Soit la fonction complexe $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}$, de sorte que $f = \Re(\varphi)$.

   Pour tout n, $\varphi^{(n)} = (3\mathrm{i})^n\varphi$.

   On en déduit que, pour tout x, $f^{(n)}(x) = \Re\left((3\mathrm{i})^n\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}\right) = 3^n \times \Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\pi/2+x)}\right) = 3^n\cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

2. On pose $t : x \mapsto x^3 + 2x - 7$ et $u : x \mapsto \mathrm{e}^x$. Ces deux fonctions sont $\mathcal{C}^\infty$ donc leur produit, f, l'est aussi.

   Pour tout x et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$.

   D'autre part, pour tout x, $t'(x) = 3x^2 + 2$, $t''(x) = 6x$, $t^{(3)}(x) = 6$ et, pour tout $k \geq 4$, $t^{(k)}(x) = 0$.

   L'application de la formule de Leibnitz donne donc, pour tout x et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}t^{(k)}(x) \times u^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{3}\binom{k}{n}t^{(k)}(x) \times u^{(n-k)}(x) \end{aligned}$$

   Un peu de calcul permet d'obtenir :

$$f^{(n)}(x) = \left(x^3 + 3nx^2 + (3n^2 - 3n + 2)x + n^3 - 3n^2 + 4n - 7\right)\mathrm{e}^x$$

3. Même technique que précédemment. On obtient :

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{3x}[3^n x^5 + 5n3^{n-1}x^4 + 10n(n-1)3^{n-2}x^3 + 10n(n-1)(n-2)3^{n-3}x^2 \\ + 5n(n-1)(n-2)(n-3)3^{n-4}x + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)3^{n-5}]$$

4. On calcule « à la main » les quatre premières dérivées. À partir de la dérivée cinquième, les fonctions sont nulles.
5. On pose la fonction complexe $\phi : x \mapsto \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$, de sorte que $\Re(\phi) = f$.
   ϕ est très facile à dériver n-fois. Ainsi la dérivée n-ième de f est la fonction

$$x \mapsto \Re\left((1+\mathrm{i})^n \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\right)$$

   On obtient la derivée n-ième de f en prenant la partie réelle de $\varphi^{(n)}$.
   On obtient, pour tout x :

$$f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)\mathrm{e}^x$$

Exercice 5

a) Un peu de calcul permet de prouver que :
$e^x \sqrt[3]{1+x} = \frac{23}{81}x^3 + \frac{13}{18}x^2 + \frac{4}{3}x + 1 + o(x^3)$

b) $\sin(x)\ln(1+x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + o(x^3)$

c) $\sqrt{1+\sin x} = -\frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 + o(x^3)$

d) $(e^x - 1)\sin x = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + o(x^3)$

e) Détaillons un peu les calculs :
Pour tout x :

$$\begin{aligned}\frac{x}{e^x - 1} &= \frac{x}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1} \\ &= \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}\end{aligned}$$

En posant $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$, il vient :

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

Or $u \sim \dfrac{x}{2}$ en 0 donc, $o(u^2) = o(x^2)$.
Finalement :

$$\begin{aligned}\frac{x}{e^x - 1} &= 1 - u + u^2 + o(u^2) \\ &= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2 + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)x^2 + o(x^2) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\end{aligned}$$

f) $e^{\cos x} - (1+x)^{\frac{1}{x}} = -\frac{23}{24}x^2 e + \frac{1}{2}xe + o(x^2)$

g) $(\sin x)^4 = \frac{1}{5}x^8 - \frac{2}{3}x^6 + x^4 + o(x^8)$

h) $\tan x = \frac{1}{3}x^3 + x + o(x^4)$

i) $\dfrac{xe^{-x}}{2x+1} = -\frac{79}{6}x^4 + \frac{13}{2}x^3 - 3x^2 + x + o(x^4)$

j) $(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \frac{17}{384}x^4 - \frac{5}{48}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 + o(x^4)$

Exercice 6

1. Détaillons les calculs de ce développement limité. Comme dans tous les calculs, il y a plusieurs approches possibles. On va ici utiliser une technique de linéarisation.
   On écrit donc
   $$\sin(x)\cos(3x) = \frac{1}{2}\left[\sin(4x) - \sin(2x)\right]$$
   Ensuite, on fait le développement limité de chacun des termes. Avant d'entamer les calculs, posons $u = x - \frac{\pi}{3}$, c'est à dire $x = u + \frac{\pi}{3}$.
   Ainsi :
   $$\begin{aligned}\sin(4x) &= \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 4x\right)\\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(4u) - \frac{1}{2}\sin(4u)\\ &= -\frac{1}{2}\left[\sqrt{3}(1-8u^2) + 4u\right] + o(u^2)\\ &= -\frac{1}{2}\left[\sqrt{3} + 4u - 8\sqrt{3}u^2\right] + o(u^2)\end{aligned}$$
   De même :
   $$\begin{aligned}\sin(2x) &= \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2u) - \frac{1}{2}\sin(2u)\\ &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{3}(1-2u^2) - 2u\right] + o(u^2)\\ &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{3} - 2u - 2\sqrt{3}u^2)\right] + o(u^2)\end{aligned}$$
   Finalement :
   $$\begin{aligned}\sin(x)\cos(3x) &= \frac{1}{2}\left[\sin(4x) - \sin(2x)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[-\sqrt{3} - u + 5\sqrt{3}u^2\right] + o(u^2)\\ &= \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{5\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + +o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2\right)\end{aligned}$$
2. On obtient :
   $$1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$
3. On obtient :
   $$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$
4. On obtient :
   $$\mathrm{e} \times \left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6}\right) + o\left((x-1)^3\right)$$

5. On fait le changement de variable $u = x - \frac{\pi}{4}$. On a ainsi, sachant que $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$:

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \tan\left(u + \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\tan(u) + 1}{1 - \tan(u)} \\
&= \frac{1 + u + \frac{u^3}{3} + o(u^3) + o(u^3)}{1 - u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)} \\
&= \left(1 + u + \frac{u^3}{3} + o(u^3) + o(u^3)\right)\left(1 + u + \frac{u^3}{3} + \left(u + \frac{u^3}{3}\right)^2 + \left(u + \frac{u^3}{3}\right)^3 + o(u^3)\right) \\
&= 1 + 2u + 2u^2 + \frac{8}{3}u^3 + o(u^3)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\tan(x)} &= \sqrt{1 + 2u + 2u^2 + \frac{8}{3}u^3 + o(u^3)} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(2u + 2u^2 + \frac{8}{3}u^3\right) - \frac{1}{8}\left(2u + 2u^2 + \frac{8}{3}u^3\right)^2 + \frac{1}{16}\left(2u + 2u^2 + \frac{8}{3}u^3\right)^3 + o(u^3) \\
&= 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{5}{6}u^3 \\
&= 1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{5}{6}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)
\end{aligned}$$

6. On obtient :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{12}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right)$$

Exercice 8

1. On utilise les développements limités. Ainsi, en 0, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{\tan x - x} &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x} \\
&= \frac{\frac{-x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{x} \times \frac{\frac{-1}{2} + \frac{x}{6} + o(x)}{\frac{1}{3} + o(1)}
\end{aligned}$$

On en déduit que la limite recherchée est $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en 0^-.

2. On pose $u = x - 1$, c'est à dire $x = u + 1$. On cherche donc la limite, en 0 de

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\left(2(u+1)^2 - 1\right)}{\tan(u)} &= \frac{\ln(1 + 4u + 2u^2)}{\tan(u)} \\
&= \frac{4u - 6u^2 + o(u^2)}{u + o(u^2)} \\
&= \frac{4 + o(1)}{1 + o(1)}
\end{aligned}$$

La limite recherchée est donc 4.

3. On raisonne toujours en terme de développements limités en 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x} &= \frac{1}{x^3} \times \left[1 - \frac{x^3}{\sin(x)^3}\right] \\
&= \frac{1}{x^3} \times \left[1 - \left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^3\right] \\
&= \frac{1}{x^3} \times \left[1 - \left(\frac{x}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}\right)^3\right] \\
&= \frac{1}{x^3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}\right)^3\right] \\
&= \frac{1}{x^3} \times \left[1 - \left(1 + \left(\frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) + \left(\frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^2\right)^3\right] \\
&= \frac{1}{x^3} \times \left[1 - \left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^3\right] \\
&= \frac{1}{x^3} \times \left[1 - \left(1 + \frac{3x^2}{6} + o(x^3)\right)\right] \\
&= \frac{1}{x^3} \times \left[\frac{-x^2}{2} + o(x^3)\right] \\
&= \frac{-1}{2x} + o(1)
\end{aligned}$$

On en déduit que la limite recherchée est $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en 0^-.

4.

5. Pour $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
(\cos x)^{\ln|x|} &= \mathrm{e}^{\ln(x) \times \ln(\cos(x))} \\
&= \mathrm{e}^{\ln|x| \times \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\ln|x| \times \left[-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]} \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{x^2 \ln|x|}{2} + o(x^2 \ln|x|)}
\end{aligned}$$

La limite recherchée vaut donc 1.

6. On remarque que 1 est racine du numérateur et du dénominateur. On peut donc factoriser le numérateur et le dénominateur par $x - 1$. On obtient ainsi :

$$\frac{x^3 + 7x^2 - 8}{x^4 + x^3 - 2} = \frac{x^2 + 8x + 8}{x^3 + 2x^2 + 2x + 2}$$

La limite recherchée est donc $\dfrac{17}{7}$.

Exercice 9

Notons que cette expression est définie lorsque $\sin(x) > 0$ et $x > 0$. Pour x de ce domaine, on a :

$$\begin{aligned}
x^{\sin(x)} - (\sin(x))^x &= \mathrm{e}^{\sin(x)\ln(x)} - \mathrm{e}^{x\ln(\sin(x))} \\
&= \exp\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\ln(x)\right) - \exp\left(x\ln\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\right) \\
&= \exp\left(x\ln(x) - \frac{x^3\ln(x)}{6} + o\left(x^4\ln(x)\right)\right) - \exp\left(x\left(\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(x\ln(x) - \frac{x^3\ln(x)}{6} + o\left(x^4\ln(x)\right)\right) - \exp\left(x\left(\ln(x) - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)\right) \\
&= \exp\left(x\ln(x) - \frac{x^3\ln(x)}{6} + o\left(x^4\ln(x)\right)\right) - \exp\left(x\ln(x) - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \\
&= \exp\left(x\ln(x)\right) \times \left[\exp\left(-\frac{x^3\ln(x)}{6} + o(x^4\ln(x))\right) - \exp\left(-\frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\right] \\
&= \exp\left(x\ln(x)\right) \times \left[1 - \frac{x^3\ln(x)}{6} + o(x^4\ln(x)) - \left(1 - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\right] \\
&= \exp\left(x\ln(x)\right) \times \left[-\frac{x^3\ln(x)}{6} + o(x^3\ln(x))\right]
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$x^{\sin(x)} - (\sin(x))^x \sim \frac{-x^{x+3}\ln(x)}{6}$$

Exercice 10

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

   Posons $\alpha = \dfrac{1}{n}$ de sorte que $n \to +\infty \iff \alpha \to 0^+$.
   On peut donc faire un développement limité de l'expression :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} &= \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}} \\
&= \mathrm{e}^{1+o(1)}
\end{aligned}$$

   On en déduit que $\lim u_n = \mathrm{e}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \times \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^n \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n
\end{aligned}$$

   Posons maintenant $\beta = \dfrac{1}{n+1}$, de sorte que $n = \dfrac{1}{\beta} - 1$.
   Un peu de calcul montre que :

$$\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{\beta}-1} = \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\ln\left(1-\beta^2\right)} = 1 + \frac{\beta^2}{2} + o(\beta^2)$$

On en déduit que l'expression $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieure ou égale à 1 pour β suffisamment proche de 0, c'est à dire pour n suffisamment grand.

Exercice 11

1. On écrit les développements limités en 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{e^x - e^{-x}} &= \frac{x^2}{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)} \\
&= \frac{x^2}{2x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + o(x^5)} \\
&= \frac{x}{2 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{60} + o(x^4)} \\
&= \frac{x}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{120} + o(x^4)} \\
&= \frac{x}{2} \times \left[1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right] \\
&= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^4)
\end{aligned}$$

   Ainsi, la fonction possède bien un développement limité d'ordre 3 en 0 (ici, on est même monté jusqu'à un ordre 4).
2. La fonction f est prolongeable en 0 en posant $f(0) = 0$. Dans ce cas, par lecture du développement limité d'ordre 1, sa dérivée vaut $\dfrac{1}{2}$.
3. L'équation de la tangente en 0 est $y = \dfrac{x}{2}$. La position relative est donnée par le signe de

$$f(x) - \frac{x}{2} = -\frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

   On en déduit que la courbe est sous la tangente en 0^+ et au dessus de la tangente en 0^-.

Exercice 13

1. On doit uniquement étudier la dérivabilité en 0^+ :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{1+\frac{1}{x}} \\
&= x \times x^{\frac{1}{x}} \\
&= x \times \mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{x}}
\end{aligned}$$

   Or, $\frac{\ln(x)}{x} = o(1)$. On en déduit :

$$f(x) = o(x)$$

   Ainsi, f admet un développement limité d'ordre 1 en 0. On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.
2. On fait le changement de variable $u = x - 1$.
   Il faut faire le développement limité d'ordre 3 en 0 de

$$\frac{\ln(1+u)}{1+u} = u - \frac{3}{2}u^2 + \frac{11}{6}u^3 + o(u^3)$$

   On obtient, ainsi :

$$\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+u)}{1+u}} = 1 + u - u^2 + \frac{1}{2}u^3 + o(u^3)$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+u)\times\left(1+u-u^2+\frac{1}{2}u^3+o(u^3)\right) \\ &= 1+2u-\frac{1}{2}u^3+o(u^3) \\ &= 1+2(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^3+o((x-1)^3) \end{aligned}$$

Le graphe de f traverse donc sa tangente en $x=1$.

Exercice 14

1. On va directement répondre aux deux premières questions en faisant le développement limité de f d'ordre 3 en 0. Sa lecture nous donnera la limite de f en 0. Ainsi, pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+(n+1)x+\frac{(n+1)^2x^2}{2}+\frac{(n+1)^3x^3}{6}+\frac{(n+1)^4x^4}{24}+o(x^4)-1}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-1} \\ &= \frac{(n+1)x+\frac{(n+1)^2x^2}{2}+\frac{(n+1)^3x^3}{6}+\frac{(n+1)^4x^4}{24}+o(x^4)}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)} \\ &= \frac{(n+1)+\frac{(n+1)^2x}{2}+\frac{(n+1)^3x^2}{6}+\frac{(n+1)^4x^3}{24}+o(x^3)}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)} \\ &= \left((n+1)+\frac{(n+1)^2x}{2}+\frac{(n+1)^3x^2}{6}+\frac{(n+1)^4x^3}{24}+o(x^3)\right)\times\left(1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)\right)+\frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)\right)}{2}\right. \\ &= \cdots \\ &= (n+1)+\frac{n(n+1)}{2}x+\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}x^2+\frac{n^2(n+1)^2}{24}x^3+o(x^3) \end{aligned}$$

   On en déduit que f se prolonge en 0 en posant $f(0)=n+1$ (on aurait pu aussi utiliser le fait que f correspond à la somme des termes d'une suite géométrique pour trouver la limite en 0).
2. Fait au dessus !
3. Pour tout $x \neq 0$:

$$f(x)=\sum_{0\leq k\leq n} \mathrm{e}^{kx}$$

   Or, pour tout $1\leq k\leq n$, on a $\mathrm{e}^{kx}=1+kx+\dfrac{k^2x^2}{2}+\dfrac{k^3x^3}{6}+o(x^3)$.
   En identifiant le terme de degré 3 du développement limité de cette somme avec le terme de degré 3 du développement limité de f, il vient :

$$\frac{1}{6}\sum_{1\leq k\leq n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{24}$$

   On obtient donc :

$$\sum_{1\leq k\leq n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exercice 15

1. (a) Par le théorème des Gendarmes, la limite de f en 0 est 0. On prolonge donc f en posant $\tilde{f}(0)=0$

(b) Pour tout $x \neq 0$, $\tilde{f}(x) = x^2 \underbrace{\left(x \sin \frac{1}{x}\right)}_{=\varepsilon(x)}$.

La limite en 0 de $x \sin \frac{1}{x}$ est également 0 donc un développement limité d'ordre deux de $\tilde{f}$ en 0 est, pour tout x :

$$\tilde{f}(x) = o(x^2)$$

2. Comme $\tilde{f}$ admet un développement limité d'ordre un, elle est dérivable en 0 et sa dérivée est $\tilde{f}'(0) = 0$, par lecture du développement limité.

Vérifions si elle est de classe C^1. Pour tout $x \neq 0$, $\tilde{f}'(x) = 3x^2 \sin \frac{1}{x} + x^3 \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cos \frac{1}{x} = 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$.
On a bien $\lim\limits_{x \to 0} \tilde{f}'(x) = \tilde{f}'(0)$ donc $\tilde{f}$ est de classe C^1.

Vérifions si la dérivée seconde existe en 0. Pour ce faire, travaillons sur le taux d'accroissement de la dérivée, pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{f}'(x) - \tilde{f}'(0)}{x - 0} &= \frac{3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}}{x} \\ &= 3x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Cette dernière expression n'a pas de limite quand x tend vers 0 donc $\tilde{f}$ n'admet pas de dérivée seconde en 0.

L'exercice précédent montre qu'une fonction peut admettre un développement limité d'ordre 2 en un point sans pour autant que la dérivée seconde n'existe en ce point.

Planche n° 25: Intégration

Exercice 1

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < b < c$ et $f : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,c]$. Montrer :

$$\frac{1}{c-a}\int_{[a,c]} f \leq \max\left(\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f, \frac{1}{c-b}\int_{[b,c]} f\right).$$

Exercice 2

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| = \int_{[a,b]} |f| \Longleftrightarrow f \text{ est de signe constant sur } [a,b].$$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-2}^{3} 4\,\mathrm{d}x; \quad I_2 = \int_0^4 x\,\mathrm{d}x; \quad I_3 = \int_a^b \cos t\,\mathrm{d}t; \quad I_4 = \int_1^3 \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u; \quad I_5 = \int_0^\pi \cos(2u)\,\mathrm{d}u;$$

$$I_6 = \int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,\mathrm{d}x; \quad I_7 = \int_1^3 (x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x; \quad I_8 = \int_0^1 \max\left(e^t, 2\right)\,\mathrm{d}t;$$

$$I_9 = \int_0^1 |3t-1|\,\mathrm{d}t; \quad I_{10} = \int_0^5 x\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4

En reconnaissant une forme dont on connaît une primitive, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \tan^2(t)\,\mathrm{d}t; \quad I_2 = \int_1^3 \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t; \quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t; \quad I_4 = \int_1^e \frac{\cos(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t;$$

$$I_5 = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t; \quad I_6 = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t; \quad I_7 = \int_0^\pi \cos(t)\sin^5(t)\,\mathrm{d}t; \quad I_8 = \int_0^\pi \sin^5(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 5

En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 t^2 e^t\,\mathrm{d}t; \quad I_2 = \int_1^e t^2 \ln t\,\mathrm{d}t; \quad I_3 = \int_0^\pi t\sin(3t)\,\mathrm{d}t; \quad I_4 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t;$$

$$I_5 = \int_1^2 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \left(\textit{Indication :} \text{ trouver } a \text{ et } b \text{ tels que } \frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} - \frac{b}{t+1}\right).$$

Exercice 6

En utilisant un changement de variables, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t; \quad I_2 = \int_0^1 x e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x; \quad I_3 = \int_2^3 \frac{t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t; \quad I_4 = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x;$$

$$I_5 = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x \text{ (poser } u = \sqrt{e^x-1}); \quad I_6 = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}}\,\mathrm{d}x \left(\text{poser } u = \sqrt[3]{2+x}\right);$$

$$I_7 = \int_{1/3}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}}; \quad I_8 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}; \quad I_9 = \int_1^2 (\ln x)^2\,\mathrm{d}x; \quad I_{10} = \int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{d}x \text{ (poser } u = x^3).$$

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n(1-nx) & \text{si } 0 \leq x < \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Pour tout $x \in]0,1]$, montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ; on note $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
5. Que vaut la fonction f ? En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Que remarque-t-on ?

Exercice 8

Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\quad I_{p,q} = \dfrac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$.
2. En déduire : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\quad I_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.
3. Montrer : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Exercice 9

Soit f une fonction définie et continue au voisinage de 0.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Interpréter ce résultat géométriquement.

Exercice 10

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a,b]$. Montrer :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f(t)^n\,\mathrm{d}t \right)^{1/n} = \sup_{[a,b]} f.$$

Exercice 11

Inégalité de Taylor-Lagrange
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Soit $(a,b) \in I^2$. On note $M_{n+1} = \displaystyle\sup_{[a,b]\text{ou}[b,a]} |f^{(n+1)}|$.

1. Justifier l'existence de M_{n+1}.
2. À l'aide de la formule de Taylor-reste intégral, montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}.$$

   (Distinguer les cas $a \leq b$ et $a > b$.)
3. À quoi correspond cette inégalité dans le cas $n = 0$?
4. (a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

(b) En déduire que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et donner sa limite.

(c) Comment approcherait-on $\ln(1/2)$ et $\ln 4$?

5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{et} \quad \cos x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$.
Soit g définie par $g(x) = f(x)/x$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
2. Calculer la dérivée n-ième de g sur $\mathbb{R}^*$ puis, en reconnaissant une formule de Taylor, l'exprimer sous la forme d'une intégrale.
3. À l'aide d'une intégration par partie, calculer $\lim_{x\to 0} g^{(n)}(x)$.
4. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, telle que f et f'' sont bornées. On note $M_0 = \sup_{\mathbb{R}} |f|$ et $M_2 = \sup_{\mathbb{R}} |f''|$.

1. Justifier l'existence de M_0 et M_2.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x_0 et $x_0 + h$, montrer que pour tout $h > 0$, on a $|f'(x_0)| \leq \frac{2M_0}{h} + h\frac{M_2}{2}$.
3. En déduire que f' est aussi bornée et que $\sup_{\mathbb{R}} |f'| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Exercice 14

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
2. Montrer : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Exercice 15

Déterminer les limites des suites de terme général :

1. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k e^{-k/n}$;
2. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left(\ln k^k - \ln n^k\right)$;
3. $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$;
4. $u_n = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$;
5. $u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$;
6. $u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}$.

Exercice 16

En utilisant des sommes de Riemann, déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 17

Égalité de la moyenne généralisée
Soient $a < b$ deux nombres. Soient f et μ deux fonctions continues définies sur un intervalle $[a;\ b]$.
On suppose que μ ne change pas de signe et possède au moins une valeur non nulle.

1. Montrer que $\int_a^b \mu \neq 0$.
2. (a) Montrer que $\dfrac{1}{\int_a^b \mu} \int_a^b \mu f$ est compris entre le maximum et le minimum de f sur $[a;\ b]$.

   (b) En déduire qu'il existe $x_0 \in [a;\ b]$ tel que $\dfrac{1}{\int_a^b \mu} \int_a^b \mu f = f(x_0)$

> Cette dernière expression correspond à la valeur moyenne de f sur $[a;\ b]$ pondérée par la fonction μ. Par exemple si $\mu = 1$, on retrouve la moyenne « habituelle ».

Corrigé de la planche n° 25: Intégration

Exercice 1

Notons $\tilde{f}_{[a;\ b]}$, $\tilde{f}_{[a;\ c]}$ et $\tilde{f}_{[b;\ c]}$ les valeurs moyennes de f sur $[a;\ b]$, $[a;\ c]$ et $[b;\ c]$ respectivement.
Il s'agit de montrer

$$\left(\tilde{f}_{[a;\ c]} \leq \tilde{f}_{[a;\ b]}\right) \qquad \text{ou} \qquad \left(\tilde{f}_{[a;\ c]} \leq \tilde{f}_{[b;\ c]}\right)$$

Pour cela nous allons montrer que la moyenne sur $[a;\ c]$ est en fait comprise entre la moyenne sur $[a;\ b]$ et la moyenne sur $[a;\ c]$, ce qui est bien naturel pour une moyenne, c'est à dire un barycentre... Cela nous permettra ainsi de conclure.
Travaillons sur l'expression de la moyenne sur $[a;\ c]$ en utilisant la relation de Chasles et la définition des moyennes :

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{[a;\ c]} &= \frac{1}{c-a}\int_a^c f \\
&= \frac{1}{c-a}\left(\int_a^b f + \int_b^c f\right) \\
&= \frac{1}{c-a}\left((b-a)\times\tilde{f}_{[a;\ b]} + (c-b)\times\tilde{f}_{[b;\ c]}\right) \\
&= \frac{(b-a)}{(c-a)}\times\tilde{f}_{[a;\ b]} + \frac{(c-b)}{(c-a)}\times\tilde{f}_{[b;\ c]}
\end{aligned}$$

Notons $\alpha = \dfrac{(b-a)}{(c-a)}$ et $\beta = \dfrac{(c-b)}{(c-a)}$.
Par construction, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\alpha + \beta = 1$.
Ainsi, on en déduit que $\tilde{f}_{[a;\ c]}$ est la moyenne de $\tilde{f}_{[a;\ b]}$ et $\tilde{f}_{[b;\ c]}$ affecté des poids respectifs α et β.
Ainsi, ce nombre est bien compris entre $\tilde{f}_{[a;\ b]}$ et $\tilde{f}_{[b;\ c]}$, ce qui permet de conclure !

Exercice 3

On obtient :

$I_1 = 20$	$I_2 = 8$	$I_3 = \sin(b) - \sin(a)$	$I_4 = \ln(5)$	$I_5 = 0$
$I_6 = 1$	$I_7 = \dfrac{68}{3}$	$I_8 = \mathrm{e} - 2 + 2\ln(2)$	$I_9 = \dfrac{5}{6}$	$I_{10} = 5x$

Pour I_8 et I_9, il faut faire une disjonction de cas et exploiter la relation de Chasles.

Exercice 4

On obtient :

$I_1 = 1 - \dfrac{\pi}{4}$	$I_2 = \dfrac{\ln(3)^2}{2}$	$I_3 = \dfrac{\pi}{4}$	$I_4 = \sin(1)$
$I_5 = \dfrac{1}{2}$	$I_6 = \dfrac{1}{3}$	$I_7 = 0$	$I_8 = \dfrac{16}{15}$

Quelques indications :

- Pour I_1, on écrit la relation entre $\tan^2$ et $\cos^2$ puis on exploite le fait que $\dfrac{1}{\cos^2}$ est la dérivée de tan.
- Pour I_8, on peut linéariser en utilisant les complexes. Un peu de calcul montre ainsi que, pour tout x :

$$\sin^5(x) = \frac{1}{16}\sin(5\,x) - \frac{5}{16}\sin(3\,x) + \frac{5}{8}\sin(x)$$

Exercice 5

On obtient :

$$I_1 = \mathrm{e} - 2 \qquad I_2 = \frac{1}{9}\left(2\mathrm{e}^3 + 1\right) \qquad I_3 = \frac{\pi}{3}$$

$$I_4 = \frac{2}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

$$I_5 = \frac{5}{3}\ln(2) - \ln(3)$$

Exercice 6

On obtient :

$$I_1 = \frac{2}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right) \qquad I_2 = 12 - 4\mathrm{e} \qquad I_3 = \frac{5}{48}$$

$$I_4 = \frac{\pi}{2} \qquad I_5 = 2 - \frac{\pi}{2} \qquad I_6 = 4 - 2\sqrt{2} + 9\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{4} - 6\sqrt[6]{2} + 6\ln\left(\frac{\sqrt[6]{2}+1}{\sqrt[3]{2}+1}\right)$$

$$I_7 = \frac{\pi}{6} \qquad I_8 = 2\ln(2) \qquad I_9 = 2\ln(2)^2 - 4\ln(2) + 2$$

$$I_{10} = \frac{\pi}{12}$$

Quelques indications :

- Pour I_1, poser $u = \sqrt{t+1}$.
- Pour I_3, poser $u = (t^2 - 1)$.
- Pour I_2, I_7 et I_8, poser $u = \sqrt{t}$.

Exercice 7

1. f_n est définie par morceaux par des fonctions continues. Il suffit de vérifier qu'il n'y a pas de discontinuité en $\frac{1}{n}$. Or, $\lim\limits_{x \to (1/n)^-} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ donc f_n est bien continue.
2. Un petit calcul ou un raisonnement graphique montre que
$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$
3. On a ainsi $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$
4. Pour tout $0 < x \leq 1$, il existe un entier p tel que $0 < x < \frac{1}{p}$. En particulier, pour tout $n \geq p$, $f_n(x) = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.
5. D'après ce qui précède la fonction f est la fonction nulle. Or, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. On ne peut donc par intervertir la limite et l'intégrale puisque
$$\lim\left(\int_0^1 f_n\right) \neq \int_0^1 (\lim f_n)$$

Exercice 8

1. $\forall (p;\ q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on calcule $I_{p,q}$, par intégration par parties, en posant, pour tout t :
$$\begin{cases} u'(t) &= t^p \\ v(t) &= (1-t)^q \end{cases}$$
Cela donne $\begin{cases} u(t) = \frac{t^{p+1}}{p+1} \\ v't) = -q(1-t)^{q-1} \end{cases}$.

On obtient ainsi :

$$I_{p,q} = \left[\frac{t^{p+1}(1-t)^q}{p+1}\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{q}{p+1}I_{p+1,q-1}$$

2. Par une récurrence immédiate :

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1}I_{p+1,q-1} = \frac{q(q-1)}{(p+1)(p+2)}I_{p+2,q-2} = \cdots = \frac{q(q-1)\cdots 1}{(p+1)\cdots(p+q)}I_{p+q,0}$$

Or, $I_{p+q,0} = \displaystyle\int_0^1 t^{p+q}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p+q+1}$, ce qui donne finalement :

$$I_{p,q} = \frac{q(q-1)\cdots 1}{(p+1)\cdots(p+q)(p+q+1)} = \frac{q!}{\frac{(p+q+1)!}{p!}} = \frac{q!p!}{(p+q+1)!}$$

3. On va calculer $I_{p,q}$ d'une seconde manière, grâce au binôme de Newton et à la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_{p,q} &= \int_0^1 t^p\left(\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(-1)^k t^k\right)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(-1)^k\int_0^1 t^{p+k}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}\frac{(-1)^k}{p+k+1} \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$I_{p,q} = \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}\frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{q!p!}{(p+q+1)!}$$

Exercice 9

On sait que $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en 0. Notons, F cette fonction.
En particulier, $\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}$. On reconnaît donc un taux d'accroissement. Par passage à la limite, cela donne :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = F'(0) = f(0)$$

Exercice 10

Notons que la borne supérieure de f existe et est atteinte sur $[a;\ b]$ puisque la fonction est continue.
Soit ainsi $x_0 \in [a;\ b]$ tel que $f(x_0)$ est le maximum de f. On suppose que $f(x_0) > 0$ (le cas contraire est très simple à traiter puisqu'alors f est nulle).
Soit d'autre part $\alpha \in]0;\ 1[$ quelconque. En raison de la continuité de f, on sait qu'il existe deux nombres $c < d$ tels que :

- pour tout $x \in [c;\ d]$, $f(x) \geq \alpha f(x_0)$;
- $[c;\ d] \subset [a;\ b]$

En raison du signe de f et de la relation de Chasles, on en déduit :

$$\int_a^b f^n \geq \int_c^d f^n \geq (d-c)\alpha^n f(x_0)^n$$

Et ainsi,

$$\left(\int_a^b f^n\right)^{1/n} \geq (d-c)^{1/n}\alpha f(x_0)$$

D'autre part, on a $\int_a^b f^n \leq (b-a)f(x_0)^n$ et donc $\left(\int_a^b f^n\right)^{1/n} \leq (b-a)^{1/n}f(x_0)$.

Finalement, on obtient :

$$(d-c)^{1/n}\alpha f(x_0) \leq \left(\int_a^b f^n\right)^{1/n} \leq (b-a)^{1/n} f(x_0)$$

Or les suites $(b-a)^{1/n}$ et $(d-c)^{1/n}$ tendent toutes les deux vers 1 quand n tend vers l'infini. On en déduit que, pour ce même α, il existe un rang N_α tel que, pour tout $n \geq N_\alpha$:

$$(d-c)^{1/n} \geq \alpha \text{ et } (b-a)^{1/n} \leq \frac{1}{\alpha}$$

En effet, $\alpha < 1$ et $\dfrac{1}{\alpha} > 1$. Ainsi, pour tout $n \geq N_\alpha$:

$$\alpha^2 f(x_0) \leq \left(\int_a^b f^n\right)^{1/n} \leq \frac{1}{\alpha} f(x_0)$$

Résumons-nous ! Nous venons de prouver que pour tout $\alpha \in]0;\ 1[$, il existe un rang N_α tel que, pour tout $n \geq N_\alpha$,

$$\alpha^2 f(x_0) \leq \left(\int_a^b f^n\right)^{1/n} \leq \frac{1}{\alpha} f(x_0)$$

Cela suffit à montrer la convergence de $\left(\int_a^b f^n\right)^{1/n}$ vers $f(x_0)$. Pour nous en convaincre, sortons les ε ! Soit ainsi $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $f(x_0) - \varepsilon$ soit strictement positif.

Il existe alors $\alpha_1 \in]0;\ 1[$ tel que $f(x_0)\alpha_1^2 \geq f(x_0) - \varepsilon$ (il suffit de prendre pour cela $\alpha_1 = \sqrt{\dfrac{f(x_0)-\varepsilon}{f(x_0)}}$ et il existe α_2 tel que $\dfrac{1}{\alpha_2} f(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon$ (il suffit pour cela de prendre $\alpha_2 = \dfrac{f(x_0)}{f(x_0)+\varepsilon}$).

En considérant maintenant $\alpha = \max(\alpha_1;\ \alpha_2)$. α vérifie $\alpha^2 f(x_0) \geq f(x_0) - \varepsilon$ et $\dfrac{1}{\alpha_2} f(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon$.

Pour ce α, d'après ce que nous venons de prouver, il existe un rang N_α tel que pour tout $n \geq N_\alpha$:

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \alpha^2 f(x_0) \leq \left(\int_a^b f^n\right)^{1/n} \leq \frac{1}{\alpha} f(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

Ce qui permet de conclure. On a bien

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b f^n\right)^{1/n} = f(x_0)$$

Exercice 11

Inégalité de Taylor-Lagrange

1. $f^{(n+1)}$ est par hypothèse continue sur $[a;\ b]$ (ou $[b;\ a]$) donc l'image de cet intervalle est un intervalle $[m;\ M]$ avec $m \leq M$. Dit autrement, elle possède un maximum et un minimum et parcourt toutes les valeurs intermédiaires entre ces deux nombres. En particulier, sa valeur absolue, qui est elle aussi continue, atteint son maximum et possède donc une borne supérieure sur ce même intervalle.
2. Par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

   Notons que, pour tout $t \in [a;\ b]$ (ou $[b;\ a]$), on a $\left|\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\right| \leq \frac{|b-t|^n}{n!} M_{n+1}$. Distinguons maintenant deux cas :

- Pour $b \geq a$, on sait que, pour tout $t \in [a;\ b]$, $|b-t|^n = (b-t)^n$ et ainsi :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \int_a^b M_{n+1} \frac{(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = M_{n+1}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

- Pour $b < a$, on sait que, pour tout $t \in [b;\ a]$, $|b-t|^n = (t-b)^n$ et ainsi :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \int_b^a M_{n+1} \frac{(t-b)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = M_{n+1}\frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Dans les deux cas, on obtient l'inégalité recherchée.

3. Pour $n = 0$, cela donne $|f(b) - f(a)| \leq M_1 |b-a|$, ce qui correspond à l'inégalité des accroissements finis.

4. (a) C'est une application directe de l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ avec $a = 0$ et $b = x \geq 0$.

   En effet, on peut facilement prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $t > -1$, $f^{(n)}(t) = \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{(1+t)^n}$.

   Ainsi, pour tout $x \geq 0$, pour tout $t \in [0;\ x]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\left|f^{n+1}\right|$ est majorée par $n!$.

   Finalement, l'inégalité de Taylor Lagrange donne, pour cette fonction, sur $[0;\ x]$:

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{n!}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

   (b) Pour $x = 1$, l'inégalité prouvée précédemment devient :

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

   La suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ tend donc vers $\ln(2)$.

   (c) Très facile ! $\ln(1/2) = -\ln(2)$. On approche donc ce nombre par la suite $(-u_n)$. De même, $\ln(4)$ s'approche par $(2u_n)$.

5. C'est une application de cette même inégalité pour les fonctions sin et cos, sur l'intervalle $[0;x]$ (ou $[x;\ 0]$) sachant que, on peut montrer par récurrence que, pour tout n :

$$\sin^{(n)} = \begin{cases} (-1)^{n/2}\sin \text{ si } n \text{ est pair} \\ (-1)^{(n-1)/2}\cos \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} \qquad \cos^{(n+1)} = \begin{cases} (-1)^{n/2}\cos \text{ si } n \text{ est pair} \\ (-1)^{(n+1)/2}\sin \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Ces égalités permettent d'obtenir le polynôme de Taylor pour les fonctions sin et cos avec $a = 0$ et $b = x$ et elles montrent aussi que $\left|\sin^{(n+1)}\right|$ et $\left|\cos^{(n+1)}\right|$ sont majorées par 1.
On obtient ainsi, pour tout x :

$$\left| \sin(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad \left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Notons $\alpha_n = \frac{|x|^n}{n!}$. Posons $N = \lfloor |x| \rfloor + 1$. Pour tout $n \geq N$, $\alpha_n = \frac{x \times \cdots \times x}{1 \times \cdots \times (N-1)} \times \frac{x \times \cdots \times x}{N \times \cdots \times n} \leq \frac{x^N}{(N-1)!} \times \frac{x}{n}$.
Sachant que α_n est une suite de termes positifs, on peut conclure sur sa limite à l'aide du théorème des Gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$$

Finalement, on a bien :

$$\sin x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{et} \quad \cos x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Exercice 15

1. Ce sont les rectangles à droite de $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ sur $[0;\ 1]$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$$

2. On travaille un peu sur l'expression de u_n en exploitant ce que l'on sait du logarithme. Ainsi, pour tout n :

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln k^k - \ln n^k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$$

Ce sont les rectangles à droite de $x \mapsto x\ln(x)$ sur $[0;\ 1]$ qui est prolongeable par continuité en 0 et continue sur $]0;\ 1]$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{4}$$

Cette intégrale s'obtient par intégrations par parties.

3. Ce sont les rectangles à droite de $x \mapsto \sin(\pi x)$ sur $[0;\ 1]$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}$$

4. Ce sont les rectangles à droite (un peu cachés) de $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$ sur $[0;\ 1]$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

5. Ce sont presque les rectangles à droite de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0;\ 1]$. Il manque en effet le dernier terme de la somme $\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n}$. Comme ce terme tend vers 0, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

6. Cette dernière limite est plus délicate. On utilise l'astuce habituelle de passer au logarithme pour transformer ce produit en somme. Cette opération est autorisée car, pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$.
Ainsi,

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$$

On reconnaît ici que $\ln(u_n)$ est une somme de Riemann des rectangles à droite pour la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ qui est bien définie et continue sur $[0;\ 1]$. Pour intégrer cette fonction, on réalise une intégration par parties. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x &= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(2) - \int_0^1 \left(\frac{2x^2+2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \ln(2) - \int_0^1 2 + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Finalement, la limite de u_n est donc $\mathrm{e}^{\ln(2)/2} = \mathrm{e}^{\ln(2)-2+\frac{\pi}{2}}$ car exponentielle est continue.

Exercice 17

Égalité de la moyenne généralisée

1. Notons que $\mu \geq 0$ ou bien $\mu \leq 0$ sur $[a;\ b]$. Supposons que μ prend des valeurs négatives (l'autre cas se traite de manière similaire).
   On sait qu'il existe $x_0 \in [a;\ b]$ tel que $\mu(x_0) \neq 0$, c'est à dire, dans ce cas, $\mu(x_0) < 0$.
   En raison de la continuité de μ, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x de $[a;\ b] \cap [x_0 - \eta;\ x_0 + \eta]$, on a $\frac{3\mu(x_0)}{2} \leq \mu(x) \leq \frac{\mu(x_0)}{2} < 0$.
   Posons $[a_0;\ b_0]$ les deux nombres tels que $[a_0;\ b_0] = [a;\ b] \cap [x_0 - \eta;\ x_0 + \eta]$. La relation de Chasles donne alors :
   $$\int_a^b \mu = \int_a^{a_0} \mu + \int_{a_0}^{b_0} \mu + \int_{b_0}^{b} \mu$$
   Mais comme μ est négative, on a alors :
   $$\int_a^{a_0} \mu + \int_{b_0}^{b} \mu \leq 0$$
   Et sur $[a_0;\ b_0]$, on sait que $\mu \leq \frac{\mu(x_0)}{2}$. Ainsi :
   $$\int_a^b \mu \leq \int_{a_0}^{b_0} \mu \leq \frac{\mu(x_0)}{2}(b_0 - a_0) < 0$$
   Ainsi, cette intégrale n'est pas nulle !
2. (a) Raisonnons toujours dans le cas où μ est négative. On a alors, en notant m et M le minimum et le maximum de f sur $[a;\ b]$, pour tout x de $[a;\ b]$:
   $$M\mu(x) \leq \mu(x)f(x) \leq m\mu(x)$$
   En intégrant cette inégalité, on en déduit :
   $$M\int_a^b \mu \leq \int_a^b \mu f \leq m\int_a^b \mu$$
   En divisant par $\int_a^b \mu$ qui est strictement négatif, on obtient :
   $$m \leq \frac{1}{\int_a^b \mu}\int_a^b \mu f \leq M$$
   (b) Cette question se traite à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

> Cette dernière expression correspond à la valeur moyenne de f sur $[a;\ b]$ pondérée par la fonction μ. Par exemple si $\mu = 1$, on retrouve la moyenne « habituelle ».

Planche n° 26: Le retour des matrices

Exercice 1

Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (3x-y, -x+y, -2y) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, -2x+3y) \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}_5[X] \\ P & \mapsto & 2X^3P' + P'(X^2) - P(1) \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & 2P + (X-1)P' \end{array}$$

$$f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(-1), P'(0) + P''(1)) \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & AM \end{array}$$

où $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par : $f(x,y) = (-13x+6y, -9x+8y)$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Soient $u = (1,3)$ et $v = (2,1)$. Montrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\mathrm{Mat}_{(u,v)}(f)$.

Exercice 3

On considère l'application φ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = X^2P'' - XP' + P$.

1. Montrer que la restriction de φ à $\mathbb{R}_2[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$.

Exercice 4

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f : (x,y,z) \mapsto (x-z, y, y)$.

1. Déterminer A, la matrice de f dans la base canonique.
2. Calculer A^2, A^3 et A^4. En déduire une formule probable pour A^n, puis la démontrer, par récurrence.
3. En déduire l'expression de f^n.

Exercice 5

Soit p un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $p \circ p = p$. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}(p)$$

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On note Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Montrer que Φ est bijectif. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $\Delta(P) = P + P'$. Déterminer la matrice de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. En déduire que Δ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et résoudre l'équation $\Delta(P) = 1 + X + 2X^2$.

Exercice 7

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

1. Soit $\lambda \in R$. Déterminer, en fonction de λ, le rang de $A - \lambda \mathrm{I}_2$.
2. En déduire qu'il existe deux réels $\lambda_1 < \lambda_2$ pour lesquels $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 \mathrm{I}_2)$ et $\mathrm{Ker}(A - \lambda_2 \mathrm{I}_2)$ ne sont pas réduits à $\left\{\vec{0}_{\mathbb{R}^2}\right\}$.
3. Déterminer les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ relatives à ces deux noyaux.
4. Justifier que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^2$ puis déterminer la matrice de φ dans cette base.

Exercice 8

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Montrer que les applications $f - \mathrm{I}_{\mathbb{R}^2}$ et $f - 2\mathrm{I}_{\mathbb{R}^2}$ ne sont pas injectives.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{B}'$. Déterminer P et P^{-1} et donner l'expression de A en fonction de D, P et P^{-1}.
4. Déterminer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9

1. Montrer que $\mathcal{B} = \big((1,0,0,0),(0,0,1,1),(1,1,1,1),(1,0,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ puis que $\mathcal{C} = \big((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer, de deux façons différentes, les coordonnées du vecteur $u = (1,-2,5,6)$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie pour tout (x,y,z,t) par $f(x,y,z,t) = (x - 2y + 2z + 5t, x - 2y + 3z + 4t, -x + 2z - 3t)$.
   (a) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer, de deux façons différentes, la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Exercice 10

Soit φ l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = (X^2+2)P'' + (X+1)P' + P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Résoudre, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $\varphi(P) = \lambda P$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}_2[X]$.
3. En déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Exercice 11

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *trace* de M et on note $\mathrm{tr}(M)$ la somme des éléments diagonaux de M.

1. Montrer que tr est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. A-t-on $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$?
3. Montrer que pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
4. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors $\mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)))$. On appelle *trace* de f et on note $\mathrm{tr}(f)$ la valeur commune de ces traces matricielles.

Corrigé de la planche n° 26: Le retour des matrices

Exercice 2

Pour f_1 :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Pour f_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour f_3 :
Soit $P[X] = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. Un petit calcul donne

$$\begin{aligned} f(P) &= 2X^3(3a_3X^2 + 2a_2X + a_1) + (3a_3X^4 + 2a_2X^2 + a_1) - (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \\ &= 6a_3X^5 + (4a_2 + 3a_3)X^4 + 2a_1X^3 - a_0 - a_2 - a_3 \end{aligned}$$

La matrice est donc

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour f_4 :

Il faut refaire le calcul. Soit $P[X] = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$. Un petit calcul donne

$$\begin{aligned} f(P) &= 2\sum_{k=0}^{n} a_kX^k + (X-1)\sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2a_kX^k + \sum_{k=1}^{n} ka_kX^k - \sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (2+k)a_kX^k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+2)a_k - (k+1)a_{k+1}\right] X^k + (n+2)a_nX^n \end{aligned}$$

La matrice est donc :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & (n+1) & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & n+2 \end{pmatrix}$$

Pour f_5 :

Soit un polynôme $P[X] = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. On a :

$$P'[X] = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2 \qquad \text{et} \qquad P''[X] = 2a_2 + 6a_3X$$

On en déduit : $P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3$ et $P'(0) = a_1$ et $P''(1) = 2a_2 + 6a_3$. Donc :
$P'(0) + P''(1) = a_1 + 2a_2 + 6a_3$ La matrice de f est donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1. Cette matrice s'écrit :
$$M = \begin{pmatrix} -13 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Il est clair que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Si on est vraiment maniaque, on peut calculer le déterminant de u et v :
$$\det(u;\ v) = -5 \neq 0$$
Ces deux vecteurs libres constituent donc une base de $\mathbb{R}^2$.
Pour obtenir la matrice de f dans cette base, il convient de calculer l'inverse de la matrice de passage :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
Avec un peu de calcul, on obtient $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
Ce qui donne la matrice de f dans la base $(u;\ v)$ grâce à la formule :
$$M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

1. Une analyse des degrés donne $\deg(X^2P'' - XP' + P) \leq \deg(P)$. Ainsi, pour tout n, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.
Montrons maintenant que φ est linéaire. Pour tous polynômes P et Q et pour tous nombres λ et μ :
$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= X^2(\lambda P + \mu Q)'' - X(\lambda P + \mu Q)' + (\lambda P + \mu Q) \\ &= \lambda(X^2P'' - XP' + P) + \mu(X^2Q'' - XQ' + Q) \end{aligned}$$
Ainsi φ est également linéaire. C'est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et en particulier de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soit un polynôme P dont les coordonnées sont $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est à dire que $P(X) = a + bX + cX^2$
On va calculer les coordonnées de $\varphi(P)$ dans la base canonique :
$$\begin{aligned} \varphi(P) &= X^2(2c) - X(2cX + b) + a + bX + cX^2 \\ &= a + cX^2 \end{aligned}$$
Les coordonnées de $\varphi(P)$ sont donc $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$

Ainsi, par identification, on obtient la matrice de φ :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sans plus de précision, on continue de raisonner sur $\mathbb{R}_2[X]$.

   $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathrm{Ker}\varphi$ si et seulement si $\varphi(P) = 0$, ce qui donne $a = c = 0$. Autrement dit le noyau est une droite :

   $$\mathrm{Ker}\varphi = \{bX;\ b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vec}\,(X)$$

   $Q \in \mathrm{Im}\varphi$ si et seulement si il existe un polynôme P tel que $Q = \varphi(P)$. En exploitant la question précédente, on obtient :

   $$\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vec}\left(1;\ X^2\right)$$

Exercice 5

1. Par identification :

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Le calcul des premières puissances nous permet de formuler la conjecture suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -(n-1) & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (C_n)$$

   Bien sûr, C_1, C_2, C_3 et C_4 sont vraies. On suppose que, pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, C_n est vraie. On calcule :

   $$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & -(n-1) & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Cela nous prouve que la conjecture est héréditaire. Comme elle est initialisée, elle est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On en déduit

   $$f^n\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - (n-1)y - z \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On note Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Montrer que Φ est bijectif. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $\Delta(P) = P + P'$. Déterminer la matrice de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. En déduire que Δ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et résoudre l'équation $\Delta(P) = 1 + X + 2X^2$.

Exercice 7

1. On calcule pour tout λ :

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(\lambda-1) \\ \lambda-1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(\lambda-1) \\ 0 & 2-\frac{1}{2}(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$$

   Il faut savoir pour quelles valeurs de λ, l'expression $2-\frac{1}{2}(\lambda-1)^2$ est nulle. Un peu de calcul donne :

$$2-\tfrac{1}{2}(\lambda-1)^2 = \frac{1}{2}(\lambda+1)(3-\lambda)$$

   On en déduit que le rang de $A - \lambda \mathrm{I}_2$ est 2 pour $\lambda = -1$ ou $\lambda = 3$ et le rang de cette même matrice est 3 dans tous les autres cas.

2. Lorsque le rang est strictement inférieur à 2 le noyau de la matrice n'est pas réduit à 0.
   On en déduit $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 3$.

3. Examinons $\mathrm{Ker}(A+\mathrm{I})$. Un vecteur $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est dans ce noyau si et seulement si :

$$\begin{aligned}(A+\mathrm{I}_2)\vec{X} = \vec{0} &\iff A\vec{X} + \vec{X} = \vec{0} \\ &\iff \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y \\ y = y \end{cases}\end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathrm{Ker}(A+\mathrm{I}) = \mathrm{Vec}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et donc une base est $\mathcal{B}_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.
   Par une technique similaire, on obtient $\mathrm{Ker}(A-3\mathrm{I}) = \mathrm{Vec}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et donc $\mathcal{B}_2 = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

4. Les deux vecteurs sont non colinéaires et on est en dimension deux donc $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est bien une base.
   Notons $\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{E}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Comme $\vec{E}_1 \in \mathrm{Ker}(A+\mathrm{I})$, on a $\varphi\left(\vec{E}_1\right) + \vec{E}_1 = \vec{0}$, soit $\varphi\left(\vec{E}_1\right) = -\vec{E}_1$.
   De même, sachant que $\vec{E}_2 \in \mathrm{Ker}(A-3\mathrm{I})$, on a $\varphi\left(\vec{E}_2\right) - 3\vec{E}_2 = \vec{0}$, soit $\varphi\left(\vec{E}_2\right) = 3\vec{E}_2$.
   Ainsi la matrice de φ dans la base $\left(\vec{E}_1;\ \vec{E}_2\right)$ est :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 8

1. On montre que le noyau de $f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ n'est pas réduit à $\vec{0}$.
   Soit $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ce vecteur est dans $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id})$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}(A - I_2)\vec{X} = \vec{0} &\iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y \\ y = y \end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Vec}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ n'est pas réduit à $\vec{0}$.

On montre maintenant que le noyau de $f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ n'est pas réduit à $\vec{0}$.

Soit $\vec{X} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Ce vecteur est dans $\mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{id})$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}(A - 2I_2)\vec{X} = \vec{0} &\iff \begin{cases}-2x + y = 0\\-2x + y = 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x = x\\y = 2x\end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}) = \mathrm{Vec}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$ n'est pas réduit à $\vec{0}$.

2. On cherche deux vecteurs $\vec{b}_1$ et $\vec{b}_2$ tels que $f\left(\vec{b}_1\right) = \vec{b}_1$ et $f\left(\vec{b}_2\right) = \vec{2}b_2$, ce qui donne les conditions :
   - $f\left(\vec{b}_1\right) - \vec{b}_1 = \vec{0}$, soit $\vec{b}_1 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$;
   - $f\left(\vec{b}_2\right) - 2\vec{b}_2 = \vec{0}$, soit $\vec{b}_2 \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})$.

   D'après ce qui précède la base $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$ convient.
3. On a :
$$P = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$$
   Pour calculer P^{-1}, on résout le système $PX = Y$ avec $Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$. Cela donne :
$$\begin{cases}x_1 + x_2 = y_1\\x_1 + 2x_2 = y_2\end{cases} \iff \begin{cases}x_1 + x_2 = y_1\\x_2 = -y_1 + y_2\end{cases} \iff \begin{cases}x_1 = 2y_1 - y_2\\x_2 = -y_1 + y_2\end{cases}$$
   On a donc, par identification :
$$P^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$$
   On sait que $D = P^{-1}AP$, ce qui donne $A = PDP^{-1}$.
4. Pour tout n :
$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}} = PDP^{-1} \times PDP^{-1} \times \cdots \times PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$$
   Or, D^n est facile à calculer car D est diagonale, on obtient $D^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2^n\end{pmatrix}$.

   Ainsi $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2^n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix}-2^n + 2 & 2^n - 1\\-2^{n+1} + 2 & 2^{n+1} - 1\end{pmatrix}$

Exercice 9

1.
2.
3. (a)
   (b)

Exercice 10

1.
2.
3.

Exercice 11

1.
2.
3.
4.