Exercices de TSI 1

2024

Planche n° 1: Pour s'entraîner à la plage

Chercher les quatre premiers exercices pour la rentrée.

Exercice 1

Établir le tableau de signes de ces expressions.

> Il est inutile d'utiliser les techniques de calcul de Δ dont pourrait vous parler votre cousine ou votre oncle. En effet, cela n'est pas officiellement au programme de la STI2D ! Nous verrons cela à la rentrée.

a)
$$-(x-1)(x+2)$$

b)
$$-2x+3$$

c)
$$-2(x+5)^2+3x+15$$

d)
$$(x+2)^2-5$$

e)
$$x^4-x^2$$

f)
$$x^3-3x$$

g)
$$1+\frac{2}{x-4}-\frac{2}{x+4}$$

h)
$$1-\frac{9}{(x-2)^2}$$

i)
$$\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{(x-2)^3}$$

Exercice 2

Résoudre ces équations et inéquations.

a) $2x+4=x+2$

b) $-(x+1)\geq 2x+3$

c) $x^3\geq x$

d) $\dfrac{1}{x}<x$

e) $(x+4)\geq(x+4)^2$

f) $\dfrac{3}{(x-1)^2}\geq 0$

g) $\dfrac{3}{(x-1)^2}\geq 1$

h) $\dfrac{5x}{(x-3)(x+2)}\geq\dfrac{4}{3-x}$

i) $\dfrac{x^2}{x+4}\geq x$

Exercice 3

Résoudre ces équations.

a) $3\mathrm{e}^x+2=5$

b) $\mathrm{e}^x+2=1$

c) $(\mathrm{e}^x)^2+2=4$

d) $\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x=-1$

e) $\mathrm{e}^{2x}=2\mathrm{e}^x$

f) $\mathrm{e}^{x\ln(2)}=1$

g) $\mathrm{e}^{2\ln(x)}=4$

h) $\ln(3x+2)=0$

i) $\ln(x)-\ln(4x)=5$

j) $\ln(x)-\ln(x^4)=5$

k) $\ln(x)-\ln(x^4)+\ln(3)=0$

l) $\mathrm{e}^{\cos(x)}=1$

Exercice 4

Soit la fonction :

$$g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}-\{-1\} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{2x}{x+1}\end{array}$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative et D la droite d'équation $y=4x$

1. Existe-t-il des tangentes à $\mathcal{C}_g$ parallèles à D ? Si oui, combien ?
2. Existe-t-il des tangentes à $\mathcal{C}_g$ qui passent par l'origine du repère ? Si oui, combien ?

Exercice 5

Établir les tableaux de signes des expressions suivantes.

a) $$\frac{6}{x+1} - \frac{5x}{x^2+1}$$

b) $$1 + \frac{21}{4(x-5)} + \frac{1}{4(x+1)}$$

c) $$1 + \frac{1}{6(x-1)} - \frac{7}{3(x+3)}$$

d) $$1 + \frac{154}{75(x-3)} - \frac{44}{75(x+2)}$$

e) $$3x - 3 - \frac{15}{2(x-3)} - \frac{15}{2(x+1)}$$

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

a) $x^2 + 1 = 2x$

b) $x^2 - x = \sqrt{2}(x+1)$

c) $(x+1)(x^2+2x-3) = 0$

d) $x^3 = x$

e) $x^4 = 2x^2$

f) $x^4 = 1$

g) $x^4 + 1 = 0$

h) $\dfrac{1}{x} = 2x + 1$

i) $\dfrac{x-2}{x+2} - \dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{18}{x^2-4}$

j) $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 - \left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2 = 0$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

a) $x^3 - 39x + 70 = 0$

b) $x^3 + 6 = 3x + 2x^2$

c) $x^3 - 2x = x^2 - 2$

d) $x^3 + 2x^2 - x = 2$

e) $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

f) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$

g) $(x^3 - x)^2 - x^2 = 0$

h) $x^2 = \dfrac{2}{x+1}$

Exercice 8

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $6x + 5 < -4x + 3$

b) $3x + 2 \geq 5x - 1$

c) $x^2 < 4x$

d) $(x+5)(x-2) \leq 0$

e) $x(x+2) \leq 2x + 6$

f) $x^3 < x$

g) $x^4 \geq x^2$

h) $(x^2+x+1)^2 - 4(x^2-x+1)^2 > 0$

i) $x^4 + 2x^2 - 3 < 0$

j) $\dfrac{4}{x-1} - \dfrac{3}{x+2} > 0$

k) $\dfrac{x}{2-x} < 1$

l) $\dfrac{4-x}{7+x} \leq -1$

m) $\dfrac{2x+1}{x+1} \geq x$

n) $\dfrac{x-2}{2x-2} < \dfrac{x-1}{x-5}$

o) $\dfrac{x+3}{x-3} - \dfrac{x-3}{x+3} \leq \dfrac{36}{x^2-9}$

Exercice 9

Déterminer l'ensemble de définition, puis calculer la dérivée des fonctions suivantes.

$f_1 : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-1}$ $\qquad f_2 : x \mapsto \ln(x^2-1)$ $\qquad f_3 : x \mapsto \cos(2x) - \sin(3x)$

$f_4 : x \mapsto \exp(x^2-1)$ $\qquad f_5 : x \mapsto \dfrac{\cos^5(x)}{\ln x}$

Exercice 10

On se place dans le plan complexe. Dans les cas suivants, préciser l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie l'équation ou le système d'équations. On pourra s'aider de dessins.

(a) $|z + \mathrm{i}| = 1$

(b) $|z| = |z - 1|$

(c) $\begin{cases} \arg\left(z + \frac{1}{2}\right) & = & \frac{-\pi}{2} \\ |z| & = & 1 \end{cases}$

(d) $|z| = |z - 1| = 1$

Exercice 11

1. Calculer $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
2. En remarquant que $2 \times \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$, calculer la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

a) $\sin(2x) = \sin(x)$

b) $\cos(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos(x) = \sin(3x)$

d) $\sin(x) = -\cos(x)$

e) $\tan(3x - \pi/5) = \tan(x + 4\pi/5)$

f) $\sin(2x)(\sqrt{3} + 2\sin(2x)) = 0$

g) $\cos^2(x) - \frac{3}{2}\cos(x) + \frac{1}{2} = 0$

h) $\cos(2x) + \cos(x) = 0$

i) $\cos(2x) - 3\cos(x) + 2 = 0$

j) $\cos(2x) - \sin(x) = 1$

k) $1 + \sqrt{3}\sin(2x) - \cos(4x) = 0$

l) $\sqrt{3}\tan(x) + 4\sin^2(x) = 0$

m) $\sin(2x) + \sin(6x) = \sin(4x)$

n) $6\cos(2x) - 1 = 6\tan^2(x)$

o) $\cos(x) > \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

p) $\sqrt{3 - 4\cos^2(x)} > 1 + 3\sin(x)$

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous de paramètre réel m :

a) $(m - 1)x + 1 = 0$

b) $2mx - 3 = x + 5m$

c) $x^2 + mx - 2m^2 = 0$

d) $x^4 + 2mx^2 + 1 = 0$

e) $\dfrac{2x + 1}{x + 3} = m$

f) $\dfrac{x - 2m}{mx + 5} = m - 1$

Exercice 14

Déterminer selon les valeurs du réel m le signe des trinômes suivants :

$$A = 2x^2 - mx - m^2 \qquad B = mx^2 + 2(2m + 1)x + 1$$

Exercice 15

Comparer les expressions A et B suivantes :

a)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \qquad B = \sqrt{2} - 1$$

b)

$$A = \sqrt{7} + 3 \qquad B = \sqrt{3} + 4$$

c)

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \qquad B = 2$$

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

a) $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3}$

b) $\sqrt{x^2-3x-3} = x+2$

c) $\sqrt{1-2x} = x+1$

d) $\sqrt{x+1} < \sqrt{3-2x}$

e) $\sqrt{x^2+5x+3} < x+2$

f) $2-x < \sqrt{x+1}$

Exercice 17

On rappelle que la *valeur absolue* d'un réel x est définie par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$ Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a) $|x| = 3$;

(b) $|x| = -2$;

(c) $|x| \leq 3$;

(d) $|x| \geq 3$;

(e) $|x| \geq -2$;

(f) $|x| - 2 \leq 4$;

(g) $|x-2| \leq 4$;

(h) $|x-2| \leq -4$;

(i) $|x^2-4| = 2$;

(j) $|x^2-8x+11| = 4$;

(k) $|x^2-8x+11| < 4$;

(l) $|x+1| = |2x-3|$;

(m) $|1-2x| = x+1$;

(n) $|x^2-3x-3| = x+2$;

(o) $|x^2+5x+3| < x+2$;

(p) $2-x < |x+1|$;

(q) $|x| + |x+1| = 2$;

(r) $|x-7| + |x-2| \leq 3$.

Corrigé de la planche n° 1: Pour s'entraîner à la plage

Exercice 1

On donne directement les formes factorisées et le tableau de signes.

a)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
-1		$-$		$-$		$-$	
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$	
$-(x-1)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b)

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
-2		$-$		$-$	
$\left(x-\frac{3}{2}\right)$		$-$	0	$+$	
$-2\left(x-\frac{3}{2}\right)$		$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		-5		$-\frac{7}{2}$		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$(x+5)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\left(x+\frac{7}{2}\right)$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2(x+5)\left(x+\frac{7}{2}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d)

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{5}$		$-2+\sqrt{5}$		$+\infty$
$\left(x+2+\sqrt{5}\right)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\left(x+2-\sqrt{5}\right)$		$-$		$-$	0	$+$	
$\left(x+2-\sqrt{5}\right)\left(x+2+\sqrt{5}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

e)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$(x-1)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2(x-1)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

f)

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\left(x-\sqrt{3}\right)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\left(x+\sqrt{3}\right)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

g)

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$(x-4)(x+4)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2}{(x-4)(x+4)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

h)

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$(x-5)(x+1)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

i) Pour faire le tableau de signes, on remarque que $(x-2)^3$ est de même signe que $(x-2)$. De manière générale, $(x-2)^n$ est du signe de $(x-2)$ quand n est un nombre entier impair.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$(x-3)(x-1)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)^3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^3}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Exercice 2

a) On obtient l'unique solution $x = 2$.
b) On obtient l'intervalle $x \in \left]-\infty;\ \frac{-4}{3}\right]$.
c) On obtient l'union d'intervalles $x \in [-1;\ 0] \cup [1;\ +\infty[$.
d) On obtient l'union d'intervalles $x \in]-1;\ 0[\cup]1;\ +\infty[$.
e) On obtient l'union d'intervalles $x \in]-\infty;\ -4] \cup [-3;\ +\infty[$.
f) On obtient l'union d'intervalles $x \in]-\infty;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$, ce qui s'écrit aussi $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
g) On obtient l'union d'intervalles $x \in \left[1-\sqrt{3};\ 1\right[\cup \left]1;\ 1+\sqrt{3}\right]$.
h) On obtient $x \in \left]-2;\ \frac{-8}{9}\right] \cup]3;\ +\infty[$.
i) On obtient $x \in]-4;\ 0]$.

Exercice 3

a) Pour tout x, $3e^x + 2 = 5 \iff e^x = 1$. On obtient l'unique solution $x = 0$.
b) Pour tout x, $e^x + 2 = 1 \iff e^x = -1$. Il n'y a pas de solution.
c) Pour tout x, $\left(e^x\right)^2 + 2 = 4 \iff e^{2x} = 2 \iff 2x = \ln(2)$. On obtient l'unique solution $x = \dfrac{\ln(2)}{2}$.
d) Pour tout x, $e^{2x} + e^x = -1$ est impossible car exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives. Il n'y a pas de solution.
e) Pour tout x, $e^{2x} = 2e^x \iff e^x\left(e^x - 2\right) = 0$. Or exponentielle ne s'annule pas. On a donc une unique solution $x = \ln(2)$.
f) On obtient l'unique solution $x = 0$.
g) On a pour tout x, $e^{2\ln(x)} = 4 \iff 2\ln(x) = \ln\left(2^2\right) \iff x = 2$.
h) L'expression est valide pour tout $3x + 2 > 0$. On raisonne donc pour $x > \frac{-2}{3}$:
On a $\ln(3x+2) = 0 \iff 3x + 2 = 1 \iff x = \frac{-1}{3}$.

i) Pour tout $x > 0$, on a $\ln(x) - \ln(4x) = 5 \iff \ln\left(\frac{x}{4x}\right) = 5 \iff -\ln(4) = 5$, ce qui est faux. Il n'y a donc pas de solutions.

j) Pour tout $x > 0$, $\ln(x) - \ln(x^4) = 5 \iff \ln(x) - 4\ln(x) = 5 \iff \ln(x) = \frac{-5}{3}$.
L'unique solution est donc $x = \mathrm{e}^{-5/3}$.

k) Pour tout $x > 0$, $\ln(x) - \ln(x^4) + \ln(3) = 0 \iff -3\ln(x) = -\ln(3)$.
L'unique solution est donc $x = \mathrm{e}^{\ln(3)/3} = \sqrt[3]{3}$.

l) Pour tout x, $\mathrm{e}^{\cos(x)} = 1 \iff \cos(x) = 0 \iff x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 4

1. On rappelle que deux droites affines sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.
   Il s'agit donc de savoir si l'une des tangentes a pour coefficient directeur 4.
   Mais nous savons que, pour tout nombre $a \neq -1$, le coefficient directeur du point d'abscisse a est $g'(a)$. Un petit calcul donne $g'(a) = \frac{2}{(a+1)^2}$. Il s'agit donc de résoudre, pour tout $a \neq -1$:

$$\begin{aligned} g'(a) = 4 &\iff \frac{2}{(a+1)^2} = 4 \\ &\iff \frac{2 - 4(a+1)^2}{(a+1)^2} = 0 \\ &\iff 4\left(\frac{\frac{1}{2} - (a+1)^2}{(a+1)^2}\right) = 0 \\ &\iff \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - (a+1)\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + (a+1)\right) = 0 \qquad \iff a = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } a = a = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

   Il y a donc deux tangentes qui conviennent. Ce sont celles relatives aux deux abscisses trouvées plus haut.

2. On rappelle que pour un point d'abscisse $a \neq -1$, l'équation de la tangente est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$. L'ordonnée à l'origine de la tangente est donc $f(a) - af'(a)$.
   Il s'agit donc de savoir si cette ordonnée à l'origine peut éventuellement être nulle. On va donc résoudre, pour tout $a \neq -1$:

$$\begin{aligned} f(a) - af'(a) = 0 &\iff \frac{2a}{a+1} - \frac{2a}{(a+1)^2} = 0 \\ &\iff \frac{2a(a+1) - 2a}{(a+1)^2} = 0 \\ &\iff \frac{2a^2}{(a+1)^2} = 0 \end{aligned}$$

   On obtient ainsi l'unique tangente correspondant à l'abscisse nulle.

Exercice 6

Voici les solutions de ces équations :

a) $\{1\}$

b) $\left\{\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{6\sqrt{2}+3}}{2};\ \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{6\sqrt{2}+3}}{2}\right\}$

c) $\{-1;\ 1;\ -3\}$

d) $\{0;\ -1;\ 1\}$

e) $\left\{0;\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2}\right\}$

f) $\{1;\ -1\}$

g) $\varnothing$

h) $\left\{\dfrac{1}{2};\ -1\right\}$

i) $\left\{-\dfrac{9}{4}\right\}$

j) $\{0\}$

Exercice 7

Voici les solutions de ces équations :

a) $\{2;\ 5;\ -7\}$

b) $\{2;\ -\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$

c) $\{1; -\sqrt{2};\ \sqrt{2}\}$

d) $\{1;\ -1;\ -2\}$

e) $\{1\}$

f) $\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3};\ -1;\ 1\}$

g) $\{0;\ -\sqrt{2};\ \sqrt{2}\}$

h) $\{1\}$

Exercice 8

Voici les solutions de ces inéquations :

(a) $\left]-\infty;\ -\dfrac{1}{5}\right[$;

(b) $\left]-\infty;\ \dfrac{3}{2}\right]$;

(c) $]0;\ 4[$;

(d) $[-5;\ 2]$;

(e) $]-\sqrt{6};\ \sqrt{6}]$;

(f) $]-\infty;\ -1[\cup]0;\ 1[$;

(g) $]-\infty;\ -1[\cup\{0\}\cup[1;\ +\infty[$;

(h) $\left]\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$;

(i) $]-1;\ 1[$;

(j) $]-11;\ -2[\cup]1;\ +\infty[$;

(k) $]-\infty;\ 1[\cup]2;\ +\infty[$;

(l) $]-\infty;\ -7[$;

(m) $]-\infty;\ -1]\cup\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$;

(n) $\left]-\infty;\ \dfrac{-\sqrt{41}-3}{2}\right[\cup\left]1;\ \dfrac{\sqrt{41}-3}{2}\right[\cup]5;\ +\infty[$;

(o) $]-\infty;\ -3[$.

Exercice 11

1. On utilise les formules usuelles. On obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\qquad \text{et}\qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

2. On sait, à partir des formules de duplication que :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\qquad \text{et}\qquad \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}$$

Or, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ sont positifs car $\frac{\pi}{8}\in\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$. On obtient donc, après calcul :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\qquad \text{et}\qquad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice 12

On donne les mesures principales des solutions, toutes définies à un multiple entier de 2π près.

a) $\left\{0;\ \pi;\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right\}$

b) $\left[\frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6}\right]$

c) $\left\{\frac{-7\pi}{8};\ \frac{-3\pi}{8};\ \frac{\pi}{8};\ \frac{5\pi}{8};\ \frac{-3\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right\}$

d) $\left\{\frac{-\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right\}$

e) $\left\{\frac{-\pi}{2};\ 0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi\right\}$

f) $\left\{\frac{-\pi}{2};\ 0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}\right\}$

g) $\left\{0;\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right\}$

h) $\left\{\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{\pi}{3};\ \pi\right\}$

i) $\left\{0;\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right\}$

j) $\left\{\frac{-5\pi}{6};\ \frac{-\pi}{6};\ 0;\ \pi\right\}$

k) $\left\{\frac{-\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{-\pi}{2};\ \frac{-\pi}{2};\ \pi\right\}$

l) $\left\{\frac{-\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ 0;\ \pi\right\}$

m) $\left\{\frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{-5\pi}{6};\ \frac{\pi}{6};\ \frac{-3\pi}{4};\ \frac{-\pi}{2};\ \frac{-\pi}{4};\ 0;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4};\ \pi\right\}$

n) $\left\{\frac{-5\pi}{6};\ \frac{\pi}{6};\ \frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right\}$

o) $\left[\frac{-11\pi}{12};\ \frac{\pi}{12}\right]$

p) $\left[\frac{-5\pi}{6};\ \frac{-\pi}{6}\right]$

Exercice 16

a) On obtient $\{4\}$.

b) On obtient $\{-1\}$.

c) On obtient $\{0\}$.

d) On obtient $\left]-1;\ \frac{2}{3}\right[$.

e) On obtient $\left]\frac{-5+\sqrt{13}}{2};\ 1\right[$.

f) On obtient $\left]\frac{-5+\sqrt{13}}{2};\ +\infty\right[$.

Planche n° 2: Logique

Exercice 1

Soient P, Q et R trois propositions. À l'aide de tables de vérités, montrer les équivalences des propositions suivantes :

a) $(P \vee Q) \Longrightarrow R$ et $(P \Longrightarrow R) \wedge (Q \Longrightarrow R)$

b) $(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R) \wedge (R \Longrightarrow P)$ et $(P \Longleftrightarrow Q) \wedge (Q \Longleftrightarrow R)$

Exercice 2

Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux puis écrire la négation de ceux qui sont faux.

(a) $1 + 1 = 2$ et $5 + 2 = 6$

(b) $1 + 1 = 2$ ou $5 + 2 = 6$

(c) $1 + 1 = 2 \Longrightarrow 5 + 2 = 6$

(d) $5 + 2 = 6 \Longrightarrow 1 + 1 = 2$

(e) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2$

(f) $\exists x \in \mathbb{R}, x \neq 2$

(g) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

(h) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1$

(i) $\exists y \in]0, +\infty[, \ln y = 1$

(j) $\exists! z \in \mathbb{R}, \cos z = 0$

(k) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$

(l) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \geq -x^2$

(m) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \geq -x^2$

(n) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \geq -x^2$

(o) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \geq -x^2$

Exercice 3

Soit x un réel. Dans chacun des cas suivants, écrire le lien logique entre les deux propriétés (sens de l'implication ou équivalence).

a) $x^2 = 1$ et $x = 1$;

b) $x \geq 1$ et $x \geq 2$;

c) $x \leq 1$ et $x = 1$;

d) $x > 1$ et $x = 1$;

e) $x + 3 \geq 4$ et $x \geq 1$;

f) $x^3 = 2x^2$ et $x = 2$;

g) $x \leq -2$ et $x^2 \geq 4$;

h) $x \geq 2$ et $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$;

i) $x \leq -1$ et $\dfrac{1}{x} \geq -1$;

j) $x \geq 3$ et $x^2 \geq 3x$;

k) $x \geq -3$ et $x^2 \geq -3x$.

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, comprendre le sens des deux phrases proposées et déterminer leur valeur de vérité.

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, n \leq N$.
   (b) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, n \leq N$.

2. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)$.
   (b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$.

Exercice 5

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Écrire en langage formel les propositions suivantes :

(a) A et B ne sont pas disjointes.

(b) Il y a un et un seul élément commun à A et B.

(c) A n'est pas incluse dans B.

(d) A et B sont complémentaires.

Exercice 6

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer les propositions suivantes :

(a) $(A^c)^c = A$.

(b) $A \subset B \Longrightarrow B^c \subset A^c$.

(c) $A \cap B^c = A \cap C^c \Longleftrightarrow A \cap B = A \cap C$.

(d) $((A \cap B) \subset (C \cap B)) \wedge ((A \cup B) \subset (C \cup B)) \Longrightarrow (A \subset C)$.

(e) $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A$.

Exercice 7

Soient x et y deux nombres réels. Montrer :

(a) $x + y \geq 1 \Longrightarrow ((x \geq 1/2)$ ou $(y \geq 1/2))$.

(b) $x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow ((x = 0)$ et $(y = 0))$.

Indication: On pourra raisonner par contraposée. Les propositions réciproques sont-elles vraies ?

Exercice 8

Montrer qu'un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair. Quelle proposition peut-on en déduire concernant les nombre impairs ?

Exercice 9

Le commissaire Maigret dispose des trois faits suivants :

- Si Jean n'a pas rencontré Pierre l'autre jour, c'est que Pierre est le meurtrier ou Jean est un menteur.
- Si Pierre n'est pas le meurtrier alors Jean n'a pas rencontré Pierre l'autre jour et le crime a eu lieu après minuit.
- Si le crime a eu lieu après-minuit alors Pierre est le meurtrier ou Jean n'est pas un menteur.

Va-t-il arrêter Pierre ?

Exercice 10

Parmi toutes les propositions suivantes, regrouper par paquets celles qui sont équivalentes :

(P1) Tu auras du charisme si tu vas chez le coiffeur.

(P2) Pour avoir du charisme, il faut aller chez le coiffeur.

(P3) Si tu ne vas pas chez le coiffeur, tu n'auras pas de charisme.

(P4) Il est nécessaire d'aller chez le coiffeur pour avoir du charisme.

(P5) Pour avoir du charisme, il suffit d'aller chez le coiffeur.

(P6) Ne pas aller chez le coiffeur entraîne une absence de charisme.

(P7) Si tu n'as de charisme, c'est que tu n'as été chez le coiffeur.

(P8) Aller chez le coiffeur implique charisme.

(P9) On ne peut avoir du charisme qu'en allant chez le coiffeur.

(P10) Je n'ai pas de charisme ou je vais chez le coiffeur.

(P11) Je ne vais pas chez le coiffeur ou j'ai du charisme.

Exercice 11

On dit qu'un ensemble d'opérateurs logiques est universel lorsqu'il permet de reconstituer tous les autres opérateurs logiques. En pratique, il suffit de vérifier que l'on peut reconstituer les trois opérateurs logiques NON, OU et ET pour montrer qu'un opérateur est universel.

Démontrer que les deux opérateurs suivants forment un ensemble universel :

- l'opérateur NAND, défini par A NAND B = NON(A ET B) ;
- l'opérateur NOR, défini par A NOR B = NON(A OU B).

Corrigé de la planche n° 2: Logique

Exercice 1

a) Comme suggéré on fait la table de vérité :

P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \Longrightarrow R$	$P \Longrightarrow R$	$Q \Longrightarrow R$	$(P \Longrightarrow R) \wedge (Q \Longrightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

Les colonnes 5 et 8 sont identiques, ce qui prouve l'équivalence des deux opérations logiques.

b) Faisons de même la table de vérité :

P	Q	R	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow R$	$R \Longrightarrow P$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R) \wedge (R \Longrightarrow P)$	$(P \iff Q) \wedge (Q \iff R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F	F
F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	V	V

Les deux dernières colonnes sont identiques, ce qui permet de conclure.

Exercice 2

(a) C'est faux. Le contraire est « $1+1 \neq 2$ ou $5+2 \neq 6$ ».

(b) C'est vrai.

(c) C'est faux. Le contraire est « $1+1=2$ et $5+2 \neq 6$ ».
On rappelle que le contraire de "$A \Longrightarrow B$" est "$A \wedge (\neg B)$".

(d) C'est vrai.

(e) C'est faux. Le contraire est « $\exists x \in \mathbb{R}/\ x = 2$ ».

(f) C'est vrai.

(g) C'est vrai.

(h) C'est faux. Le contraire est « $\exists x \in \mathbb{R}/\ \mathrm{e}^x < 1$ ».

(i) C'est vrai.

(j) C'est faux. Le contraire est « il n'existe aucun ou bien un nombre strictement supérieur à un de nombres z tels que $\cos(z) = 0$ ».

(k) C'est faux. Le contraire est « $\exists n \in \mathbb{N}/\ \forall k \in \mathbb{N},\ n \neq 2k$ »

(l) C'est faux. Le contraire est « $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}/\ y < -x^2$ »

(m) C'est vrai (il suffit de prendre $y = 0$).

(n) C'est faux. Le contraire est « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}/\ y < -x^2$ »

(o) C'est vrai.

Exercice 3

a) $x^2 = 1 \Longleftarrow x = 1$.

b) $x \geq 1 \Longleftarrow x \geq 2$.

c) $x \leq 1 \Longleftarrow x = 1$;

d) Aucun lien.

e) $x + 3 \geq 4 \iff x \geq 1$;

f) $x^3 = 2x^2 \Longleftarrow x = 2$;
Le réciproque est fausse ($x = 0$ est aussi solution de la première équation).

g) $x \leq -2 \Longrightarrow x^2 \geq 4$;
Le réciproque est fausse ($x = 3$ est aussi solution de la seconde inéquation).

h) $x \geq 2 \Longrightarrow \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$;
Le réciproque est fausse ($x = -1$ est aussi solution de la seconde inéquation).

i) $x \leq -1 \Longrightarrow \dfrac{1}{x} \geq -1$;
Le réciproque est fausse ($x = 1$ est aussi solution de la seconde inéquation).

j) $x \geq 3 \Longrightarrow x^2 \geq 3x$;
Le réciproque est fausse ($x = -1$ est aussi solution de la seconde inéquation).

k) Aucun lien. En effet, les solution de la seconde inéquation sont $]-\infty;\ -3] \cup [0;\ +\infty[$

Exercice 4

1. (a) Pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel N qui lui est supérieur. Vrai, prendre $N = n$
   (b) Il existe un entier naturel qui est inférieur ou égal à tous les autres naturels. Vrai, prendre 0.
2. (a) Pour tout nombre x, il existe un réel y qui est l'image de x. C'est vrai par définition de f.
   (b) Il existe un nombre y qui est l'image de tous les nombres x. C'est faux car on ne suppose pas que f est constante.

Exercice 5

(a)
$$\exists x \in E / x \in A \wedge x \in B$$

(b)
$$\exists! x \in E / x \in A \wedge x \in B$$

(c)
$$\exists x \in A / x \notin B$$

(d)
$$\forall x \in E, (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

Exercice 6

(a) Soit $x \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in (A^c)^c &\iff \neg(\neg(x \in A)) \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

Donc $A = (A^c)^c$.

(b) On suppose $A \subset B$. On veut montrer $B^c \subset A^c$. Considérons $x \in B^c$. Faisons une disjonction de cas :
(Cas n° 1) Si $x \in A$, alors $x \in B$ puisque $A \subset B$, ce qui est absurde puisque $x \in B^c$.

(Cas n° 2) Si $x \notin A$, alors $x \in A^c$.

Ainsi, forcément, $x \in A^c$.

(c) Il y a une double implication à montrer. Commençons par prouver le sens direct.

On suppose ainsi $A \cap B^c = A \cap C^c$. On veut montrer que $A \cap B = A \cap C$. En théorie, il faut donc montrer la double inclusion. On considère ainsi $x \in A \cap B$, c'est à dire $x \in A$ et $x \in B$. Faisons là encore une disjonction de cas :

(Cas n° 1) Si $x \in C$, alors $x \in A \cap C$.

(Cas n° 2) Si $x \notin C$, alors $x \in A \cap C^c$. Or, $A \cap B^c = A \cap C^c$ donc cela entraîne que $x \in B^c$, ce qui est absurde puisque $x \in B$.

Ainsi, forcément, $x \in C$ donc $x \in A \cap C$.

On a donc prouvé que $A \cap B \subset A \cap C$. Or B et C jouent dans cet énoncé des rôles interchangeables. On peut donc invoquer un argument de symétrie. En particulier la démonstration de $A \cap C \subset A \cap B$ est tout à fait identique. On donc prouvé le sens direct de la proposition.

Attaquons-nous maintenant à la réciproque. Supposons $A \cap B = A \cap C$ et cherchons à prouver $A \cap B^c = A \cap C^c$. En remarquant que $B = (B^c)^c$ et $C = (C^c)^c$, on peut appliquer le sens direct de la proposition. Ainsi, partant de $A \cap B = A \cap C$, on a $A \cap (B^c)^c = A \cap (C^c)^c$. En exploitant le sens direct de la proposition, que l'on a montré précédemment, on en déduit $A \cap B^c = A \cap C^c$, ce qui permet de conclure !

(d) On suppose $((A \cap B) \subset (C \cap B)) \wedge ((A \cup B) \subset (C \cup B))$ et on veut prouver $(A \subset C)$.

Pour cela considérons $x \in A$. Faisons une disjonction de cas sur son appartenance à B.

(Cas n° 1) Si $x \in B$, alors $x \in A \cap B$ donc $x \in B \cap C$ puisque $(A \cap B) \subset (C \cap B)$. On obtient bien $x \in C$.

(Cas n° 2) Si $x \notin B$, alors on sait, au pire, que $x \in A \cup B$. Or, $(A \cup B) \subset (C \cup B)$ donc cela entraîne que $x \in C$ ou $x \in B$. Comme $x \notin B$, on en déduit que nécessairement $x \in C$.

Dans les deux cas, partant de $x \in A$, on aboutit à $x \in C$ donc $A \subset C$.

(e) On va montrer la double inclusion.

Soit $x \in (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$. On a alors $x \in A \cap B^c$ ou $x \in A \cap B$. Dans les deux cas, on obtient $x \in A$. On en déduit que $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) \subset A$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in A$. Faisons une disjonction de cas sur l'appartenance de x à B.

(Cas n° 1) Si $x \in B$, alors $x \in A \cap B$ donc $x \in (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$.

(Cas n° 2) Si $x \notin B$, alors $x \in A \cap B^c$, donc $x \in (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$.

Dans les deux cas, $x \in (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$, ce qui permet de conclure.

> Une erreur largement constatée consiste à faire des tables de vérité sur les ensembles. C'est abusif ! Si l'on veut relier proprement ensemble et logique, il faut obligatoirement passer par la condition d'appartenance, ce qui nécessite une rédaction très rigoureuse. Je propose plus bas une telle rédaction.

Alternative au corrigé de l'exercice 8.c :

Soit $x \in E$, on pose les prédicats suivants :

$P_A(x) :\ x \in A$;
$P_B(x) :\ x \in B$.
$P_C(x) :\ x \in C$.

$x \in A \cap B$ se dit $P_A(x) \wedge P_B(x)$. De même, $x \in A \cap B^c$ se dit $P_A(x) \wedge (\neg P_B(x))$
Ainsi, $A \cap B = A \cap C$ se dit « $\forall x \in E,\ (P_A(x) \wedge P_B(x)) \iff (P_A(x) \wedge P_C(x))$ ».
Finalement, on veut donc prouver que l'énoncé suivant est une tautologie :

$$\forall x \in E,$$
$$[(P_A(x) \wedge P_B(x)) \iff (P_A(x) \wedge P_C(x))] \iff [(P_A(x) \wedge (\neg P_B(x))) \iff (P_A(x) \wedge (\neg P_C(x)))]$$

On peut alors faire une table de vérité pour arriver au résultat :

P_A	P_B	P_C	$P_A \wedge P_B$	$P_A \wedge P_C$	$P_A \wedge (\neg P_B)$	$P_A \wedge (\neg P_C)$	$(P_A \wedge P_B) \iff (P_A \wedge P_C)$	$(P_A \wedge (\neg P_B)) \iff (P_A \wedge (\neg P_C))$
V	V	V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V	V

On constate que les deux dernières colonnes sont identiques. L'équivalence est bien prouvée !

Alternative au corrigé de l'exercice 8.e :

On a

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup (A \cap B^c) &= A \cap \left(B \cup B^C\right)\\ &= A \cap E \text{ car } B \text{ et } B^c \text{ sont complémentaires.}\\ &= A \text{ car } A \subset E\end{aligned}$$

Exercice 7

(a) On exploite l'indication. La contraposée s'écrit :

$$x < \frac{1}{2} \wedge y < \frac{1}{2} \Longrightarrow x + y < 1$$

Cette phrase est vraie car on peut sommer membre à membre deux inéqalités.

La réciproque est fausse. Considérer pour cela $x = 3$ et $y = -4$.

(b) La contraposée s'écrit

$$(x \neq 0) \vee (y \neq 0) \Longrightarrow x^2 + y^2 \neq 0$$

Elle est vraie. En effet, $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$ donc il suffit que x ou y soit non nul pour que $x^2 + y^2$ soit strictement positif, donc non nul.

La réciproque est aussi vraie.

Exercice 9

Notons

P « Pierre est le meurtrier »

R « Jean et Pierre se sont rencontrés »

M « Le crime a eu lieu après-minuit »

J « Jean est un menteur »

Supposons que P n'est pas vrai. Alors on a $\neg R$ et M d'après la seconde assertion.
On en déduit d'une part P ou J d'après la première assertion et d'autre part P ou $\neg J$ d'après la troisième assertion. Or J et $\neg J$ sont incompatibles. Donc on a forcément P, ce qui est absurde.

Examinons maintenant l'hypothèse ou P est vrai. Cette hypothèse n'entraîne aucune contradiction dans les faits dont dispose Maigret. Ainsi, Pierre est le meurtrier.

Exercice 10

Notons C le prédicat « tu as du charisme » et H le prédicat « tu vas chez le coiffeur »
On traduit les propositions :

(P1) $H \Longrightarrow C$

(P2) $C \Longrightarrow H$

(P3) $\neg H \Longrightarrow \neg C$

(P4) $C \Longrightarrow H$

(P5) $H \implies C$

(P6) $\neg H \implies \neg C$

(P7) $\neg C \implies \neg H$

(P8) $H \implies C$

(P9) $C \implies H$

(P10) $C \implies H$

(P11) $H \implies C$

On regroupe ainsi P_1, P_5, P_7, P_8, P_{11} qui sont toutes équivalentes à $H \implies C$, en tenant compte des éventuelles contraposées.
Et on regroupe P_2, P_3, P_4, P_6, P_9, P_{10} qui sont toutes équivalentes à $C \implies H$.

Exercice 11

On va montrer que l'on peut fabriquer la négation. Considérons un prédicat A. On a :
$A \text{ NAND } A \iff \neg(A \wedge A) \iff \neg A$. Ainsi, on obtient assez simplement la négation.
Maintenant, à partir de la négation, et de deux prédicats A et B on obtient $\neg(A \text{ NAND } B) \iff A \wedge B$, c'est à dire le « et » logique. De la même manière, à partir de « NOR » et de la négation, on obtient le « ou » logique, ce qui achève la démonstration.

Planche n° 3: Géométrie du plan

Les exercices 1 à 5 sont maintenant à la limite du programme. Ils présentent cependant un intérêt pour se préparer au contenu du second semestre. Pour résoudre ces exercices, il faut se souvenir de la définition des coordonnées d'un point, d'un vecteur.

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère quelconque $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et le point $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

1. Justifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de A dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère quelconque $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et le point $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

1. Justifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. On cherche à déterminer les valeurs de x et y telles que $x\vec{u}+y\vec{v}=\overrightarrow{OA}$
   (a) Montrer que pour tout x et y, $x\vec{u}+y\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.
   (b) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont-ils colinéaires ?
   (c) Conclure quant au nombre de solutions $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de ce problème.
3. On cherche à résoudre le système
$$\begin{cases} x+2y &= 2\\ 2x+4y &= 3\end{cases}$$
   Montrer que ce système est équivalent au problème posé à la question précédente puis le résoudre.

Exercice 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le point $\Omega(-1,1)$ et les vecteurs $\vec{u}(1,2)$ et $\vec{v}(3,-2)$.

1. Montrer que $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ est un repère. Est-il orthonormal ? direct ?
2. On note $\vec{a}$ le vecteur de coordonnées $(2,2)$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$. Déterminer les coordonnées de $\vec{a}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
3. On note A le point de coordonnées $(1,2)$ dans $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$. Déterminer les coordonnées de A dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
4. On note $\vec{b}$ le vecteur de coordonnées $(2,2)$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer les coordonnées de $\vec{b}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.
5. On note B le point de coordonnées $(2,-3)$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer les coordonnées de B dans $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$.

Exercice 4

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $\vec{u}_\theta$ et $\vec{v}_\theta$ les vecteurs de coordonnées respectives $(\cos\theta, \sin\theta)$ et $(-\sin\theta, \cos\theta)$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Montrer que $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ est une base orthonormale directe du plan.
2. Soit M un point. On note (x,y) ses coordonnées dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et (x_θ, y_θ) ses coordonnées dans $(O,\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta)$. .
   (a) Exprimer x et y en fonction de x_θ et y_θ.
   (b) Exprimer x_θ et y_θ en fonction de x et y .

Exercice 5

On munit le plan d'un repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère les points $A(1,3)$, $B(3,2)$, $C(2,2)$, $D(1,1)$, $E(-1,1)$ et $F(1,0)$. Déterminer les produits scalaires et les déterminants suivants :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE},\quad \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{DE}),\quad \det(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BE}),\quad \det(\overrightarrow{BE}-7\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}),\quad \det(2\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC},\overrightarrow{EF}).$$

Exercice 6

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
Soient les points $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC issue du point C.
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[BC]$.
3. Déterminer une équation paramétrique de la médiane issue de C.

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne ainsi qu'une représentation paramétrique de la droite considérée :

1. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par le point $A(4,3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u_1}(1,1)$.
2. $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par le point $B(5,7)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u_2}(2,3)$.
3. $\mathcal{D}_3$ est la droite passant par le point $C(0,3)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n_3}(2,2)$.
4. $\mathcal{D}_4$ est la droite passant par le point $D(-2,-1)$ et orthogonale au vecteur $\vec{n_4}(-1,3)$.
5. $\mathcal{D}_5$ est la droite passant par les points de coordonnées $E(-4,1)$ et $F(0,2)$.

Exercice 8

Dans les cas suivants déterminer les intersections de D_1 et D_2 si elles existent.

a) D_1 passe par le point $A_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et est dirigée par le vecteur $\vec{d_1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ tandis que D_2 passe par le point $A_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et est dirigée par le vecteur $\vec{d_2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

b) D_1 passe par le point $A_1\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}$ et est dirigée par le vecteur $\vec{d_1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ tandis que D_2 a pour équation cartésienne $2y+3x=-1$.

c) D_1 a pour équation cartésienne $y=-x+5$ tandis que D_2 a pour équation cartésienne $2y+2x=3$.

d) D_1 a pour équation cartésienne $x-y=-1$ tandis que D_2 a pour équation paramétrique
$$\begin{cases} x = -3+2t \\ y = -2+2t \end{cases}\ ;\ t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 9

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1,1)$, $B(2,3)$ et $C(4,0)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC, puis donner une équation de ce cercle.
3. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.
4. Déterminer les coordonnées du centre de gravité G de ABC.
5. Montrer que Ω, H et G sont alignés.

Exercice 10

Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique des cercles suivants :

1. le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $\Omega(1,3)$ et de rayon 5 ;
2. le cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre $[A,B]$ avec $A(2,5)$ et $B(-1,1)$;
3. le cercle circonscrit au triangle ABC où $A(0,0)$, $B(2,1)$ et $C(2,3)$.

Exercice 11

Déterminer le centre et le rayon des cercles d'équation cartésienne

1. $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$.
2. $2x^2 + 2y^2 - 12x + 16y = -48$.
3. $2x^2 + 2y^2 - 12x + 16y = -52$.
4. $x^2 + y^2 + a(3a - 4x) + b(b + 2y) = 0$.

Exercice 12

Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A(1,0)$ et de rayon 2 et $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $x - y - 1 = 0$. Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, ainsi qu'une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en ces points.

Exercice 13

Déterminer une équation des droites passant par $A(2,1)$ et tangentes au cercle de centre $B(1,-1)$ et de rayon 1.

Exercice 14

1. Soient A, B, C et D quatre points. Montrer la relation d'Euler :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$
2. Soit ABC un triangle non aplati. Déduire de la relation d'Euler que les trois hauteurs de ABC sont concourantes.

Exercice 15

On considère un hexagone régulier $ABCDEF$ de côté 1.

1. Faire un dessin.
2. Calculer les produits scalaires

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}$$
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} \qquad \overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BE} \qquad \overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{AD}$$

Exercice 16

Dans les cas suivants, déterminer l'angle $(\vec{u};\ \vec{v})$ (on se place dans un repère orthonormé direct).

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

e) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

f) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

g) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$

h) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

i) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Exercice 17

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère le point $M(-1,1)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de M sur

1. $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $3x-2y+1=0$;
2. $\mathcal{D}_2$ la droite passant par le point $A(-1,2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u_1}(1,1)$;
3. $\mathcal{D}_3$ la droite passant par le point $B(3,4)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}(2,2)$;
4. $\mathcal{D}_4$ la droite passant par les points de coordonnées $C(-4,1)$ et $D(0,2)$.

Exercice 18

le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal. Décrire les lieux suivants, et les représenter :

$$\mathcal{L}_1=\left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{P}/\ |y|=x\right\}\qquad \mathcal{L}_2=\left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{P}/\ |x|=|y|\right\}$$

$$\mathcal{L}_3=\left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{P}/\ |x-y|=1\right\}\qquad \mathcal{L}_4=\left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{P}/\ |x-y|\leq 1\right\}$$

$$\mathcal{L}_5=\left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{P}/\ x^2+y^2\leq 4\right\}\qquad \mathcal{L}_6=\left\{M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathcal{P}/\ y=\sqrt{x^2-1}\text{ et }x\in[-1;\ 1]\right\}$$

Quel lieu décrit cette équation paramétrique ?

$$(\mathcal{L}_7)\ \begin{cases}x=1+t^2\\y=1+2t^2\end{cases}\qquad\text{avec } t\in\mathbb{R}$$

Corrigé de la planche n^o 3: Géométrie du plan

Exercice 1

1. Par le critère de colinéarité, $1 \times 2 \neq 2 \times (-1)$.
2. On cherche $(x;\ y)$ tels que $\overrightarrow{OA} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\right)$, cela conduit au système :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

   On obtient après résolution

$$\begin{cases} x = \dfrac{7}{4} \\ y = \dfrac{-1}{4} \end{cases}$$

Exercice 3

1. Le critère de colinéarité permet de prouver que $(\vec{u};\ \vec{v})$ forment une base.
   Cette base n'est pas orthogonale car $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 \neq 0$. De plus, elle n'est pas normée car $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$.
   On vérifie enfin le signe de $\sin(\vec{u};\ \vec{v})$ en examinant le déterminant

$$[\vec{u};\ \vec{v}] = -8$$

   Ainsi, l'angle est indirect car $\sin(\vec{u};\ \vec{v}) < 0$.
   $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère quelconque.
2. On sait que $\vec{a} = 2\vec{u} + 2\vec{v}$. On en déduit en coordonnées dans $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$\vec{a} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. On sait que $\overrightarrow{\Omega A} = \vec{u} + 2\vec{v}$. On obtient donc les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega A}$ dans $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$$\overrightarrow{\Omega A} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   Connaissant les coordonnées de Ω dans $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\right)$, on en déduit celles de A :

$$A \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Ici, c'est plus compliqué, il s'agit de trouver les nombres x et y tels que

$$\vec{b} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

   En coordonnées dans $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, cela donne un système :

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

   On obtient, après résolution :

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

5. On cherche x et y tels que
$$\overrightarrow{\Omega B} = x\vec{u} + y\vec{v}$$
En coordonnées dans $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, on a
$$\overrightarrow{\Omega B}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$$
En coordonnées dans $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, on veut donc résoudre le système :
$$\begin{cases}x+3y=3\\2x-2y=-4\end{cases}$$
On obtient, après résolution :
$$\begin{cases}x=\frac{-3}{4}\\y=\frac{5}{4}\end{cases}$$

Exercice 4

1. On calcule $\|\vec{u}_\theta\| = \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = 1$. De même, on a $\|\vec{v}_\theta\| = 1$.
Ces vecteurs sont orthogonaux car $\vec{u}_\theta\cdot\vec{v}_\theta = -\cos\theta\sin\theta+\cos\theta\sin\theta = 0$.
Enfin, l'angle $(u_\theta;\ v_\theta)$ est nécessairement $\frac{\pi}{2}$ car leur déterminant vaut $[u_\theta;\ v_\theta] = \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1 > 0$.
2. (a) Par construction, on a $\overrightarrow{OM} = x_\theta\vec{u}_\theta + y_\theta\vec{v}_\theta$. Cela donne, en coordonnées dans $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$:
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x_\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix} + y_\theta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$$
On obtient ainsi :
$$\begin{cases}x=x_\theta\cos\theta-y_\theta\sin\theta\\y=x_\theta\sin\theta+y_\theta\cos\theta\end{cases}$$
(b) Il s'agit de résoudre le système précédent où x_θ et y_θ sont maintenant les inconnues :
$$\begin{cases}x=x_\theta\cos\theta-y_\theta\sin\theta & (L_1)\\y=x_\theta\sin\theta+y_\theta\cos\theta & (L_2)\end{cases}$$
On raisonne par opérations sur les lignes en exploitant la formule $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$:
   - $\cos\theta\times L_1+\sin\theta\times L_2$ donne $x_\theta = x\cos\theta+y\sin\theta$
   - $-\sin\theta\times L_1+\cos\theta\times L_2$ donne $y_\theta = -x\sin\theta+y\cos\theta$

Finalement, on a :
$$\begin{cases}x_\theta = x\cos\theta+y\sin\theta\\y_\theta=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases}$$

Exercice 5

On obtient $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE} = -4$.
En utilisant la distributivité, on obtient, $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{DE}) = -9$.
Après calcul, on a $\det(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BE}) = -5$.
On utilise la linéarité, et les propriétés du déterminant, pour calculer $\det(\overrightarrow{BE}-7\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}) = 5$.
Enfin, on calcule également $\det(2\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC},\overrightarrow{EF}) = -5$.

Exercice 6

1. La hauteur issue du point C passe par C et a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$. Ainsi, un vecteur directeur de cette droite est $\vec{d}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.
   On obtient donc aisément une équation paramétrique :
   $$\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$
   Une équation cartésienne est donnée par le critère d'orthogonalité. Ainsi $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient à cette droite si et seulement si
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 &\iff 2(x+1) + (y+2) = 0 \\ &\iff 2x + y = -4 \end{aligned}$$
2. Déterminons les coordonnées du milieu de $[BC]$ noté I, $I\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Un vecteur normal de la médiatrice est $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$ qui est colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. On en déduit l'équation cartésienne grâce au critère d'orthogonalité :
   $$(x-1) + y = 0 \iff x + y = 1$$
3. La médiane issue de C passe par C et par le milieu de $[AB]$ noté K. On calcule $K\begin{pmatrix}2\\3/2\end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de cette droite est donc $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}-3\\-7/2\end{pmatrix}$ qui colinéaire à $\vec{d'}\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$. On en déduit une équation paramétrique de la médiane issue de C :
   $$\begin{cases} x = -1 + 6\lambda \\ y = -2 + 7\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 7

1. Une équation paramétrique est :
   $$\begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$
   Une équation cartésienne est :
   $$(y-3) = (x-4) \iff x - y = 1$$
2. Une équation paramétrique est :
   $$\begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = 7 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$
   Une équation cartésienne est :
   $$2(y-7) = 3(x-5) \iff 3x - 2y = 1$$
3. Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{d_3}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ qui est colinéaire à $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Un équation paramétrique est donc :
   $$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Une équation cartésienne est donnée par la critère d'orthogonalité :

$$x + (y - 3) = 0 \iff x + y = 3$$

4. Même démarche ! On obtient une équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Puis une équation cartésienne :

$$-(x + 2) + 3(y + 1) = 0 \iff x - 3y = 1$$

5. Cette droite passe par F et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$. Une équation paramétrique est donc :

$$\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 8

a) On commence par déterminer les équations cartésiennes de D_1 et D_2 grâce aux critères de colinéarité. On en déduit ensuite que les coordonnées d'une intersection de ces deux droites vérifie le système :

$$\begin{cases} 2(x - 1) = y + 1 \\ x - 3 = y - 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x = y + 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 2y + 2 - y = 3 \\ x = y + 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

L'unique intersection a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

b) Même démarche, on obtient une unique intersection de coordonnées $\begin{pmatrix}1/5\\-4/5\end{pmatrix}$.

c) Ici, il faut résoudre directement le système :

$$\begin{cases} y = -x + 5 \\ 2y + 2x = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} y + x = 5 \\ 2y + 2x = 3 \end{cases}$$

Par lecture du système, on constate que les deux droites ont des vecteurs normaux colinéaires : $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$. Les deux droites sont donc parallèles.

Or, elles ne sont pas confondues puisque les deux lignes du système ne sont pas équivalentes ! Ainsi, ces deux droites sont parallèles et distinctes. On en déduit que le système ne possède pas de solutions.

d) Ici, on constate qu'un vecteur normal de D_1 noté $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal à un vecteur directeur de D_2 noté $\vec{d}_2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ car $\vec{n}_1 \cdot \vec{d}_2 = 2 - 2 = 0$. Ces deux droites sont donc parallèles.

De plus, le point $A\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ qui est sur D_2 appartient aussi à D_1 car $-3 - (-2) = -1$.

Ainsi, les deux droites sont confondues. Leur intersection est D_1 elle-même.

Exercice 9

Cet exercice est particulièrement lourd en terme de calculs. On ne donne ici que des éléments de correction ainsi que les solutions.

1. Le critère de colinéarité appliqué aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ nous montre que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Par suite, les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Il s'agit de déterminer les équations cartésiennes des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ puis de déterminer l'intersection de ces deux droites. Or ces deux droites passent par les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ et ont pour vecteurs normaux $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
On obtient le système
$$\begin{cases} 2x + 4y = 11 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$
Dont la solution correspond aux coordonnées de $\Omega \begin{pmatrix} 39/14 \\ 19/14 \end{pmatrix}$, le centre du cercle circonscrit.
Le rayon du cercle vaut $R = \Omega A = \dfrac{5\sqrt{26}}{14}$.
L'équation cartésienne de ce cercle est donc :
$$\left(x - \frac{39}{14}\right)^2 + \left(y - \frac{19}{14}\right)^2 = \frac{325}{98}$$
3. On doit déterminer les équations des hauteurs issues de B et C par exemple puis déterminer l'intersection de ces deux droites. Après calcul, cela revient à résoudre le système :
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$
On obtient les coordonnées de $H \begin{pmatrix} 10/7 \\ 9/7 \end{pmatrix}$.
4. On doit déterminer les équations des médianes issues de B et C puis déterminer l'intersection de ces deux droites. Cela revient à résoudre le système :
$$\begin{cases} 4x + 5y = 16 \\ 5x + y = 13 \end{cases}$$
On obtient ainsi $G \begin{pmatrix} 7/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$.
5. On calcule les coordonnées de vecteurs $\overrightarrow{G\Omega} \begin{pmatrix} 19/42 \\ 1/42 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} -19/21 \\ -1/21 \end{pmatrix}$. Il est clair que ces deux vecteurs sont colinéaires. Plus précisément, on a
$$-2\overrightarrow{G\Omega} = \overrightarrow{GH}$$

Exercice 10

1. Équation cartésienne :
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$$
Représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 1 + 5\cos(\theta) \\ y = 3 + 5\sin(\theta) \end{cases} \quad , \theta \in]-\pi;\ \pi]$$

2. On calcule $AB = 5$. Le rayon est donc de $\dfrac{5}{2}$.

   Le milieu de $[AB]$, qui est le centre du cercle, est $m[AB]\begin{pmatrix}1/2\\3\end{pmatrix}$.

   De tout cela, on déduit une équation cartésienne :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{25}{4}$$

   Et une représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\cos(\theta)\\x=3+\frac{5}{2}\sin(\theta)\end{cases},\ \theta\in]-\pi;\ \pi]$$

3. On calcule les équations de deux médiatrices (par exemple celles de $[AB]$ et de $[BC]$) en précisant pour chacune de ces droites un vecteur normal (le vecteur formé par les points du segment) et un point (le milieu du segment).
   Les coordonnées du centre du cercle vérifient ainsi le système :

$$\begin{cases}2x+y=\frac{5}{2}\text{ (médiatrice de }[AB])\\y=2\text{ (médiatrice de }[BC])\end{cases}$$

   Après résolution, on en déduit que le centre du cercle circonscrit, noté K, a comme coordonnées $K\begin{pmatrix}1/4\\2\end{pmatrix}$. On calcule enfin le rayon $AK=\dfrac{\sqrt{65}}{4}$.
   Une équation cartésienne de ce cercle est donc :

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+(y-2)^2=\frac{65}{16}$$

   Et une représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{65}}{4}\cos(\theta)\\x=2+\frac{\sqrt{65}}{4}\sin(\theta)\end{cases},\ \theta\in]-\pi;\ \pi]$$

Exercice 11

On utilise à chaque fois les formes canoniques pour retrouver, par identification, les coordonnées du centre ainsi que le rayon. On obtient

1. Centre : $\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$, rayon 3.
2. Centre : $\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$, rayon 1.
3. Ce n'est pas un cercle car l'équation est, après calcul, équivalente à :

$$(x-3)^2+(y+4)^2=-1$$

4. Centre : $\begin{pmatrix}2a\\-b\end{pmatrix}$, rayon $|a|$.

Exercice 12

Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $(x-1)^2+y^2=4$.

Un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est à l'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$ lorsque :

$$\begin{aligned}\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4\\x-y=1\end{cases} &\iff \begin{cases}({\color{blue}y+1}-1)^2+y^2=4\\x={\color{blue}y+1}\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}2y^2=4\\x=y+1\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}y=\sqrt{2}\\x=\sqrt{2}+1\end{cases} \quad\text{ou}\quad \begin{cases}y=-\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2}+1\end{cases}\end{aligned}$$

La droite coupe donc le cercle en deux points $M_1\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $M_2\begin{pmatrix}-\sqrt{2}+1\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$

Ici on a fait une substitution sur x (en bleu) pour résoudre le système.

Pour trouver les équations de tangente, il faut se rappeler que la tangente en M_1 passe par M_1 et est orthogonale à $\overrightarrow{AM_1}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

On en déduit que $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de cette tangente en M_1. On obtient donc une équation cartésienne de cette tangente en M_1, notée T_1, par le critère d'orthogonalité :

$$1\times\left(x-\sqrt{2}-1\right)+1\times\left(y-\sqrt{2}\right)=0 \iff x+y=2\sqrt{2}+1 \qquad (T_1)$$

De même, on calcule une équation de la tangente en M_2 notée T_2 par le même genre de raisonnement :

$$1\times\left(x+\sqrt{2}-1\right)+1\times\left(y+\sqrt{2}\right)=0 \iff x+y=-2\sqrt{2}+1 \qquad (T_2)$$

Exercice 13

Un point M du cercle est sur l'une de ces deux droites si et seulement si le rayon $[BM]$ est orthogonal à (AM).

Les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de M vérifient donc à la fois l'équation du cercle et la relation $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$, ce qui donne le système :

$$\begin{aligned}\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2=1^2\\(x-2)(x-1)+(y-1)(y+1)=0\end{cases} &\iff \begin{cases}x^2+y^2-2x+2y=-1\\x^2+y^2-3x=-1\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x+2y=0\\x^2+y^2-3x=-1\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x=-2y\\5y^2+6y+1=0\end{cases}\end{aligned}$$

On résout cette dernière équation, on obtient deux racines -1 et $-\dfrac{1}{5}$. Ainsi les points $M_1\begin{pmatrix}2/5\\-1/5\end{pmatrix}$ et $M_2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ sont les deux points d'intersection de ces deux tangentes avec le cercle.

Notons D_1 et D_2 ces droites. Elles ont pour vecteurs normaux $\overrightarrow{BM_1}\begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM_2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. En outre, elles passent toutes les deux par le point A.

On en déduit leurs équations cartésiennes respectives $-3(x-2)+4(y-1)=0 \iff -3x+4y=-2 \quad (D_1)$ et $x-2=0 \iff x=2 \quad (D_2)$.

Exercice 14

1. Utilisons la relation de Chasles à bon escient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\vec{0}=0\end{aligned}$$

2. Notons H l'intersection de la hauteur issue de A et de la hauteur issue de B.
   Écrivons alors la relation d'Euler pour les quatre points A, B, C et H :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

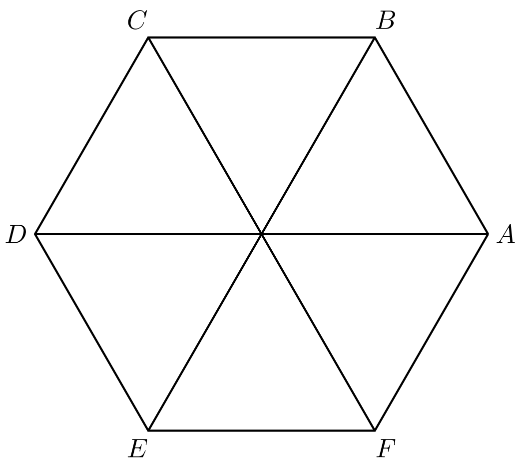
   Or, on sait que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HB}=0$ car H est sur la hauteur issue de B et $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ car H est sur la hauteur issue de A.
   On en déduit :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=0$$

   Ce qui prouve que H est sur la hauteur issue de C.

Exercice 15

1.



2. On exploite le fait que les triangles formés ci-dessus sont tous équilatéraux ainsi que la relation de Chasles.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{3}{2}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=3$ $\quad$ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=0$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{2}$ $\quad$ $\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{BE}=-2$ $\quad$ $\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{AD}=2$

Exercice 16

Par définition, pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tous non nuls, on a :

$$\begin{cases}\cos(\vec{u};\ \vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|}\\ \sin(\vec{u};\ \vec{v})=\frac{\det(\vec{u};\ \vec{v})}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|}\end{cases}$$

À partir de ces deux relations, on détermine les sinus et cosinus de l'angle $(\vec{u};\ \vec{v})$, ce qui permet de retrouver sa valeur, en utilisant éventuellement les fonctions trigonométriques réciproques.

a) π

b) π

c) $\frac{-3\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{2}$

e) $\frac{\pi}{3}$

f) $-\arctan(3)+\pi$

g) $\frac{-5\pi}{6}$

h) $\arctan\left(\frac{1}{3}\right)+\pi$

i) $-\arctan\left(\frac{3}{4}\right)$

Exercice 17

On note $M'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ le projeté de M.

1. M' vérifie :
   - $M'\in D_1$;
   - $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à D_1 ;

   Ces deux conditions donnent un système :

   $$\begin{cases}3x-2y=-1\\2x+3y=1\end{cases}$$

   Après résolution, on obtient :

   $$\begin{cases}x=\frac{-1}{13}\\y=\frac{5}{13}\end{cases}$$

2. M' vérifie :
   - $\overrightarrow{AM'}$ est colinéaire à $\vec{u}_1$;
   - $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$;

   Ces deux conditions donnent un système :

   $$\begin{cases}x-y=-3\\x+y=0\end{cases}$$

   Après résolution, on obtient :

   $$\begin{cases}x=\frac{-3}{2}\\y=\frac{3}{2}\end{cases}$$

3. M' vérifie :
   - $\overrightarrow{BM'}$ est orthogonal à $\vec{n}$;
   - $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{n}$;

Ces deux conditions donnent un système :

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

Après résolution, on obtient :

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

4. M' vérifie :
   - $\overrightarrow{CM'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CD}$;
   - $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CD}$.

   Ces deux conditions donnent un système :

$$\begin{cases} x - 4y = -8 \\ 4x + y = -3 \end{cases}$$

   Après résolution, on obtient :

$$\begin{cases} x = \frac{-20}{17} \\ y = \frac{29}{17} \end{cases}$$

Planche n° 4: Applications et dénombrement

Exercice 1

Soit E et F deux ensembles et $u : E \to F$ une application.

A et B sont deux sous-ensembles de E non vides.
C et D sont deux sous-ensembles de F non vides.

Montrer les assertions suivantes :
a) $u(A \cup B) = (u(A) \bigcup u(B))$.
b) $u(A \cap B) \subset (u(A) \bigcap u(B))$.
c) $u^{-1}\langle C \cap D \rangle = \left(u^{-1} < C > \bigcap u^{-1} < D >\right)$.
d) $u^{-1}\langle C \cup D \rangle = \left(u^{-1} < C > \bigcup u^{-1} < D >\right)$.
e) $u^{-1}\langle F \backslash C \rangle = \left(E \backslash u^{-1} < C >\right)$.

Exercice 2

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.
a) Montrer que f est injective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
b) Montrer que f est surjective si et seulement si il existe une application $h : F \to E$ telle que $f \circ h = \mathrm{id}_F$.

Exercice 3

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application.
a) Montrer que f est injective si et seulement si pour toutes applications g et h de E vers lui-même, on a :
$$f \circ g = f \circ h \iff g = h$$
b) Montrer que f est surjective si et seulement si pour toutes applications g et h de E vers lui-même, on a :
$$g \circ f = h \circ f \iff g = h$$

Exercice 4

Soient f et g les fonctions réelles à valeurs réelles définies par $f(x) = x + 1$ et $g(x) = \dfrac{x^2 + x}{x}$. Les fonctions f et g sont-elles égales ?

Exercice 5

1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array} \right.$. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Mêmes questions pour l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{array} \right.$
3. Déterminer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 6

(Démonstration d'un théorème du cours)
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Montrer que f est bijective et que g est la réciproque de f.

Exercice 7

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective sur E. Montrer que f est injective sur E.
   L'application g est-elle nécessairement injective ?
2. On suppose que $g \circ f$ est surjective de E sur G. Montrer que g est surjective de F sur G.
   L'application f est-elle nécessairement surjective ?
3. Soit $h : G \longrightarrow H$ une application.
   Montrer que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g et h sont bijectives.
4. Soit $\varphi : E \longrightarrow E$ une application telle que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_E$ (on dit que φ est *involutive*).
   Montrer que φ est bijective. Que vaut sa réciproque φ^{-1} ?

Exercice 8

Soient $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} n-1 & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$.

Montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Peut-on en déduire que l'application g est la réciproque de f ?

Exercice 9

1. Déterminer l'image directe par la fonction sinus de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $[0, 2\pi]$,$[0, \pi/2]$, $[-\pi, \pi/2]$.
2. Déterminer l'image réciproque par la fonction sinus de $[-1, 1]$, $[0, 1]$,$[3, 4]$, $\mathbb{R}$, $\{1\}$, $\{-1, 1\}$.

Exercice 10

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2 - 4x + 1 \end{array} \right.$.

1. La fonction f est-elle injective sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que f est injective sur $[1, +\infty[$. En déduire que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur son image (que l'on précisera) et déterminer son application réciproque.
3. Déterminer $f([0, 1])$, $f(\mathbb{R}_-)$, $f(\mathbb{R}_+)$, $f([-2, 2])$, $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}([0, 1])$, $f^{-1}([-2, 1])$.

Exercice 11

Dans un sac contenant n billes numérotées, on prélève k billes (avec $k \leq n$) simultanément.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages possibles :
   (a) contenant la bille 1 ;
   (b) ne contenant pas la bille n° 1.
3. Quel résultat retrouve-t-on ?

Exercice 12

Soient A, B et C trois ensembles finis. Montrer que l'on a

$$\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C) - \mathrm{Card}(B \cap C) + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C).$$

Application. Dans un lycée, il y a 800 élèves. 300 sont des garçons, 352 font partie d'une association, 424 étudient l'anglais, 188 garçons font partie d'une association, 166 garçons étudient l'anglais, 208 font partie d'une association et étudient l'anglais, 144 garçons étudient l'anglais et font partie d'une association. Combien y a-t-il de filles qui ne font pas partie d'une association et n'étudient pas l'anglais ?

Exercice 13

Une course oppose 12 hommes d'affaire.

- Déterminer le nombre de tiercés possibles (l'ordre est important).
- Déterminer le nombre de trios possibles (l'ordre n'est pas pris en compte).

Exercice 14

On colore les faces d'un cube en rouge puis on découpe ce cube en 27 petits cubes de même taille que l'on place dans un sac.

1. Faire l'inventaire des petits cubes selon le nombre de faces colorées.
2. On tire avec remise 3 petits cubes. Déterminer le nombre de tirages donnant :
   (a) exactement 3 cubes ayant chacun deux faces rouges ;
   (b) exactement 2 cubes ayant chacun deux faces rouges ;
   (c) exactement 1 cube possédant deux faces rouges ;
   (d) un nombre total de faces rouges égal à quatre.

Exercice 15

Soit E l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun 1.

1. Déterminer le cardinal de E.
2. Déterminer le cardinal de E_1, la partie de E constituée des nombres ayant 7 chiffres différents.
3. Déterminer le cardinal de E_2, la partie de E constituée des nombres pairs.
4. Déterminer le cardinal de E_3, la partie de E constituée des nombres dont la suite des chiffres (dans l'ordre où ils sont écrits) est strictement croissante.

Exercice 16

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

1. sans imposer de contraintes sur les cartes ?
2. contenant 5 cœurs ou 5 trèfles ?
3. contenant 2 cœurs et 3 trèfles ?
4. contenant au moins un as ?
5. contenant au plus un as ?
6. contenant 2 as et 3 cœurs ?

Exercice 17

On souhaite ranger sur une étagère 13 livres distincts comprenant 4 livres de mathématiques , 6 livres de physique et 3 de SI. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement

1. si les livres doivent être groupés par matières ?
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés ?

Exercice 18

Déterminer le nombre d'anagrammes des mots « maths », « rire » et « ananas ».

Exercice 19

Combien y a-t-il de façons de ranger dans n tiroirs

a) p couteaux distincts deux à deux ?

b) p couteaux identiques ?

Exercice 20

Vous êtes 26 élèves dans la classe. Je parie que deux d'entre vous (au moins) ont la même date d'anniversaire. Quelles sont mes chances d'avoir raison ?

Exercice 21

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Déterminer le nombre de parties de E de cardinal pair (proposer une conjecture et la démontrer par récurrence).

Exercice 22

Soit E un ensemble fini. Calculer $\displaystyle\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(A)$.

Exercice 23

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On note $S(n,p)$ le nombre de surjection d'un ensemble de cardinal n dans un ensemble de cardinal p.

1. Calculer $S(n,p)$ pour $p > n$, $S(n,n)$, $S(n,1)$, $S(n,2)$.
2. Calculer $S(n+1,n)$.
3. Démontrer que pour tout $n > 1$ et tout $p > 1$, on a $S(n,p) = pS(n-1,p) + S(n-1,p-1)$.
4. Proposer un algorithme en `Python` pour calculer $S(n,p)$.

Exercice 24

Écrire en `Python` les fonctions suivantes :

- `factorielle` qui prend pour argument un entier n et qui renvoie $n!$;
- `arrange` qui prend pour argument deux entiers n et p et qui renvoie le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments ;
- `combin` qui prend pour argument deux entiers n et p et qui renvoie le nombre de sous-ensembles à p éléments dans un ensemble à n éléments.
  Indication: Tester cette fonction avec $n = 1000$ et $p = 999$. Si elle est bien codée, elle ne doit pas renvoyer d'erreur de capacité !

Corrigé de la planche n° 4: Applications et dénombrement

Exercice 1

a) Montrons la double inclusion.

Soit $y \in u(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tel que $u(x) = y$.
On sait que $x \in A$ ou $x \in B$. On en déduit que $u(x) \in u(A)$ ou $u(x) \in u(B)$, ce qui prouve $y \in u(A) \cup u(B)$ et ainsi $u(A \cup B) \subset u(A) \cup u(B)$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in u(A) \cup u(B)$. De deux choses l'une :
- soit $y \in u(A)$ et donc il existe $x \in A$ tel que $u(x) = y$;
- soit $y \in u(B)$ et donc il existe $x \in B$ tel que $u(x) = y$.

Or, dans les deux cas, $x \in A \cup B$, ce qui prouve $y \in u(A \cup B)$ et ainsi $u(A \cup B) \supset u(A) \cup u(B)$.

b) Le cas où $A \cap B = \varnothing$ est trivial. On se place donc dans le cas contraire.

Soit $y \in u(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $u(x) = y$. En particulier $x \in A$ et $x \in B$, ce qui donne $u(x) \in u(A)$ et $u(x) \in u(B)$ et ainsi $y \in u(A) \cap u(B)$, ce qui permet de conclure : on a bien prouvé $u(A \cap B) \subset u(A) \cap u(B)$.

c) Montrons l'inclusion directe.

Si $C \cap D = \varnothing$, on a $u^{-1}\langle C \cap D\rangle = \varnothing \subset u^{-1} < C > \cap u^{-1} < D >$.

On se place dans le cas contraire. Soit $x \in u^{-1}\langle C \cap D\rangle$. On sait que $u(x) \in C \cap D$ donc $u(x) \in C$ et $u(x) \in D$, ce qui prouve que $x \in u^{-1} < C > \cap u^{-1} < D >$ et permet de conclure quant à l'inclusion directe.

Montrons l'inclusion réciproque.

Si $u^{-1} < C > \cap u^{-1} < D >= \varnothing$, cet ensemble est bien inclus dans $u^{-1}\langle C \cap D\rangle$.

On se place dans le cas contraire. Soit $x \in u^{-1} < C > \cap u^{-1} < D >$. On sait que $x \in u^{-1} < C >$ donc $u(x) \in C$ et, de même, $x \in u^{-1} < D >$ donc $u(x) \in D$. On en déduit que $u(x) \in C \cap D$ et ainsi $x \in u^{-1}\langle C \cap D\rangle$. Cela permet de conclure : on a bien $u^{-1}\langle C \cap D\rangle \supset u^{-1} < C > \cap u^{-1} < D >$.

d) Les cas où $u^{-1}\langle C \cup D\rangle = \varnothing$ ou $u^{-1} < C > \cup u^{-1} < D >= \varnothing$ doivent être discutés séparément mais ils ne posent pas vraiment de problème. On se placera donc dans le cas contraire.

Montrons l'inclusion directe. Soit $x \in u^{-1}\langle C \cup D\rangle$. On a $u(x) \in C \cup D$ donc $u(x) \in C$ ou $u(x) \in D$, ce qui donne $x \in u^{-1} < C >$ ou $x \in u^{-1} < D >$ et ainsi $x \in u^{-1} < C > \cup u^{-1} < D >$. L'inclusion directe est prouvée.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in u^{-1} < C > \cup u^{-1} < D >$. On sait que $x \in u^{-1} < C >$ ou $x \in u^{-1} < D >$. Dans le premier cas $u(x) \in C$ et dans le second $u(x) \in D$. On en déduit que $u(x) \in C \cup D$, ce qui prouve $x \in u^{-1}\langle C \cup D\rangle$. L'inclusion réciproque est prouvée.

e) Les cas où $u^{-1}\langle F\backslash C\rangle = \varnothing$ ou $E\backslash u^{-1} < C >= \varnothing$ ne posent pas trop de problème. On se place donc dans le cas contraire.

Montrons l'inclusion directe. Soit $x \in u^{-1}\langle F\backslash C\rangle$. On sait que $u(x) \notin C$ donc $x \notin u^{-1} < C >$, ce qui donne $x \in E\backslash u^{-1} < C >$ et prouve l'inclusion directe.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in E\backslash u^{-1} < C >$. On sait que $x \notin u^{-1} < C >$ et ainsi $u(x) \notin C$. En particulier $u(x) \in F\backslash C$ et ainsi $x \in u^{-1}\langle F\backslash C\rangle$. On a prouvé l'inclusion réciproque.

Exercice 2

a) Montrons le sens direct. Pour ce faire, on va supposer f injective et fabriquer de toute pièce l'application g.

Pour tout $y \in F$, on distingue deux cas :
- Si y possède un antécédent x par f, cet antécédent est unique et on pose alors $g(y) = x$.
- Si y ne possède d'antécédent par f, on pose $g(y) = a$ où a est un élément quelconque de E.

Ainsi, pour tout x de E, $f(x)$ possède pour unique antécédent par f qui est x et, par suite, $g \circ f(x) = x$, ce qui prouve $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Montrons maintenant le sens réciproque. Si une telle application g existe g et si u et v sont deux éléments de E tels que $f(u) = f(v)$. Alors $g \circ f(u) = g \circ f(v)$, ce qui donne $u = v$ et prouve que f est injective.

b) Montrons le sens direct en fabriquant l'application h. Pour tout y de F, on pose $h(y) = x$ o ù x est un antécédent (choisi au hasard) de y par f. On sait qu'un tel antécédent existe car f est surjective. En particulier, on en déduit, par construction, que $f \circ h = \mathrm{id}_F$.

Montrons le sens réciproque. Si une telle application h existe, pour tout y de F, on a $f \circ h(y) = y$. En particulier y possède au moins un antécédent par f qui est $h(y)$, ce qui prouve que f est surjective.

Exercice 3

On va supposer que E contient plus d'un élément. En effet, dans le cas contraire, toute application de E vers lui-même est l'identité et les énoncés deviennent triviaux.

a) Notons dores et déjà que « $g = h$ entraîne $f \circ g = f \circ h$ » est une tautologie.

Montrons le sens direct et supposons que f est injective. D'après l'exercice précédent, il existe une application $t : E \to E$ telle que $t \circ f = \mathrm{id}_E$. Donc si on a $f \circ g = f \circ h$ alors on a $t \circ f \circ g = t \circ f \circ h$, c'est à dire $g = h$.

Montrons le sens réciproque et supposons que, pour toutes applications g et h, on a :

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h$$

En particulier, pour tous éléments u et v de E, en considérant les applications g et h constantes respectivement égales à u et v, on a :

$$f(u) = f(v) \implies u = v$$

En effet, $f \circ g$ et $f \circ h$ sont des applications constantes respectivement égales à $f(u)$ et $f(v)$.

Cela prouve que f est injective.

b) Le sens direct se prouve sur le même modèle que la question précédente.

Montrons le sens réciproque par contraposée. Supposons ainsi que f n'est pas surjective. On va fabriquer deux applications g et h distinctes et qui pour autant vérifient $g \circ f = h \circ f$.

Considérons ainsi l'ensemble $A = \{y \in E / y$ n'a pas d'antécédent par $f\}$ qui est non vide. On fabrique g et h de la manière suivante :
- sur $E \backslash A$, on pose $g = h = \mathrm{id}$;
- sur A, on suppose que g et h sont constantes avec $g \neq h$.

Par construction, $g \circ f = h \circ f = f$ et pourtant $g \neq h$.

Exercice 4

Non, car leurs domaines de définition ne sont pas identiques (g est définie sur $\mathbb{R}^*$ tandis que f est définie sur $\mathbb{R}$).

Exercice 5

1. Elle est injective. En effet, pour tout $(n_1;\ n_2) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} f(n_1) = f(n_2) &\iff 2n_1 = 2n_2 \\ &\iff n_1 = n_2 \end{aligned}$$

   Mais elle n'est pas surjective car 1 n'a pas d'antécédents.

2. L'application est surjective. En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}$, p possède au moins un antécédent.
   En l'occurrence, $g(2p) = \dfrac{2p}{2} = p$.
   Elle n'est pas injective car $g(2) = g(1) = 1$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g \circ f(n) = g(2n) = n$ donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Cette application est bijective.
   De même, on a $f \circ g(n) = \begin{cases} f(n) = 2n \text{ si } n \text{ est impair.} \\ f\left(\frac{n}{2}\right) = n \text{ sinon} \end{cases}$. Cette application n'est pas injective car $f \circ g(1) = f \circ g(2) = 2$. Elle n'est pas surjective car 1 n'a pas d'antécédents (puisque toutes les images sont paires).

Exercice 8

Pour tout entier n, $g \circ f(n) = g(n+1) = n + 1 - 1 = n$ donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
Pour autant, g n'est pas la réciproque de f. En effet, $f \circ g(n) = \begin{cases} f(n-1) = n \text{ si } n \geq 1 \\ f(0) = 1 \text{ si } n = 0 \end{cases}$
Ainsi, $f \circ g \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 10

1. On détermine la forme canonique de f. Après calcul, on obtient, pour tout x :

$$f(x) = 2(x-1)^2 - 1$$

   Cela nous donne le tableau de variations de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

   La fonction n'est pas injective. En effet, on vérifie facilement que $f(0) = f(2) = 1$.

2. f est strictement croissante sur $[1;\ +\infty[$ donc elle est injective. On vérifie par le tableau de variations que $f([1;\ +\infty[) = [-1;\ +\infty[$.
   Donc f est bijective de $[1;\ +\infty[$ vers $[-1;\ +\infty[$.
   Pour déterminer sa réciproque, il faut déterminer pour tout $y \in [-1;\ +\infty[$, l'unique antécédent de y sur $[1;\ +\infty[$. Or, pour tout x et pour tout $y \geq -1$:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff 2(x-1)^2 - 1 = y \\ &\iff (x-1)^2 = \frac{y+1}{2} \\ &\iff x = 1 \pm \sqrt{\frac{y+1}{2}} \end{aligned}$$

Or, seul $x+\sqrt{\dfrac{y+1}{2}}$ est dans l'intervalle $[1;\ +\infty[$. On en déduit l'expression

$$f^{-1}(y)=1+\sqrt{\frac{y+1}{2}}$$

3. Par lecture du tableau de variations et en calculant $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-2)$, on obtient :

$$f([0;\ 1])=[-1;\ 1] \qquad f(\mathbb{R}_-)=[1;\ +\infty[\qquad f(\mathbb{R}_+)=[-1;\ +\infty[\qquad f([-2;\ 2])=[-1;\ 17]$$

On calcule $f^{-1}(\{1\})=\{2\}$, $f^{-1}(\{-1\})=\{1\}$ avec la fonction réciproque de f.
Enfin, reste à déterminer $f^{-1}(0)=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour obtenir $f^{-1}([0,1])=\left[1+\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ 2\right]$

> Il ne faut pas confondre $f^{-1}\langle[0;\ 1]\rangle$ qui est l'image réciproque de $[0;\ 1]$ par f, c'est à dire l'ensemble des antécédents des nombres de $[0;\ 1]$ par la fonction f avec $f^{-1}([0,1])$ qui est l'image directe de l'intervalle $[0;\ 1]$ par la fonction f^{-1}, réciproque de f.
> En particulier, on a $f^{-1}\langle[0;\ 1]\rangle=\left[0;\ 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[1+\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ 2\right]$ avec l'exemple précédent.

Exercice 13

- Le nombre de tiercés correspond aux nombres d'injections de $[\![1;\ 3]\!]$ vers l'ensemble des hommes d'affaire.
  C'est donc $12\times 11\times 10=1320$
- Par définition, ce nombre vaut $\binom{12}{3}=\dfrac{12\times 11\times 10}{3\times 2\times 1}=220$.

Exercice 14

1. En faisant un petit dessin, on obtient :

Nombre de faces colorées	3	2	1	0
Nombre de cubes	8	12	6	1

2. Pour simplifier, on notera T_3, T_2, T_1, T_0 les types de cubes en fonction du nombre de faces colorées.
   (a) On obtient 3 cubes T_2 de 12^3 manières différentes. En effet comme il y a remise, il s'agit de compter le nombre d'applications de $[\![1;\ 3]\!]$ vers les cubes T_2.
   (b) On obtient 2 cubes T_2 *puis* un cube autre de $12^2\times 15$ manières.
   Mais le cube autre peut aussi être en première position ou en seconde position. Ainsi, il y a $3\times 15\times 12^2$ tirages possibles.
   (c) C'est le même principe, on obtient $3\times 12\times 15^2$ possibilités.
   (d) Il faut faire une disjonction de cas. Il y a trois configurations qui conduisent à quatre faces rouges :
   (Cas n° 1) On obtient un cube T_3 et un cube T_1 et un cube T_0. Il y a $3!=6$ manières d'ordonner ces trois types.
   Pour un ordre donné, il y a $8\times 6\times 1$ manières.
   On obtient donc $6\times 8\times 6$ tirages possibles dans ce cas.
   (Cas n° 2) On obtient deux cube T_2 et un cube T_0. Il y a 3 manières de placer le type T_0.
   On obtient donc $3\times 12^2\times 1$ tirages possibles dans ce cas.
   (Cas n° 3) On obtient un cube T_2 et deux cubes T_1. Là encore il y a 3 manières de positionner le cube T_2.
   On obtient donc $3\times 12\times 6^2$ possibilités.
   Finalement, on obtient $3\times 8\times 6+3\times 12^2+3\times 12\times 6^2=2016$ possibilités.

Exercice 15

1. On note U, l'ensemble des chiffres sauf 1. On a $\text{card}(U) = 9$.
   Soit Z, l'ensemble des chiffres sauf 0 et 1. On a $\text{card}(Z) = 8$.
   Un nombre est dans E si et seulement si son écriture décimale :
   - commence par un chiffre de Z,
   - suivi de sept chiffres de U

   On a ainsi $\text{card}(E) = 8 \times 9^6$.
2. Pour obtenir un élément de E_1 :
   - on choisit un chiffre de Z,
   - suivi d'un chiffre de U différent du précédent,
   - suivi d'un second chiffre de U différent des deux précédents,
   - et ainsi de suite...
   - le dernier chiffre choisi est différent des six précédents.

   Sachant que $Z \subset U$, on en déduit :
   $$\text{card}(E_1) = 8 \times 8 \times 7 \times \cdots \times 3 = 8 \times \frac{8!}{2!}$$
3. Un nombre de E est pair si et seulement si son chiffre des unités est dans l'ensemble $\{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8\}$.
   On en déduit
   $$\text{card}(E_2) = 8 \times 9^5 \times 5$$
4. Faisons une remarque préliminaire : le premier chiffre écrit ne peut pas être strictement supérieur à 3, c'est donc forcément 1 ou 2 ou 3.

   Réalisons une disjonction de cas.
   - Si le premier chiffre écrit est 3, on connaît ce chiffre : c'est 3456789.
   - Si le premier chiffre écrit est 2, il est possible ou non que deux chiffres consécutifs soit distant de 2.
     Par exemple, le nombre 2346789 convient. Il y a six positions possibles pour placer cet éventuel saut de 2.
     Dans le cas, où il n'y a pas de saut de 2, seul le nombre 2345678 convient.
     Finalement il y a donc $6 + 1 = 7$ nombres de cet ensemble qui commencent par 2.
   - Enfin, si le premier chiffre écrit est 1, il est possible :
     — de n'avoir aucun saut de 2 : un nombre,
     — d'avoir un saut de 2 : six nombres,
     — d'avoir deux sauts de 2 : $\binom{6}{2}$ nombres, soit 15 nombres,
     — d'avoir un saut de 3 : six nombres.
     On a donc, dans ce cas, $1 + 6 + 15 + 6 = 28$ nombres.

   En rassemblant tous les cas, on obtient :
   $$\text{card}(E_3) = 1 + 7 + 28 = 36$$

Exercice 16

1. C'est $\binom{32}{5} = 201\ 376$.
2. On obtient 5 cœurs en choisissant 5 cartes parmi 8. Donc il y a $\binom{8}{5} = 56$ manières de procéder.
   On obtient 5 trèfles en choisissant 5 cartes parmi 8. Donc il y a aussi 56 manières de procéder.
   Finalement, il y a $2 \times 56 = 112$ manières d'obtenir 5 trèfles ou 5 cœurs.
3. Il y a $\binom{8}{2}$ manières d'obtenir 2 cœurs et $\binom{8}{3}$ manières d'obtenir 3 trèfles.
   Donc il y a $\binom{8}{2} \times \binom{8}{3} = 1\ 568$ manières d'obtenir 2 cœurs et 3 trèfles.
4. Considérons le contraire : n'obtenir aucun as. Il y a $\binom{28}{5}$ manières de procéder.
   Donc, on obtient au moins un as de $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103\ 096$ manières
5. On peut faire une disjonction de cas :

(Cas n° 1) On obtient aucun as.
On a déjà calculé qu'il y a $\binom{28}{5} = 98\ 280$ manières d'obtenir une telle main.

(Cas n° 2) On obtient exactement un as. Il y a 4 manières de choisir un as, puis $\binom{28}{4}$ manières de choisir les 4 autres cartes.
Ainsi, il y a $4 \times \binom{28}{4} = 81\ 900$ manières d'obtenir exactement un as.

Finalement, il y a $98\ 280 + 81\ 900 = 180\ 180$ manières d'obtenir au plus un as.

6. Là encore, il convient de faire une disjonction de cas et d'être vigilant quant à la lecture de l'énoncé.

(Cas n° 1) On obtient 3 cœurs (qui ne sont pas des as) et 2 as (sans l'as de cœur).
Il y a $\binom{7}{3} \times \binom{3}{2} = 105$ manières de procéder.

(Cas n° 2) On obtient l'as de cœur ainsi qu'un autre as, ainsi que deux autres cœurs, ainsi qu'une dernière carte. Il y a 21 manières de choisir cette dernière carte (ni un as, ni un cœur).
Donc, on obtient ce tirage de $21 \times \binom{3}{1} \times \binom{7}{2} = 1\ 323$ manières.

Finalement, il y a donc $105 + 1\ 323 = 1\ 428$ manières.

Exercice 17

1. Si les livres sont rangés par matière, il y a 3 « blocs » de livres. On peut ranger ces 3 blocs de $3! = 6$ manières différentes.
   Au sein du bloc de maths, il y a 4! rangements possibles. Au sein du bloc de physique, il y a 6! rangements possibles. Et enfin, il y a 3! rangements possibles des livres de SI.
   Cela donne au total $3! \times 4! \times 6! \times 3! = 622\ 080$ rangement possibles.
2. Il y a 9! manières de ranger les autres livres que ceux de maths. On peut également placer le bloc de livres de maths au sein de 10 positions et enfin, il y a 4! manières de ranger les livres de maths.
   On obtient au total $9! \times 4! \times 10 = 87\ 091\ 200$ rangements possibles.

Exercice 18

Pour le mot « maths », toutes les lettres sont distinctes. Cela revient donc à compter les bijections de $[\![1;\ 5]\!]$ vers $\{M;\ A;\ T;\ H;\ S\}$. Il y en a $5! = 120$.

Pour le mot « rire », les deux "r" peuvent poser problème. On va donc décrire la manière de fabriquer un anagramme :

(étape 1) on place les deux "r" sur les quatre emplacements disponibles : $\binom{5}{2} = 10$ possibilités ;

(étape 2) on place le "i" sur les deux emplacements restants : 2 possibilités ;

(étape 3) on place le "e" sur le dernier emplacement : 1 possibilité.

Il y a donc $10 \times 2 = 20$ anagrammes de « rire. »

Pour le mot « ananas », on suit la même démarche :

(étape 1) on place les trois "a" sur les six emplacements disponibles : $\binom{6}{3} = 20$ possibilités ;

(étape 2) on place les deux "n" sur les trois emplacements restants : $\binom{3}{2} = 3$ possibilités ;

(étape 3) on place le "s" sur le dernier emplacement : 1 possibilité.

Il y a donc $20 \times 3 = 60$ anagrammes de « ananas. »

Exercice 19

a) Dans le cas où les couteaux sont distincts deux à deux, faire un tel rangement revient à établir une application de l'ensemble des p couteaux vers les n tiroirs. Il y a donc n^p manières de procéder.

b) Puisque les couteaux sont indiscernables, un rangement est entièrement défini par le nombre de couteaux dans chaque tiroir. On note pour tout $i \in [\![1;\ n]\!]$, k_i le nombre de couteaux dans le tiroir n° i.

Les (k_i) vérifient $\sum_{i=1}^{n} k_i = p$ (nombre total de couteaux).

Il s'agit donc de déterminer le cardinal de l'ensemble suivant :

$$\mathcal{R}_{n,\ p} = \left\{ (k_1;\ k_2;\ \cdot;\ k_n) \in \mathbb{N}^n / \sum_{i=1}^{n} k_i = p \right\}$$

Il n'est pas aisé de trouver directement une formule pour ce cardinal. Nous allons donc procéder par tâtonnement.

- Supposons $n = 1$. Il n'y a qu'une manière de ranger les couteaux car il n'y a qu'un seul tiroir. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:
$$\operatorname{card}(\mathcal{R}_{1,\ p}) = 1$$
- Supposons $n = 2$. Il y a $p+1$ manières de remplir le premier tiroir car le nombre de couteaux dans ce tiroir varie entre 0 et p. Une fois le premier tiroir remplir, tous les autres couteaux vont dans le second tiroir. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:
$$\operatorname{card}(\mathcal{R}_{2,\ p}) = p + 1$$
- Supposons $n = 3$. Réalisons une disjonction de cas selon le nombre k_1 de couteaux dans le premier tiroir en remarquant qu'une fois remplis les deux premiers tiroirs, il n'y a plus de choix pour le dernier tiroir qui récupère tous les couteaux restants.
  - pour $k_1 = 0$, il y a $p+1$ manières de remplir le second tiroir ;
  - pour $k_1 = 1$, il y a p manières de remplir le second tiroir ;
  - $\cdots$
  - pour $k_1 = p$, il y a 1 manière de remplir le second tiroir.

  On obtient ainsi :
$$\operatorname{card}(\mathcal{R}_{2,\ p}) = (p+1) + p + \cdots + 1 = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$
- Supposons n quelconque supérieur ou égal à 3.

  On sait qu'il suffit de choisir les entiers $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n-1}$ telles que $\sum_{i=1}^{n-1} k_i \leq p$ pour déterminer complètement le rangement. Mais choisir ces nombres revient à choisir leurs sommes cumulées respectives que l'on note (s_i) et que l'on définit pour tout $i \in [\![1;\ n-1]\!]$ par :
$$s_i = k_1 + k_2 + \cdots + k_i = \sum_{j=1}^{i} k_i$$
  L'intérêt d'un tel choix est que l'on a $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq p$, ce qui revient à choisir $n-1$ éléments éventuellement égaux dans l'ensemble $[\![0;\ p]\!]$. Nous savons comment choisir $n-1$ éléments distincts deux à deux dans $[\![0;\ p]\!]$. Il nous faut maintenant prendre en compte les cas d'égalité.

  Pour ce faire, nous allons ajouter à l'ensemble $[\![0;\ p]\!]$ des éléments notés $e_2,\ e_3,\ \cdots,\ e_{n-1}$ qui correspondent au cas d'égalité. Plus précisément, pour tout $j \in [\![2;\ n-1]\!]$ si l'on choisit e_j, cela signifie que $k_j = 0$, c'est à dire que $s_j = s_{j-1}$.

  Grâce à ce codage, on en déduit que le choix des $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$ correspond exactement au choix de $n-1$ éléments parmi $p + 1 + n - 2 = p + n - 1$. On en déduit :
$$\operatorname{card}(\mathcal{R}_{n,\ p}) = \binom{p+n-1}{n-1}$$

On peut tester cette formule :
- Pour $n = 1$, on retrouve $\operatorname{card}(\mathcal{R}_{1,\ p}) = \binom{p}{0} = 1$.
- Pour $n = 2$, on retrouve $\operatorname{card}(\mathcal{R}_{1,\ p}) = \binom{p+1}{1} = p + 1$.
- Pour $n = 3$, on retrouve $\operatorname{card}(\mathcal{R}_{1,\ p}) = \binom{p+2}{2} = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$.

Planche n° 5: Outils pour l'étude des fonctions

Exercice 1

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Traduire les propositions suivantes en langage formel.

(a) N'importe quel nombre compris entre 2 et 3 possède un antécédent par f.
(b) f ne prend que des valeurs entières.
(c) f n'est pas injective.
(d) f n'est pas surjective
(e) f n'est pas bijective.
(f) f n'est pas une fonction constante.
(g) f est une fonction trinomiale.
(h) f n'est pas croissante.
(i) f n'est pas majorée.
(j) f n'admet pas de maximum.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto x^n$.

1. Pour tout n, préciser le domaine de définition de f_n puis déterminer sa parité.
2. Soient $a \neq b$ deux nombres.
   Pour tout n, on note $\tau_n(a;\ b)$ le taux d'accroissement de f_n entre a et b.
   (a) Rappeler la formule de $\tau_n(a;\ b)$.
   (b) Démontrer la formule suivante, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$(b^n - a^n) = (b-a)\left(b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^{n-2}b + a^{n-1}\right) = (b-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

   Indication: On pourra utiliser les $\cdots$
   (c) En déduire une simplification de $\tau_n(a;\ b)$.
   (d) Finalement, déterminer :

$$\lim_{b \overset{\neq}{\to} a} \tau_n(a;\ b) = f_n'(a)$$

3. Déterminer, en fonction de n, le tableau de variations de f_n.
4. Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p > n$. Résoudre :

$$x^p > x^n$$

Exercice 3

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \qquad f_2 : x \mapsto \frac{\ln(x^2-4)}{\sqrt{4x^2-2x+1}} \qquad f_3 : x \mapsto \ln\left(\tan\frac{x\pi}{2}\right)$$

Exercice 4

Tracer rapidement à main levée, en justifiant, l'allure du graphe des fonctions suivantes.

$$g_1 : x \mapsto \sqrt{3x-2} - 1 \qquad g_2 : x \mapsto \frac{5}{2x+1} + 3$$

Exercice 5

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$. Décrire comment, à partir du graphe de f, on peut tracer le graphe des fonctions suivantes.

$$f_1 : x \mapsto f(a-x) \qquad\qquad f_2 : x \mapsto a - f(x)$$

Exercice 6

Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$

Exercice 7

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies sur I.
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant).

1. Si f et g sont croissantes sur I alors fg est croissante sur I.
2. Si f et g sont croissantes et positives sur I alors fg est croissante sur I.
3. Si f et g sont majorées sur I alors $f+g$ est majorée sur I.
4. Si f et g sont majorées sur I alors fg est majorée sur I.
5. Si f et g sont bornées sur I alors fg est bornée sur I.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f\circ f$ est croissante et $f\circ f\circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ est croissante. Montrer que si f s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$ alors f est la fonction nulle.

Exercice 10

Déterminer une période de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos\left(\frac{x}{5}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.

Exercice 11

Soit $(\alpha, \beta, \omega) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin(\omega x + \varphi)$$

Corrigé de la planche n° 5: Outils pour l'étude des fonctions

Exercice 1

(a) $\forall y \in [2;\ 3],\ \exists x \in \mathbb{R} / f(x) = y$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{Z}$.

(c) $\exists (a,\ b) \in \mathbb{R}^2 / a \neq b$ et $f(a) = f(b)$.

(d) $\exists y \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq y$.

(e) $(\exists y \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq y) \vee \big(\exists (a,\ b) \in \mathbb{R}^2 / a \neq b$ et $f(a) = f(b)\big)$.

(f) $\exists (a,\ b) \in \mathbb{R}^2 / f(a) \neq f(b)$.

(g) $\exists (a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$.

(h) $\exists (a,\ b) \in \mathbb{R}^2 / a \leq b$ et $f(a) > f(b)$.

(i) $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} / f(x) > M$.

(j) $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} / f(x) > f(x_0)$.

Exercice 2

1. Pour tout n, f_n est définie sur $\mathbb{R}$.
   Et pour tout x, on a $f_n(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n = (-1)^n f_n(x)$ donc f_n est de la même parité que n.
2. (a) On a $\tau_n(a;\ b) = \frac{b^n - a^n}{b-a}$

   (b) Ici, on va faire une démonstration « plus propre » en utilisant les changements d'indice. Partons du membre de droite.

$$(b-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k}.\ \text{Changement d'indice } k' = k+1 \text{ dans la seconde somme}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} - \sum_{k'=1}^{n} a^{k'} b^{n-k'} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} - \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k}}_{\text{les indices } k \in [[1;\ n-1]] \text{ sont communs}}$$

$$= a^0 b^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} - \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} - a^n b^0 = b^n - a^n$$

   (c) On exploite la formule montrée précédemment :

$$\tau_n(a;\ b) = \frac{b^n - a^n}{b-a} = \frac{(b-a)\sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}}{b-a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

   (d) Pour tout $k \in [[0;\ n-1]]$, $\lim\limits_{b \overset{\neq}{\to} a} a^k b^{n-1-k} = a^k a^{n-1-k} = a^{n-1}$. Chacun des n termes de la somme tend donc vers a^{n-1}. On obtient ainsi :

$$\lim_{b \overset{\neq}{\to} a} \tau_n(a;\ b) = n a^{n-1} = f_n'(a)$$

   On vient donc de prouver la formule de dérivation de la fonction f_n.

3. On connaît la parité de f_n, il suffit donc d'étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}^+$. Or, pour tout n et pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = nx^{n-1} > 0$. On en déduit que les f_n sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}^+$.

   En outre, $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$. On en déduit les tableaux de variations suivants.
   Si n est pair :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   Si n est impair :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. On procède, comme d'habitude, par équivalences. Pour tout x :

$$x^p > x^n \iff x^p - x^n > 0 \iff x^n\left(x^{p-n} - 1\right) > 0$$

   Dressons maintenant un tableau de signes.
   Le signe de x^n dépend de la parité de n et du signe de x. On fera donc une disjonction de cas, selon la parité de n.
   Pour déterminer le signe de $x^{p-n} - 1$, il faut résoudre $x^{p-n} - 1 > 0$, c'est à dire $x^{p-n} > 1$. Ici, encore, tout dépend de la parité de $p - n$ et nous devrons donc réaliser une disjonction de cas.
   Il nous faut donc distinguer au total quatre cas :
   - Lorsque n et $p - n$ sont tous les deux pairs. On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^n		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$x^{p-n} - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x^n\left(x^{p-n} - 1\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

     Les solutions sont donc, dans ce cas $]-\infty;\ -1[\,\cup\,]1;\ +\infty[$.
   - Lorsque n est pair et $p - n$ impair. On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^n		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$x^{p-n}-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^n\left(x^{p-n}-1\right)$		$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions sont donc, dans ce cas $]1;\ +\infty[$.

- Lorsque n est impair et $p-n$ pair. On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^n		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^{p-n}-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x^n\left(x^{p-n}-1\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions sont donc, dans ce cas $]-1;\ 0[\cup]1;\ +\infty[$.

- Enfin, lorsque n est impair et $p-n$ impair. On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^n		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^{p-n}-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^n\left(x^{p-n}-1\right)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions sont donc, dans ce cas $]-\infty;\ 0[\cup]1;\ +\infty[$.

Exercice 3

1. Il faut s'assurer que l'argument de la racine est strictement positif et que l'argument du logarithme est strictement positif.
   On doit donc vérifier simultanément les deux conditions
   $$x>0 \text{ et } \ln(x)>0$$
   Ce qui donne pour domaine $]1;\ +\infty[$.
2. Il faut s'assurer que l'argument de la racine est strictement positif et que l'argument du logarithme est strictement positif.
   On doit donc vérifier simultanément les deux conditions
   $$4x^2-2x+1>0 \text{ et } x^2-4>0$$
   Après étude du trinôme, la première inégalité est vraie pour tout x.
   On obtient donc pour domaine $]-\infty;\ 2[\cup]2;\ +\infty[$.
3. Il faut que l'argument de la tangente n'appartienne pas à l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ et que l'argument du logarithme soit positif.
   La résolution de $\tan\dfrac{x\pi}{2}>\frac{\pi}{2}$ donne comme solutions tous les intervalles de la forme $]2k;\ 2k+1[$ avec k entier relatif.

Exercice 4

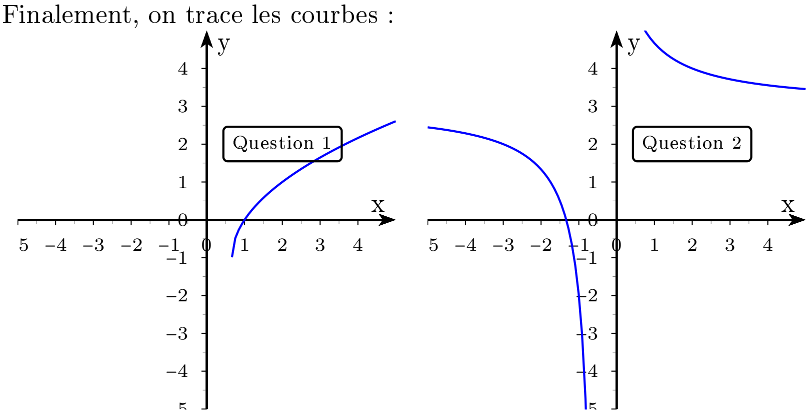
1. On peut réécrire cette fonction $x \mapsto \sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}-1$.

   En utilisant la décomposition $x \mapsto \sqrt{x} \mapsto \sqrt{3x} \mapsto \sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}-1$, on en déduit qu'on obtient la courbe à partir de la courbe de racine en appliquant successivement les opérations suivantes :
   - contraction selon l'axe des abscisses d'un rapport de 3 ;
   - translation d'un vecteur $\begin{pmatrix}2/3\\-1\end{pmatrix}$.

2. On peut réécrire cette fonction $x \mapsto \frac{5}{2} \times \frac{1}{x+\frac{1}{2}}+3$.

   En utilisant la décomposition $x \mapsto \frac{1}{x} \mapsto \frac{5}{2} \times \frac{1}{x} \mapsto \frac{5}{2} \times \frac{1}{x+\frac{1}{2}}+3$, on en déduit qu'on obtient la courbe à partir de la courbe d'inverse en appliquant successivement les opérations suivantes :
   - dilatation d'un facteur de $\frac{5}{2}$ selon l'axe des ordonnées ;
   - translation d'un vecteur $\begin{pmatrix}-1/2\\3\end{pmatrix}$.

Finalement, on trace les courbes :



Exercice 5

1. Pour a fixé, la fonction $x \mapsto a-x$ correspond à une symétrie sur l'axe des abscisses par rapport au point d'abscisse $\frac{a}{2}$.
   En effet, si on nomme M le point d'abscisse x et M' le point d'abscisse $a-x$, on vérifie aisément que le milieu de $[MM']$ est toujours le point d'abscisse $\frac{a}{2}$ (en utilisant la formule de l'abscisse du milieu par exemple).
   Ainsi, la courbe de $x \mapsto f(a-x)$ s'obtient par une réflexion de la courbe de f par rapport à l'axe d'équation $x=\frac{a}{2}$.
2. On peut appliquer le même raisonnement sur les ordonnées.
   On en déduit que la courbe de $x \mapsto f(a-x)$ s'obtient par une réflexion de la courbe de f par rapport à l'axe d'équation $y=\frac{a}{2}$.

Exercice 6

Toutes ces limites sont a priori indéterminées. Il faut travailler sur les expressions pour lever les indéterminations. *Il ne faut pas oublier, dans un premier temps, de déterminer les domaines de validité des expressions.*

a) À l'aide d'une disjonction de cas on obtient $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x^2+2|x|}{x} = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{x^2+2|x|}{x} = -2$ donc il n'y a pas de limite en 0.

b) Ici, le signe de x n'est plus à discuter. En effet, on peut supposer $x < 0$ puisqu'on est en $-\infty$.
On obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+2|x|}{x} = -\infty$.

c) Le dénominateur s'écrit, pour tout x, $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$ (il suffit de calculer Δ puis les racines).
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1;\ 2\}$, $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{(x+2)}{(x-1)}$ donc $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} = 4$.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)} &= \frac{1-\cos^2(x)}{1+\cos(x)} \\
&= \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{1+\cos(x)} \\
&= 1-\cos(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)} = 2$

e) On utilise le conjugué. Pour tout $x \in [-1;\ +\infty[\backslash\{0\}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} &= \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}\right)}{x} \times \frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \frac{1+x-(1+x^2)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \frac{x-x^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

On obtient finalement $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \dfrac{1}{2}$

f) Même technique ! Pour tout $x \geq 3$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} &= \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}\right) \times \frac{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}\right)}{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}\right)} \\
&= \frac{x+5-(x-3)}{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}\right)} \\
&= \frac{8}{\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}\right)}
\end{aligned}$$

On obtient donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} = 0$.

g) C'est encore la même technique. Cette fois ci on exploite l'identité :

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

On obtient ainsi, pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} &= \frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)}{x^2} \times \frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)} \\
&= \frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}
\end{aligned}$$

On obtient donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1}{3}$.

h) On reconnaît la formule de la somme des termes d'une suite géométrique. Pour tout $x \neq 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x^n-1} &= \frac{1}{\frac{x^n-1}{x-1}} \\
&= \frac{1}{1+x+\cdots+x^{n-1}}
\end{aligned}$$

On obtient ainsi $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1} = \frac{1}{n}$

Exercice 7

1. C'est faux.
   Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x$ sont croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
2. C'est vrai. Supposons f et g croissantes et positives sur I.
   Pour tous nombres $u \leq v$ de I, on a $0 \leq f(u) \leq f(v)$ et $0 \leq g(u) \leq g(v)$.
   Comme ces deux séries d'inégalités portent sur des nombres positifs, on peut les multiplier entre elles. On obtient $f(u)g(u) \leq f(v)g(v)$ et donc fg est croissante.
3. C'est vrai. Supposons f et g majorées sur I et posons M et N des majorants respectifs de f et g.
   On a, pour tout x de I, $f(x) \leq M$ et $g(x) \leq N$. Or, on peut ajouter membre à membre des inégalités.
   On en déduit $f(x)+g(x) \leq M+N$ et ainsi $f+g$ est majorée (par $M+N$ par exemple).
4. C'est faux.
   Les fonctions $x \mapsto -x^2$ et $x \mapsto -x^2$ sont majorées sur $\mathbb{R}$ (par 0 par exemple).
   Or la fonction $x \mapsto x^4$ n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$.
5. C'est vrai. Supposons que f et g sont bornées, ce qui est équivalent à dire que $|f|$ et $|g|$ sont majorées et notons M et N des majorants respectifs de $|f|$ et $|g|$.
   Pour tout x de I, $0 \leq |f|(x) \leq M$ et $0 \leq |g|(x) \leq N$. Comme ces séries d'inégalités portent sur des nombres positifs, on peut les multiplier. On obtient $0 \leq |f|(x) \times |g|(x) \leq M \times N$. Ainsi, $|fg|$ est majorée.
   Par suite, fg est bornée.

Exercice 8

Par l'absurde. On rappelle que le contraire de $A \Longrightarrow B$ est $(\neg A) \wedge B$.
On va donc supposer que $f \circ f$ est croissante, $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante mais que f n'est pas strictement décroissante.
En particulier, cela signifie qu'il existe deux nombres $u < v$ tels que $f(u) \leq f(v)$.
Comme $f \circ f$ est croissante, en composant cette inégalité par $f \circ f$, on obtient $f \circ f \circ f(u) \leq f \circ f \circ f(v)$ mais c'est absurde car $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante.

Exercice 9

On se place dans les hypothèses du problème et on suppose que f s'annule sur $\mathbb{R}_{\star}^{+}$. Ainsi, il existe $a > 0$ tel que $f(a) = 0$.
Soit alors x un réel strictement positif.
Si on suppose $x \geq a$ alors on a

- $xf(x) \geq af(a) = 0$ car g est croissante ; ce qui donne $f(x) \geq 0$ (car $x > 0$) ;
- $f(x) \leq f(a) = 0$ car f est décroissante.

Donc, si $x \geq a$, on obtient $f(x) \geq 0$ et $f(x) \leq 0$ et ainsi $f(x) = 0$.
Le cas où $x < a$ se traite de manière similaire. On obtient également $f(x) = 0$.
Finalement, la fonction f est nulle.

Planche n° 6: Barycentres

Exercice 1

Soient $(A;\ 3)$ et $(B;\ 2)$ un système de deux points distincts pondérés dont G est le barycentre. Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

a) L'abscisse de G dans le repère de droite $\left(A;\ \overrightarrow{AB}\right)$ est $\frac{2}{5}$.

b) $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$.

c) $2\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AG}$.

d) G est barycentre de $(A;\ 6)$ et $(B;\ 4)$.

e) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

Exercice 2

Les points A et B sont donnés. Quels sont, parmi les points C, D et E définis ci-après, ceux qui appartiennent au segment $[AB]$?

- C est barycentre de $(A;\ -1)$ et $(B;\ -4)$.
- $2\overrightarrow{DA} + 5\overrightarrow{BD} = \vec{0}$.
- B est barycentre de $(A;\ 1)$ et $(E;\ -3)$.

Exercice 3

Le triangle OAB est isocèle en O.

Étudier la nature du triangle OCD sachant que O est barycentre de $(A;\ 2)$ et $(C;\ 1)$ et que D est barycentre de $(O;\ 1)$ et $(B;\ -2)$.

Exercice 4

On suppose que A et B sont deux points tels que $AB = 3$.

On considère l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 3$.

Montrer que (Γ) est un cercle de centre G le barycentre de $(A;\ 1)$ et $(B;\ 2)$.
On précisera le rayon de ce cercle.

Exercice 5

On munit le plan d'un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soient les points $A\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les coordonnées de G barycentre de $(A;\ 2)$ et $(B;\ 3)$.
2. Montrer que $C\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ est aligné avec A et B puis trouver des poids α et β tels que C soit le barycentre de $(A;\ \alpha)$ et $(B;\ \beta)$.

Exercice 6

Tracer un quadrilatère $ABCD$ tel que le barycentre G de $(A;\ 2)$ et $(B;\ 3)$ soit aussi le barycentre de $(C;\ 1)$ et $(D;\ 4)$.

1. Calculer pour tout point du plan $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD}$.
2. En déduire que D est le barycentre de $(A;\ 2)$, $(B;\ 3)$ et $(C;\ -1)$.
3. Montrer que A est le barycentre de B, C et D avec des coefficients que l'on calculera.

Exercice 7

On considère un triangle ABC et l'on désigne par G le barycentre de $(A;\ 1)$, $(B;\ 4)$ et $(C;\ -3)$.

1. Construire le barycentre I de $(B;\ 4)$ et $(C;\ -3)$.
2. Montrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \vec{0}$ et en déduire la position de G sur (AI).

Exercice 8

Soit ABC un triangle. I et J désignent les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. *La dernière n'a rien à voir avec le triangle ABC.*

a) Le barycentre de $(A;\ 2)$, $(B;\ 1)$ et $(C;\ 1)$ est le milieu de $[IJ]$.
b) Le point C est barycentre de $(B;\ 1)$, $(I;\ -2)$ et $(J;\ 2)$.
c) Si G est le barycentre de $(A;\ 3)$, $(B;\ 1)$ et $(C;\ -1)$, alors la droite (AG) coupe la droite (BC) en dehors du segment $[BC]$.
d) Le barycentre de $(I;\ 1)$, $(J;\ 1)$ et $(A;\ -1)$ est l'isobarycentre de B et C.
e) L'isobarycentre d'un trapèze est le point d'intersection de ses diagonales.

Exercice 9

Soient trois points fixés A, B et C.
M désigne un point quelconque du plan.

1. Montrer que $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est indépendant de M.
2. Montrer que l'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$ forment un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 10

Construction de barycentre de deux points à la règle et au compas.

Soient $A \neq B$ deux points.

On va construire G le barycentre de $(A;\ 3)$ et $(B;\ 2)$.

1. Première méthode.
   Soit P un point non aligné avec A et B.
   (a) Construire à la règle et au compas les points A_1, B_1 et S tels que :
   $$\overrightarrow{PA_1} = 3\overrightarrow{PA} \qquad \overrightarrow{PB_1} = 2\overrightarrow{PB} \qquad \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1}$$
   (b) Montrer qu'alors (PS) et (AB) sont sécantes en G.
2. Seconde méthode.
   Soit $\vec{u}$ un vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
   (a) Construire à la règle et au compas des points A' et B' tels que :
   $$\overrightarrow{AA'} = 2\vec{u} \qquad \overrightarrow{BB'} = -3\vec{u}$$
   (b) Montrer que $(A'B')$ et (AB) sont sécantes en G.

Exercice 11

Soient $(A;\ \alpha)$, $(B;\ \beta)$ et $(C;\ \gamma)$ un système de trois points pondérés et non alignés dont le barycentre est G.

Les deux questions sont indépendantes.

1. On suppose que $\alpha = \beta$.
   Montrer que G est barycentre de C et I, avec I le milieu de $[AB]$. On précisera les pondérations de I et C.
2. On suppose que $\alpha + \beta = 0$.
   Montrer que G appartient à la parallèle à (AB) passant par C.

Exercice 12

Soit $ABCD$ un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$.
On suppose que (AD) et (CB) sont sécantes en un point O et on pose $a = AB$, $b = CD$.
Enfin, on appelle O' le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.
Commencer par faire une figure avant de répondre aux questions.

1. Montrer que O est le barycentre de $(A;\ b)$ et $(D, -a)$ mais aussi le barycentre de $(B;\ b)$ et $(C;\ -a)$.
2. Montrer que O' est le barycentre de $(A;\ b)$ et $(C;\ a)$ mais aussi le barycentre de $(B;\ b)$ et $(D;\ a)$.

Exercice 13

Soient A, B et C trois points.

Lorsque c'est possible, écrire A comme barycentre de B et C.

a) Dans le cas où les trois points vérifient :

$$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

b) Dans le cas où les trois points vérifient :

$$\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{AC}$$

c) Dans le cas où les trois points vérifient :

$$2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

d) Dans le cas où les trois points vérifient :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA}$$

Exercice 14

Étant donné un triangle ABC, construire les points I, J et K définis par :

- I est barycentre de $(A;\ 2)$ et $(C;\ 1)$;
- J est barycentre de $(A;\ 1)$ et $(B;\ 2)$;
- K est barycentre de $(C;\ 1)$ et $(B;\ -4)$;

1. Démontrer que B est barycentre de $(K;\ 3)$ et $(C;\ 1)$.
2. Quel est le barycentre de $(A;\ 2)$, $(K;\ 3)$ et $(C;\ 1)$?
3. En déduire que I, J et K sont alignés et que J est le milieu de $[IK]$.
4. L étant le milieu de $[CI]$ et M celui de $[KC]$, démontrer que $IJML$ est un parallélogramme dont le centre G est l'isobarycentre de A, B et C.

Exercice 15

Cet exercice permet de prouver une propriété fondamentale du barycentre mais qui ne figure pas au programme.

Soient $(A_i;\ \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(B_i;\ \beta_i)_{1\leq i\leq p}$ deux systèmes de points pondérés. On note G et H les barycentres respectifs de ces deux systèmes.

On suppose que $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i + \sum\limits_{i=1}^{p}\beta_i \neq 0$.

Montrer que le barycentre du système de $n+p$ points pondérés $(A_1;\ \alpha_1)$, $(A_2;\ \alpha_2)$, ⋯, $(A_n;\ \alpha_n)$, $(B_1;\ \beta_1)$, $(B_2;\ \beta_2)$, ⋯, $(B_p;\ \beta_p)$ est le barycentre de $(F;\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i)$ et $\left(G;\ \sum_{i=1}^{p}\beta_i\right)$

Corrigé de la planche n° 6: Barycentres

Exercice 1

On fait un dessin sur le cahier pour visualiser les choses.

a) Par définition, on a :

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BG}=\vec{0} &\iff 3\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AG}=\vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

L'assertion est donc vraie.

b) D'après ce qui précède, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, ce qui donne :

$$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}-\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$$

L'assertion est donc vraie.

c) En raison de l'égalité obtenue à la question a), c'est encore vrai.

d) En raison de l'homogénéité du barycentre, c'est vrai.

e) En exploitant ce qui précède :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\frac{-2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$$

C'est encore vrai.

Exercice 3

Ici, il faut encore faire un dessin sur le cahier sinon c'est incompréhensible.

Par hypothèse, on a d'une part $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{DO}-2\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.
La première égalité donne $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{AO}$.
Travaillons sur la seconde égalité :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DO}-2\overrightarrow{DB}=\vec{0} &\iff \overrightarrow{DO}-2\overrightarrow{DO}-2\overrightarrow{OB}=\vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

On obtient donc, en distance, $OC=2AO$ et $OD=2BO$. Or $AO=BO$, par hypothèse.
Finalement, $OC=OD$, ce qui prouve que le triangle OCD est isocèle en O.

Exercice 4

Pour tout point M, on a $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG}$ avec G le barycentre de $(A;\ 1)$ et $(B;\ 2)$.

Ainsi, on a $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=3 \iff 3MG=3 \iff MG=1$.

L'ensemble des points qui vérifient cette égalité forment donc un cercle de centre G et de rayon 1.

Exercice 5

1. On obtient $G\begin{pmatrix}(2\times 4+3\times(-1))/(2+3)\\(2\times 3+3\times(-2))/(2+3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.
2. On calcule $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}$, ce qui donne $\overrightarrow{CB}=6\overrightarrow{CA}$ et prouve que les trois points sont bien alignés.

   De cette égalité, on déduit aussi $\overrightarrow{CB}-6\overrightarrow{CA}=\vec{0}$. C est donc le barycentre de $(A;\ -6)$ et $(B;\ 1)$.

Exercice 7

1. I vérifie $4\overrightarrow{IB}-3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$, ce qui donne, après calcul

$$\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{CB}$$

   Cette égalité permet de placer le point I.
2. On sait que $\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
   Or, par définition de I, $4\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=(4-3)\overrightarrow{GI}$.
   On obtient donc bien :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GI}=\vec{0}$$

   Ainsi, G est le milieu de $[AI]$.

Exercice 8

Bien sûr, avant de se lancer, il faut faire un dessin sur le cahier.

a) Notons H ce barycentre. On a :

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0} &\iff \overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HC}\\ &\iff 2\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{HJ}=\vec{0}\\ &\iff \overrightarrow{HI}+\overrightarrow{HJ}=\vec{0}\end{aligned}$$

Donc l'assertion est vraie.

b) On a $-2\overrightarrow{CI}+2\overrightarrow{CJ}=2\left(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IC}\right)=2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{BC}$, en raison du théorème de Thalès.

Ainsi, $-2\overrightarrow{CI}+2\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$, ce qui permet de conclure : l'assertion est vraie.

c) On va utiliser un système de coordonnées.

On se place dans le repère $\left(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right)$.

Dans ce repère les coordonnées de G sont $G\begin{pmatrix}1/3\\-1/3\end{pmatrix}$.
En particulier la droite (AG) a pour équation $y=-x$ et la droite (BC) a pour équation $y=1-x$.
Ces deux droites sont parallèles. L'assertion est donc fausse.

Une autre manière de voir les choses est de partir de l'égalité vérifiée par G :

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0} &\iff 3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}\\ &\iff 3\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Ce qui prouve de la même manière que les droites (AG) et (BC) sont parallèles.

d) Notons K ce barycentre. K vérifie :

$$\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{KJ} - \overrightarrow{KA} = \vec{0}$$

Or on sait que $2\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB}$ et $2\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC}$. On en déduit :

$$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC}\right) - \overrightarrow{KA} = \vec{0} \iff \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}\right) = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

L'assertion est donc vraie.

e) C'est faux. Prenons un exemple dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soient ainsi les points :

$$A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \qquad D\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

L'isobarycentre G a pour coordonnées $G\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

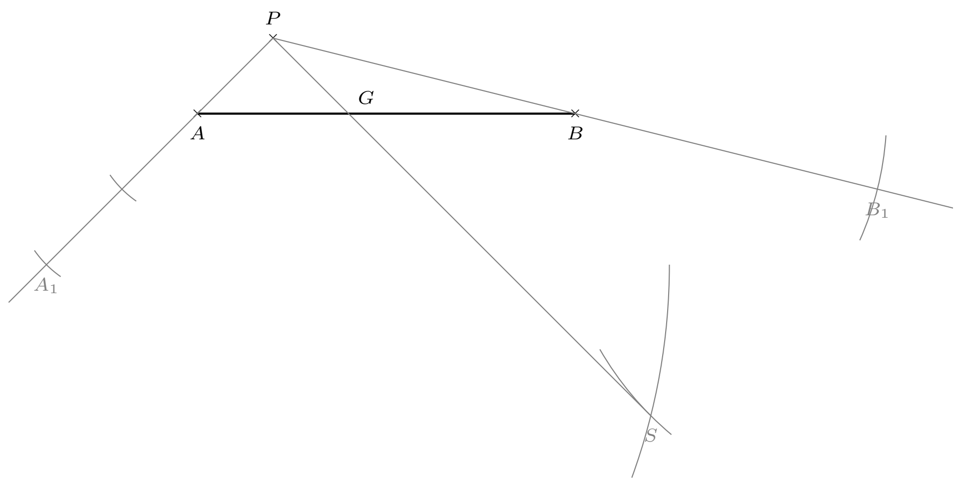
Les diagonales ont pour équations $(AC) : y = \frac{2}{3}x$ et $(BD) : y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$.

Après calcul, leur intersection a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\4/3\end{pmatrix}$, ce qui ne correspond pas à G.

Exercice 10

1. Première méthode.

   (a)



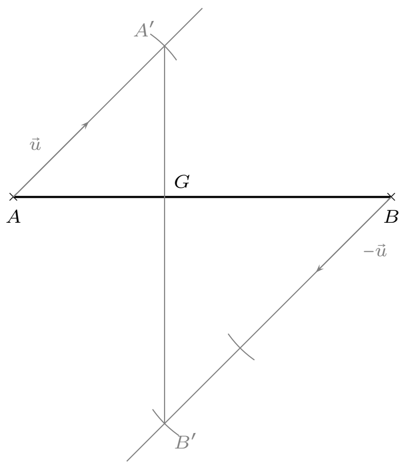
   (b) On sait que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PB_1}\\
&= 3\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB}\\
&= 3\overrightarrow{PG} + 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{GB}\\
&= 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 5\overrightarrow{PG} \text{ or } 3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}. \text{ Donc :}\\
\overrightarrow{PS} &= 5\overrightarrow{PG}
\end{aligned}$$

Ainsi, les points P, G et S sont alignés. Comme de plus, on sait que A, B et G sont alignés, on en déduit qu'effectivement (PS) et (AB) s'intersectent en G.

2. Seconde méthode.

   (a)



   (b) On va montrer que G est barycentre de $(A';\ 3)$ et $(B';\ 2)$. Pour ce faire, on calcule :

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{GA'} + 2\overrightarrow{GB'} &= 3\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'}\right) + 2\left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BB'}\right) \\ &= \underbrace{3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB}}_{=\vec{0}} + 6\vec{u} - 6\vec{u} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

   Cela prouve notre conjecture.
   Ainsi A', G et B' sont alignés, de même que A, G et B ; qui permet de conclure : G est bien l'intersection de (AB) et $(A'B')$.

Exercice 11

1. G vérifie, dans ce cas :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \iff 2\alpha\overrightarrow{GI} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ car } I \text{ le milieu de } [AB]$$

   Ainsi G est le barycentre de $(I;\ 2\alpha)$ et $(C;\ \gamma)$.

2. G vérifie dans ce cas :

$$\begin{aligned} \alpha\overrightarrow{GA} - \alpha\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} &\iff \alpha\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BG}\right) + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ &\iff \alpha\overrightarrow{BA} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ or } \gamma \neq 0 \text{ car } \alpha + \beta + \gamma = \gamma \neq 0 \end{aligned}$$

   Cela prouve que les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{GC}$ forment une famille liée. Ainsi, $\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires.

Planche n$^{\text{o}}$ 7: Fonctions usuelles

Exercice 1

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

$$f_1 : x \mapsto e^{-\frac{a}{x^2}} \qquad f_2 : x \mapsto x - a\sqrt{x} \qquad f_3 : x \mapsto \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$$

$$f_4 : x \mapsto \sqrt{1 + \cos^2 x} \qquad f_5 : x \mapsto (ax + b)^x \qquad f_6 : x \mapsto \frac{\cos(ax^2 + bx + 1)}{\sin(x)}$$

$$f_7 : x \mapsto \arctan(e^x) \qquad f_8 : x \mapsto \arcsin(x^2 - 1) \qquad f_9 : x \mapsto \arccos\left(\frac{1}{1 + x}\right)$$

$$f_{10} : x \mapsto \frac{\cos^3 x}{(1 - \cos x)^2}$$

Exercice 2

Montrer les inégalités suivantes :

a) $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1 + x) \leq x$;

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x \ln x - (x - 1) \leq (x - 1)^2$;

c) $\forall x \in]-\infty, 1],\ e^x \leq 1 + x + \dfrac{ex^2}{2}$;

Exercice 3

Tracer le graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |3x - 2| - 2|x + 1|$.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln\left(\dfrac{x + 3}{2}\right) = \dfrac{\ln x + \ln 3}{2}$;

b) $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$;

c) $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$.

d) $\ln|2x + 1| + \ln|x + 3| < \ln 3$.

Exercice 5

Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, parité, périodicité, variations et limites.)

$$f_1 : x \longmapsto \frac{x^3}{x^2 - 3} \qquad f_2 : x \longmapsto \ln(x - 1) + \ln(x + 1) \qquad f_3 : x \longmapsto \ln(x^2 - 1)$$

$$f_4 : x \longmapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}} \qquad f_5 : x \longmapsto \frac{\tan(2x)}{\tan x} \qquad f_6 : x \longmapsto x \arctan \frac{1}{x}$$

$$f_7 : x \longmapsto \sin(3x) + 3\sin x$$

Exercice 6

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que u et v sont dérivables sur I et que u est strictement positive sur I. Montrer que u^v est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

2. Étudier et tracer le graphe de l'application $f : \mathbb{R}+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ On précisera les éventuelles tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

3. Étudier et tracer le graphe de l'application $f : \mathbb{R}+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ On précisera les éventuelles tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

Exercice 7

Tracer le graphe de la fonction $x \longmapsto \arcsin(\sin x)$.

Exercice 8

Simplifier les expressions suivantes : $\tan(\arcsin x)$, $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arctan x)$.

Exercice 9

Ensemble de définition et simplification de f définie par $f : x \mapsto \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

Exercice 10

1. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Cette égalité est-elle valable pour tout $x \in \mathbb{R}^*$?
3. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2} \arccos x$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\arcsin 2x = \arccos x$.

b) $\arcsin(x+1) - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$.

c) $\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$.

d) $\arcsin x = \arccos \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{4}$.

e) $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{3}$.

f) $\arcsin x = \arctan 2 + \arctan 3$.

Exercice 12

Calculer $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$.

Exercice 13

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, simplifier $\arctan(k+1) - \arctan(k)$. (*Indication* : on pourra calculer la tangente de cette expression.)
2. En déduire la valeur de $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)\right)$.

Exercice 14

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$ et $g_n(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Montrer que f_n et g_n sont des fonctions polynomiales.

Corrigé de la planche n° 7: Fonctions usuelles

Exercice 1

La fonction $f_1 : x \mapsto \dfrac{a}{x^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Par composition, la fonction proposée est aussi définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Sa dérivée est

$$f_1' : x \mapsto \frac{2a}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{a}{x^2}}$$

La fonction $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$.
Par somme, la fonction étudiée est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$ et sa dérivée est :

$$f_2' : x \mapsto 1 - \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

Pour f_3, par définition, pour tout x d'un domaine valide, on a

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$$

On en déduit que la fonction est définie est dérivable pour $\left(1 + \dfrac{a}{x}\right) > 0$ et pour $x \neq 0$. On résout, pour $x \neq 0$:

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right) > 0 \iff \frac{x+a}{x} > 0$$

On sait que $a > 0$. Un petit tableau de signes donne les solutions $]-\infty;\ -a[\cup]0;\ +\infty[$.
Ainsi, la fonction est définie et dérivable sur $]-\infty;\ -a[\cup]0;\ +\infty[$. On calcule sa dérivée en utilisant deux fois la formule de la dérivée d'une fonction composée. On obtient :

$$f_3' : x \mapsto \left(\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) - \frac{a}{a+x}\right)e^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$$

Pour tout x, on a $1 + \cos^2(x) > 0$. On en déduit, par composition, que la fonction f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est :

$$f_4' : x \mapsto \frac{-\cos(x)\sin(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}$$

Pour f_5, on utilise la même technique que pour f_3. Le domaine de dérivabilité est $\left]\frac{-b}{a};\ +\infty\right[$. Après calcul, on obtient la dérivée :

$$f_5' : x \mapsto \left(\ln(ax+b) + \frac{a}{ax+b}\right)\mathrm{e}^{x\ln(ax+b)}$$

Le numérateur de f_6 ne pose pas de problème. La fonction est définie est dérivable dès que $\sin(x) \neq 0$, c'est à dire pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. On obtient la dérivée :

$$f_6' : x \mapsto -\frac{\cos(ax^2+b+c)\cos(x) + (2ax+b)\sin(ax^2+bx+c)\sin(x)}{\sin^2(x)}$$

Par composition f_7 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est :

$$f_7' : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$$

arcsin est définie sur $[-1;\ 1]$ et dérivable sur $]-1;\ 1[$.

Pour connaître le domaine de définition de f_8, il faut résoudre :

$$\begin{aligned} -1 \leq x^2 - 1 \leq 1 &\iff 0 \leq x^2 \text{ et } x^2 - 2 \leq 0 \\ &\iff x \in \left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right] \end{aligned}$$

La fonction est donc définie sur $\left[-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right]$ et dérivable sur $\left]-\sqrt{2};\ 0\right[\cup \left]0;\ \sqrt{2}\right[$.
Sa dérivée est :

$$f_8' : x \mapsto \frac{2x}{|x|\sqrt{x^2-2}}$$

Pour f_9, on applique la même stratégie qu'à la question précédente, on obtient une fonction définie sur $]-\infty;\ -2] \cup [0;\ +\infty[$ et dérivable sur $]-\infty;\ -2[\cup]0;\ +\infty[$.
La dérivée est :

$$f_9' : x \mapsto \frac{1}{|x+1|\sqrt{x(x+2)}}$$

La fonction f_{10} est définie et dérivable pour $\cos(x) \neq 1$, c'est à dire pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Sa dérivée est :

$$f_{10}' : x \mapsto -\frac{(\cos(x)-3)\cos^2(x)\sin(x)}{(\cos(x)-1)^3}$$

Exercice 2

a) Soit la fonction $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$ définie et dérivable sur $]-1;\ +\infty[$. Il s'agit de prouver que f est positive.
Or, pour tout x du domaine :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{x}{x+1} \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes de f' puis le tableau de variations de f après avoir calculé $f(0) = 0$.

x	-1		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$x+1$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit que f est bien positive sur son domaine.

b) On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} x\ln x - (x-1) \leq (x-1)^2 &\iff (x-1)^2 + (x-1) \geq x\ln(x) \\ &\iff x(x-1) \geq x\ln(x) \\ &\iff (x-1) \geq \ln(x) \text{ car } x > 0 \end{aligned}$$

Montrer l'inégalité $(x-1) \geq \ln(x)$ se fait en étudiant la fonction $x \mapsto (x-1) - \ln(x)$ de manière très similaire à ce qui a été fait en 1.

c) On étudie la fonction $h : x \mapsto 1 + x + \dfrac{ex^2}{2} - e^x$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x :

$$h'(x) = 1 + ex - e^x \qquad\qquad h''(x) = e - e^x$$

On en déduit que $h''(x)$ est positive pour $x \leq 1$. En particulier que h' est croissante sur $]-\infty;\ 1]$. Or, $h'(0) = 0$.

Ainsi, le signe de h' et les variations de h sur $]-\infty;\ 1]$ sont :

x	$-\infty$		0		1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

En effet, on calcule $h(0) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \leq 1$, $h(x) \geq 0$, ce qui permet de conclure.

Exercice 4

a) Cette équation prend sens lorsque $x > -3$ et $x > 0$ simultanément, c'est à dire pour $x > 0$.

D'autre part, pour tout $x > 0$, on a la série d'équivalences :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{\ln x + \ln 3}{2} &\iff 2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) - (\ln x + \ln 3) = 0 \\
&\iff \ln\left(\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3x}\right) = 0 \\
&\iff \frac{(x+3)^2}{12x} = 1 \\
&\iff \frac{(x+3)^2 - 12x}{12x} = 0 \\
&\iff \frac{x^2 - 6x + 9}{12x} = 0 \\
&\iff \frac{(x-3)^2}{12x} = 0
\end{aligned}$$

On obtient la solution $x = 3$.

b) Cette équation prend sens pour tout x. De plus, pour tout x, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1} &\iff 3^{2x} + 3^{2x-1} = 2^{x+\frac{7}{2}} + 2^{x+\frac{1}{2}} \\
&\iff \mathrm{e}^{2x\ln(3)} + \mathrm{e}^{(2x-1)\ln(3)} = \mathrm{e}^{(x+7/2)\ln(2)} + \mathrm{e}^{(x+1/2)\ln(2)} \\
&\iff \mathrm{e}^{2x\ln(3)}\left(1+\mathrm{e}^{-\ln(3)}\right) = \mathrm{e}^{x\ln(2)}\left(\mathrm{e}^{7/2\ln(2)} + \mathrm{e}^{1/2\ln(2)}\right) \\
&\iff \frac{\mathrm{e}^{2x\ln(3)}}{\mathrm{e}^{x\ln(2)}} = \frac{\left(\mathrm{e}^{7/2\ln(2)} + \mathrm{e}^{1/2\ln(2)}\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-\ln(3)}\right)} \\
&\iff 2x\ln(3) - x\ln(2) = \ln\left(\frac{\left(\mathrm{e}^{7/2\ln(2)} + \mathrm{e}^{1/2\ln(2)}\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-\ln(3)}\right)}\right) \\
&\iff x = \frac{1}{2\ln(3)-\ln(2)} \times \ln\left(\frac{\left(\mathrm{e}^{7/2\ln(2)} + \mathrm{e}^{1/2\ln(2)}\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-\ln(3)}\right)}\right) \\
&\iff x = \frac{1}{2\ln(3)-\ln(2)} \times \ln\left(\frac{\left(8\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)}\right) \\
&\iff x = \frac{1}{2\ln(3)-\ln(2)} \times \ln\left(\frac{27\sqrt{2}}{4}\right)
\end{aligned}$$

c) L'expression est définie pour tout $x > 0$ et on a alors la série d'équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x}\right)^x = x^{\sqrt{x}} &\iff \mathrm{e}^{x\ln\left(\sqrt{x}\right)} = \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln(x)} \\
&\iff e^{x\ln(x)/2} = \mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln(x)} \\
&\iff x\ln(x) = 2\sqrt{x}\ln(x) \\
&\iff \ln(x)\left(x-2\sqrt{x}\right) = 0 \\
&\iff \left(x-2\sqrt{x}\right) = 0 \text{ ou } \ln(x) = 0 \\
&\iff x^2 = 4x ou x = 1 \\
&\iff x(x-4) = 0 \text{ ou } x = 1 \\
&\iff x = 4 \text{ ou } x = 1
\end{aligned}$$

On a donc deux solutions : 4 et 1.

d) Cette inéquation est définie lorsque $|2x+1| > 0$ et $|x+3| > 0$. Ainsi, on doit avoir $x \neq \frac{-1}{2}$ et $x \neq -3$. Sous ces conditions on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\ln|2x+1| + \ln|x+3| < \ln 3 &\iff \ln\left(|2x+1| \times |x+3|\right) < \ln(3) \\
&\iff |(2x+1)(x+3)| < 3 \\
&\iff -3 < (2x+1)(x+3) < 3
\end{aligned}$$

Les solutions de l'inéquation de départ sont donc les intersections des solutions de $(2x+1)(x+3) < 3$ et des solutions de $(2x+1)(x+3) > -3$.

On obtient ainsi comme solutions :

$$\left(\left]-\frac{7}{2};\ -2\right[\cup \left]-\frac{3}{2};\ 0\right[\right) \setminus \left\{-3;\ \frac{-1}{2}\right\}$$

Exercice 5

f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right\}$. De plus, pour tout x de son domaine de définition, on a

$$f_1(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-3} = \frac{-x^3}{x^2-3} = -f_1(x)$$

Cette fonction est donc impaire.

De plus sa dérivée vaut, après calcul et factorisation :

$$f_1'(x) = \frac{x^2(x+3)(x-3)}{(x^2-3)^2}$$

On étudie le sens de variation de f_1 sur $\mathbb{R}^+ \backslash \left\{\sqrt{3}\right\}$ puisqu'elle est impaire. Sur cet ensemble la dérivée change de signe en $x = 3$.
Reste à déterminer les limites de f_1 en $+\infty$ et à gauche et à droite de $\sqrt{3}$.
Pour tout x non nul du domaine de définition, on a

$$f_1(x) = \frac{x}{1 - \frac{3}{x^2}}$$

On en déduit

$$\lim_{+\infty} f_1 = +\infty$$

Pour la limite autour de $\sqrt{3}$, on écrit, pour tout x du domaine :

$$f_1(x) = \frac{x^3}{\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)}$$

On en déduit

$$\lim_{\sqrt{3}^+} f_1 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\sqrt{3}^-} f_1 = -\infty$$

Finalement, on peut reconstituer tout le tableau de variations de f_1 sur $\mathbb{R}^+$, l'ensemble des variations se déduisant par symétrie centrale.

x	0		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

f_2 est définie pour $x > 1$ et $x > -1$, soit sur $]1;\ +\infty[$. Son domaine de définition n'est pas symétrique, elle n'est donc ni paire ni impaire.
Les fonctions $x \mapsto \ln(x-1)$ et $x \mapsto \ln(x+1)$ sont strictement croissantes par composition. Ainsi, f_2 est strictement croissante par somme.
D'autre part, $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x-1) = -\infty$ par composition et ainsi, $\lim\limits_{1^+} f_2 = -\infty$ par somme.
Enfin, $\lim\limits_{+\infty} f_2 = +\infty$ par somme.
f_3 est définie sur $]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[$
Elle est paire car $f_3(-x) = \ln\left((-x)^2 - 1\right) = \ln(x^2-1) = f_3(x)$.
De plus, pour tout $x > 1$, $\ln(x^2-1) = \ln\left((x-1)(x+1)\right) = \ln(x-1) + \ln(x-1) = f_2(x)$. Ainsi, on déduit de l'étude de f_2 celle de f_3 par symétrie.
f_4 est définie lorsque $x \neq 0$ et $\dfrac{\ln|x|}{x} > 0$.
Un petit tableau de signes de l'expression $\dfrac{\ln|x|}{x}$ donne

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\ln\lvert x\rvert$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{\ln\lvert x\rvert}{x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

On en déduit que le domaine de définition de f_4 est $[-1;\ 0[\cup[1;\ +\infty[$

On va étudier la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln|x|}{x}$ qui est définie sur $\mathbb{R}^*$ et impaire et on déduira de l'étude de cette fonction celle de f_4 par composition par racine.

Pour tout $x > 0$, $|x| = x$ et par suite, $g'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

g' est donc négative sur $[\mathrm{e};\ +\infty[$ et positive sur $]0;\ \mathrm{e}]$, ce qui nous donne les variations de g.

On calcule $g(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ par quotient.

Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ par croissance comparée.

Finalement, le tableau de variations de g est :

x	$-\infty$		$-\mathrm{e}$		-1		0		1		e		$+\infty$
$g(x)$	0	↘	$\frac{-1}{\mathrm{e}}$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

L'étude de g nous permet d'en déduire f_4 par composition :

x	-1		0		1		e		$+\infty$
$f_4(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖		0	↗	$\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}}$	↘	0

$f_5(x)$ existe dès que

- $2x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $\tan(x) \neq 0$, c'est à dire $x \notin \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

La conjonction de ces trois conditions donne le domaine de définition et de dérivabilité $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{k\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

De plus, comme le numérateur est périodique de période $\frac{\pi}{2}$ et que le dénominateur est périodique de période π, on en déduit que π est une période de f_5.

D'autre part, le domaine de définition de f_5 est symétrique par rapport à 0 et pour tout x de ce domaine

$$f_5(-x) = \frac{\tan(-2x)}{\tan(-x)} = \frac{-\tan(2x)}{-\tan(x)} = f_5(x)$$

Ainsi, f_5 est paire. Il suffit donc d'étudier cette fonction sur $\left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout x de ce domaine :

$$\begin{aligned} f_5(x) &= \frac{\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}}{\tan(x)} \\ &= \frac{2}{1-\tan^2(x)} \end{aligned}$$

Cette dernière forme facilite l'étude de la fonction. Ainsi, pour tout $0 < u < v < \frac{\pi}{4}$, on a :

$$0 < \tan(u) < \tan(v) < 1 \Longrightarrow 1 - \tan^2(u) > 1 - \tan^2(v) > 0 \Longrightarrow f_5(u) < f_5(v)$$

en raison des sens de variations des fonctions carré et inverse sur $]0;\ +\infty[$.
En particulier, on en déduit que f_5 est strictement croissante sur $\left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[$.
De même, on peut prouver qu'elle est strictement croissante sur $\left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$.
Reste à calculer les limites.
On a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \left(1 - \tan^2(x)\right) = 0^+$ et donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f_5(x) = +\infty$.
On prouve de même, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f_5(x) = -\infty$.
Enfin, on sait que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ et ainsi $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f_5(x) = 0^-$.
Reste à calculer $f_5(0) = 2$ pour pouvoir dresser le tableau de variations sur une période en exploitant la parité.

x	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f_4(x)$	$\Vert$ 0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0 $\Vert$

f_6 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
De plus, pour tout $x \neq 0$, $f_6(-x) = (-x) \times \arctan\dfrac{1}{-x} = x \arctan\dfrac{1}{x}$ car arctan est impaire. Donc f_6 est paire. On réduit donc le domaine d'étude à $\mathbb{R}^+$.
Sa dérivée vaut, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f_6'(x) &= \arctan\frac{1}{x} + x \times \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \arctan\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

Il n'est pas évident de connaître le signe de f_6'. Pour tout $x \neq 0$, cette fonction est dérivable et on obtient, après calcul :

$$f_6''(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^2}$$

Ainsi, f_6' est strictement décroissante sur $]-\infty;\ 0[$ et sur $]0;\ +\infty[$.
Mais on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\dfrac{1}{x} = 0$ par composition et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x}{x^2+1} = 0$ en utilisant les techniques de levée d'indétermination.
On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_6'(x) = 0$ par somme et on en déduit ainsi que f_6' est positive sur $\mathbb{R}^+$.
Ainsi, f_6 est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+_*$.
De plus, $\lim\limits_{x\to0^+} \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan\dfrac{1}{x} = 0$. Par produit on obtient donc
$\lim\limits_{0^+} f_6 = 0$.
Pour la limite en $+\infty$, on fait le changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$, c'est à dire $x = \dfrac{1}{u}$, pour $x > 0$.

Dire que x tend vers $+\infty$ est équivalent à dire que u tend vers 0^+. On a ainsi :

$$x \arctan \frac{1}{x} = \frac{\arctan u}{u} = \frac{\arctan u - \arctan 0}{u - 0}$$

On reconnaît là un taux d'accroissement et on en déduit :

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{\arctan u}{u} = \frac{1}{1 + 0^2} = 1$$

Ainsi,

$$\lim_{u \to 0^+} f_6(x) = 1$$

Exercice 8

$\tan(\arcsin x)$ existe pour $\arcsin x \notin \left\{\frac{-\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right\}$, c'est à dire pour $x \notin \{-1;\ 1\}$.
Pour tout $x \in]-1;\ 1[$, on pose $u = \arcsin x$, de sorte que $\sin(u) = x$. On cherche à déterminer la valeur de $\tan(u)$.
Remarquons que $u \in \left]\frac{-\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$, de sorte que $\cos(u) > 0$. On peut donc écrire $\cos(u) = \sqrt{1 - \sin^2(u)} = \sqrt{1 - x^2}$.
Finalement, on a donc $\tan(\arcsin x) = \frac{\sin(u)}{\cos(u)} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$\sin(\arccos x)$ existe pour $x \in [-1;\ 1]$.
Pour tout $x \in [-1;\ 1]$, on pose $u = \arccos x$, ce qui donne $x = \cos u$. On cherche à déterminer $\sin(u)$.
Remarquons que $u \in [0;\ \pi]$, de sorte que $\sin(u) \geq 0$. On peut donc écrire $\sin(u) = \sqrt{1 - \cos(u)^2}$.
Finalement $\sin(\arccos x) = \sin(u) = \sqrt{1 - \cos(u)^2} = \sqrt{1 - x^2}$.

Avec la même méthode, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Exercice 9

L'expression $f(x)$ existe pour :
- $1 - x^2 \geq 0$, c'est à dire $x \in [-1;\ 1]$;
- $2x\sqrt{1 - x^2} \in [-1;\ 1]$.

Pour $x \in [-1;\ 1]$, résolvons l'inéquation :

$$\begin{aligned}
2x\sqrt{1 - x^2} \in [-1;\ 1] &\iff \left|2x\sqrt{1 - x^2}\right| \leq 1 \\
&\iff 4x^2(1 - x^2) \leq 1 \text{ car carré est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+ \\
&\iff -4x^4 + 4x^2 - 1 \leq 0 \\
&\iff -(2x^2 - 1)^2 \leq 0 \text{ ce qui est toujours vrai !}
\end{aligned}$$

Finalement le domaine de f est $[-1;\ 1]$.
L'allure de f nous pousse à poser pour tout $x \in [-1;\ 1]$, $\theta = \arcsin x$, c'est à dire $x = \sin\theta$. On a ainsi :

$$f(x) = \arcsin\left(2 \sin\theta \sqrt{1 - \sin^2\theta}\right)$$

Or $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$, ce qui donne $\cos\theta \geq 0$. Ainsi :

$$f(x) = \arcsin(2\sin\theta\cos\theta) = \arcsin(\sin(2\theta))$$

Il faut maintenant faire une disjonction de cas :

- Pour $2\theta \in \left[\frac{-\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right] \iff \theta \in \left[\frac{-\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$, on a $\arcsin(\sin(2\theta)) = 2\theta$.

  Ainsi, pour $x \in \left[\frac{-\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, on a
$$f(x) = 2\arcsin x$$
- Pour $2\theta \in \left]\frac{-\pi}{2};\ \pi\right] \iff \theta \in \left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\arcsin(\sin(2\theta)) = 2\theta - \pi$.

  Ainsi, pour $x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right]$, on a
$$f(x) = \pi - 2\arcsin x$$
- Par un raisonnement semblable, pour $x \in \left[-1;\ \frac{-\sqrt{2}}{2}\right[$, on a
$$f(x) = -\pi - 2\arcsin x$$

Exercice 10

1. On va utiliser le fait que $\cos(a) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$.

   L'égalité que l'on doit démontrer est équivalente à $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$.

   Or, on sait que $0 \leq \arccos x \leq \pi$, ce qui donne $-\pi \leq -\arccos x \leq 0$ et donc $\frac{-\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos x \leq \frac{\pi}{2}$.

   On peut donc appliquer sinus à cette égalité pour obtenir une égalité équivalente :

   $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \iff \sin\arcsin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) \iff x = \cos\arccos x$, ce qui est vrai.
2. Même stratégie. On va utiliser le fait que $\frac{1}{\tan(a)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$.

   L'égalité que l'on doit démontrer est équivalente à $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}$.

   Or, pour tout $x > 0$, $0 < \arctan\frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$, ce qui donne $-\frac{\pi}{2} < -\arctan\frac{1}{x} < 0$ et donc $0 < \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$.

   On peut donc appliquer tangente à cette égalité et obtenir une égalité équivalente :

   $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} \iff \tan\arctan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\right) \iff x = \frac{1}{\tan\arctan\frac{1}{x}} \iff x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$

   ce qui est vrai.
3. Une petite étude de signe de la fonction $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ nous montre qu'elle est positive sur $]-1;\ 1[$ donc l'égalité est bien valide.

   De plus, pour tout $x \in]-1;\ 1[$, on a $\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$. Sur cet intervalle cosinus est injectif.

   On a donc la série d'équivalences :
$$\begin{aligned}\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}\arccos x &\iff 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \arccos x\\ &\iff \cos\left(2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = x\\ &\iff 2\cos^2\left(\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) - 1 = x\end{aligned}$$

Or, on sait que $\cos^2(a) = \dfrac{1}{1+\tan^2(a)}$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}\arccos x &\iff 2\times\frac{1}{1+\tan^2\left(\arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)} - 1 = x\\
&\iff 2\times\frac{1}{1+\dfrac{1-x}{1+x}} - 1 = x\\
&\iff 2\times\frac{1}{\frac{2}{1+x}} - 1 = x\\
&\iff 1+x-1 = x
\end{aligned}$$

Ce qui est vrai !

> On a l'équivalence $\sin(u) = \sin(v) \iff u = v$ uniquement si u et v appartiennent à un intervalle sur lequel la fonction sinus est injective.
> Par exemple sur $[0;\ \pi[$, on n'a pas l'équivalence $\sin(u) = \sin(v) \iff u = v$ mais on l'a sur $\left[\dfrac{-\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.
> Le même genre de précautions s'imposent avec cosinus et tangente.

Exercice 11

a) Il faut $x \in [-1;\ 1]$ et $2x \in [-1;\ 1]$ en raison des domaines de définition de arcsin et arccos.
Ainsi, il faut $x \in \left[\frac{-1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$.
En raison des domaines images de ces deux fonctions, on en déduit aussi que $\arcsin(2x)$ et $\arccos(x)$ sont dans $\left[\frac{-\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right] \cap [0;\ \pi]$, c'est à dire $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
En particulier, x est forcément positif, c'est à dire dans $\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$.
Sur $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, sin est injective, on a donc les équivalences :

$$\arcsin(2x) = \arccos(x) \iff 2x = \sin\left(\arccos(x)\right)$$

Posons $u = \arccos(x)$. On sait que $u \in [0;\ \pi]$ et que $\cos(u) = x$. Or on cherche $\sin(u)$. Mais on sait que $\sin^2(u) = 1-\cos^2(u)$, ce qui donne $\sin(u) = \sqrt{1-x^2}$ car $u \in [0;\ \pi]$ (et donc $\sin(u) \geq 0$).
Finalement, on a

$$\arcsin(2x) = \arccos(x) \iff 2x = \sqrt{1-x^2}$$

Cette dernière équation a comme solution $\frac{\sqrt{5}}{5}$ qui est bien dans le domaine de validité.

b) Cette expression est définie pour $x+1 \in [-1;\ 1]$, c'est à dire $x \in [-2;\ 0]$, et $x \in [-1;\ 1]$. On raisonne donc pour tout $x \in [-1;\ 0]$.
Dans ce cas, $\arcsin(x+1) \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$.
On va maintenant réécrire cette équation de deux manières. D'une part,

$$\arcsin(x+1) - \arcsin x = \frac{\pi}{6} \iff \arcsin(x+1) = \frac{\pi}{6} + \arcsin x$$

Sachant que $\arcsin(x+1) \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et que $\arcsin(x) \in \left[\frac{-\pi}{2};\ 0\right]$, on en déduit que nécessairement, $\arcsin x \in \left[\frac{-\pi}{6};\ 0\right]$, c'est à dire $x \in \left[\frac{-1}{2};\ 0\right]$
D'autre part, on a aussi :

$$\arcsin(x+1) - \arcsin x = \frac{\pi}{6} \iff \arcsin(x+1) - \frac{\pi}{6} = \arcsin x$$

Toujours en raison des domaines d'appartenance de ces nombres, on a ainsi nécessairement, $\arcsin(x+1) \in \left[0;\ \frac{\pi}{6}\right]$, c'est à dire $x+1 \in \left[\frac{-1}{2};\ 0\right]$, soit $x \in \left[-1;\ \frac{-1}{2}\right]$.

Une solution appartient donc nécessairement à $\left[\frac{-1}{2};\ 0\right] \cap \left[-1;\ \frac{-1}{2}\right] = \left\{\frac{-1}{2}\right\}$. Mais il est clair que $x = \frac{-1}{2}$ n'est pas solution.

Cette équation n'a donc pas de solutions !

c) Cette expression est a priori définie sur $\mathbb{R}$.

x ne peut pas être négatif car dans ce cas, on aurait $\arctan(x) < 0$ et $\arctan(2x) < 0$ et donc $\arctan(x) + \arctan(2x) < 0$.

De même, x ne peut pas être supérieur à 1 car dans ce cas, on aurait $\arctan(x) > \dfrac{\pi}{4}$ et $\arctan(2x) > \dfrac{\pi}{4}$ et donc $\arctan(x) + \arctan(2x) > \dfrac{\pi}{2}$.

On doit donc supposer que $x \in [0;\ 1[$. Dans ce cas, les deux membres de l'égalité appartiennent à $\left]\frac{-\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ et on peut raisonner par équivalences en appliquant tangente :

$$\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4} \iff \tan\left(\arctan(x) + \arctan(2x)\right) = \tan\frac{\pi}{4}$$

Cette dernière égalité donne :

$$\begin{aligned} \tan\left(\arctan(x) + \arctan(2x)\right) = \tan\frac{\pi}{4} &\iff \frac{x + 2x}{1 - 2x^2} = 1 \\ &\iff \frac{2x^2 + 3x - 1}{1 - 2x^2} = 0 \end{aligned}$$

On obtient la seule solution valide $\dfrac{-3 + \sqrt{17}}{4}$.

d) On raisonne pour tout $x \in [-1;\ 1]$:

$$\begin{aligned} \arcsin x = \arccos\frac{1}{3} - \arccos\frac{1}{4} &\iff x = \sin\left(\arccos\frac{1}{3} - \arccos\frac{1}{4}\right) \\ &\iff x = \sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arccos\frac{1}{4}\right) - \cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right) \\ &\iff x = \frac{1}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{1}{16}} \\ &\iff x = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{15}}{12} \end{aligned}$$

e) On pose pour tout x, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. En étudiant cette fonction, on montre qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ et que ses valeurs sont dans l'intervalle $[-1;\ 1]$.

En particulier, on en déduit que $\arcsin\left(f(x)\right)$ existe pour tout x.

Et comme à la fois $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ et $\dfrac{\pi}{3}$ sont dans $\left[\frac{-\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, on peut raisonner par équivalences :

$$\arcsin\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right) = \frac{\pi}{3} \iff \frac{2x}{1 + x^2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff x^2\sqrt{3} - 4x + \sqrt{3} = 0$$

En résolvant cette dernière équation, on obtient les solutions $\sqrt{3}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

f) Notons que $(\arctan 2;\ \arctan 3) \in \left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[^2$ en raison du sens de variation de arctan.

En particulier, $\arctan 2 + \arctan 3 \in \left]\frac{\pi}{2};\ \pi\right[$. Ainsi, cette équation n'a pas de solutions !

Exercice 12

Pour tout $(a;\ b)$ tels que $a \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$, $b \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $a + b \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

Posons $a = \arctan(2)$ et $b = \arctan(5)$. On a donc :

$$\tan(a+b) = \frac{2+5}{1-10} = \frac{-7}{9}$$

$\arctan 2$ et $\arctan 7$ sont des nombres de $\left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$.
On en déduit que $a + b \in \left]\frac{\pi}{2};\ \pi\right[$ et donc :

$$a + b = -\arctan\frac{7}{9} + \pi$$

Posons enfin $c = \arctan(8)$. Là encore, $c \in \left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que $a + b + c \in \left]\frac{3\pi}{4};\ \frac{3\pi}{2}\right[$.
De plus, on a :

$$\tan(a+b+c) = \frac{\tan(a+b)+\tan(c)}{1-\tan(a+b)\tan(c)} = \frac{\frac{-7}{9}+8}{1+\frac{7}{9}\times 8} = 1$$

On en déduit que $a + b + c = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

Planche nº 8: Sommes, produits et récurrence

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. α est un réel. Calculer les sommes suivantes en utilisant la formule du binôme de Newton $(a+b)^n$ pour des nombres a et b bien choisis.

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$;

b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$;

c) $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$.

d) $\sum_{k=0}^{n} \alpha^k \binom{n}{k}$.

Exercice 2

En utilisant l'un des résultats de l'exercice précédent, retrouver le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Exercice 3

Pour tout $n \geq 2$, on pose $f_n : x \mapsto (1+x)^n$.

a) Donner la forme développée de f_n.

b) En dérivant ce résultat, déterminer :

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

c) En poursuivant ce procédé, déterminer :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}$$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer :

a) $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$;

b) $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$;

c) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$;

d) $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 5

1. Soit $(p,q,m) \in \mathbb{N}^3$ tel que $q \leq p \leq m$. En développant de deux façons différentes $(1+x)^m$, montrer la formule :

$$\binom{m}{p} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \binom{m-q}{p-k}.$$

2. En donner une interprétation combinatoire. (On pourra s'inspirer de l'interprétation combinatoire de la formule de Pascal.)

3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

Soient n et p des entiers naturels.

a) Montrer $\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}$

b) On suppose $n \geq p$. Montrer $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

Exercice 7

En calculant $(1+i)^{4n}$, déterminer les valeurs de

$$\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1}$$

Exercice 8

Calculer les sommes et produits suivants :

$$A = \sum_{i=1}^{4} i; \quad B = \sum_{i=0}^{6} 1; \quad C = \sum_{i=-3}^{3} 4; \quad D = \sum_{r=0}^{4} (r^2 - r + 1); \quad E = \prod_{k=0}^{4} k;$$

$$F = \prod_{k=1}^{4} k; \quad G = \prod_{j=1}^{3} 2; \quad H = \prod_{t=-10}^{10} t^3; \quad I = \prod_{p=-1}^{1} \cos \frac{p\pi}{4}; \quad J = \prod_{k=1}^{10} i.$$

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=2}^{n+1} k$; b) $\sum_{k=1}^{n} 2k$; c) $\sum_{k=n+1}^{2n} 2k$. d) $\sum_{k=0}^{n} e^{-k}$; e) $\sum_{k=n+1}^{2n} e^{-k}$.

Exercice 10

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\sum_{k=0}^{n} a_k = n(n+2)$.

1. Calculer les sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{k=0}^{6} a_k; \; S_2 = \sum_{k=0}^{n+1} a_k; \; S_3 = \sum_{k=0}^{2n} a_k; \; S_4 = \sum_{k=0}^{n} 2a_k; \; S_5 = \sum_{k=0}^{n} (a_k - 1); \; S_6 = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k.$$

2. Déterminer a_n en fonction de n.

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note S_n la somme des nombres impairs compris entre 0 et $2n+1$.

(a) Exprimer S_n à l'aide d'un symbole $\sum$.

(b) Montrer que $S_n = (n+1)^2$.

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$.

1. Calculer de deux façons différentes $\sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right)$.
2. En déduire la valeur de S_n.
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$.

Exercice 13

Calculer $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ puis $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-1)}\right)$.

Exercice 14

($\star$)

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2}$.

(b) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \geq \frac{m}{2}$.

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Calculer $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ et $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$. Que se passe-t-il si on commence le produit à 1 au lieu de 2 ?

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire à l'aide de factorielles les expressions suivantes.

a) $\prod_{i=1}^{n} (2i)$;

b) $\prod_{i=1}^{n} i^2$;

c) $\prod_{i=3}^{n} i^2$;

d) $\prod_{i=n+1}^{2n} i^2$;

e) $\prod_{i=1}^{n} (2i+1)$.

Exercice 17

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\prod_{k=0}^{n} e^{-k}$;

b) $\prod_{k=0}^{n} e^{(\sqrt{2}-k)}$;

c) $\prod_{k=0}^{n} 2^k$;

d) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$;

e) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k}$.

Exercice 18

Soit $(a;\ r) \in \mathbb{R}^2$. Montrer par récurrence que la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n + r \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + nr$.

Exercice 19

Soit $(a;\ q) \in \mathbb{R}^2$. Montrer par récurrence que la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = qu_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = aq^n$.

Exercice 20

Soit $a \geq 0$ un nombre. Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Exercice 21

Soit la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite.
2. Montrer que la suite vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n+1)$.

Exercice 22

Montrer par récurrence la formule du binôme de Newton :

$$\forall (a;\ b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exercice 23

Montrer par récurrence la formule des nombres triangulaires :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 24

Montrer par récurrence la formule des nombres pyramidaux :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Corrigé de la planche n° 8: Sommes, produits et récurrence

Exercice 1

a) 2^n

b) 0

c) 3^n

d) $(1+\alpha)^n$

Exercice 2

Soit un ensemble E de cardinal n. Parmi les sous-ensembles de E, il y a ceux :

- de cardinal 0, au nombre de $\binom{n}{0}$;
- de cardinal 1, au nombre de $\binom{n}{1}$;
- de cardinal 2, au nombre de $\binom{n}{2}$;
- ...
- de cardinal n, au nombre de $\binom{n}{n}$;

On en déduit :

$$\#\mathcal{P}(E) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Exercice 3

a) Pour tout x, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ (c'est le binôme de Newton).

b) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x :

$$f_n'(x) = n(1+x)^{n-1} \qquad \text{et aussi} \qquad f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

En prenant $x = 1$, on obtient $n2^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

c) Pour tout x, on a aussi :

$$f_n''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \qquad \text{et aussi} \qquad f_n''(x) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}$$

En prenant $x = 1$, on trouve $n(n-1)2^{n-2} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.

Exercice 4

a) **Méthode n° 1 :**

Le premier terme étant nul, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

Pour tout $k \in [\![1;\ n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= \frac{kn!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \end{aligned}$$

Or, $(n-k)! = (n-1-(k-1))!$ et $n! = n \times (n-1)!$. On a ainsi :

$$k\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Finalement, on peut réécrire la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \\ &= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\end{aligned}$$

On procède maintenant à un changement d'indice. On pose $k' = k-1$, c'est à dire $k = k'+1$. De plus, $k \in [\![1;\ n]\!] \iff k'[\![0;\ n-1]\!]$. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k'} = n2^{n-1}$$

Méthode n° 2 :

Soit la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$. Pour tout x, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Et en particulier, par dérivation de la somme :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$

Mais on a aussi :

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$$

Pour $x = 1$, on obtient donc l'égalité :

$$f'(1) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

b) On reprend la fonction f. f est dérivable deux fois. On a ainsi, pour tout x :

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

Pour $x = 1$, on obtient l'égalité :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

Travaillons sur le premier membre :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} &= \sum_{k=2}^{n} (k^2-k)\binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} k^2\binom{n}{k} - \sum_{k=2}^{n} k\binom{n}{k}\end{aligned}$$

Pour rappel, on cherche la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$. Or :

$$\sum_{k=2}^{n} k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} - 1^2 \binom{n}{1} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} - n$$

D'autre part, on a déjà calculé $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$. On en déduit :

$$\sum_{k=2}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} - 1 \binom{n}{1} = n2^{n-1} - n$$

À partir de ces deux calculs et en reprenant l'égalité de départ, on obtient par équivalences :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} &\iff \sum_{k=2}^{n} k^2 \binom{n}{k} - \sum_{k=2}^{n} k \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} \\
&\iff \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} - n - \left(n2^{n-1} - n\right) = n(n-1)2^{n-2} \\
&\iff \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n2^{n-2}\left(n-1+2\right) = n(n+1)2^{n-2}
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(3n-1)2^{n-2}$$

Pour rappel, on peut toujours tester la formule pour éviter les erreurs de calcul grossières. Par exemple pour $n = 3$:

$$1^2\binom{3}{1} + 2^2\binom{3}{2} + 3^2\binom{3}{3} = 3 + 4 \times 3 + 9 = 24 = 3 \times 2 \times 2^{3-2}$$

Ce test valide la formule au rang 3.

c) Ici, on peut appliquer une technique similaire à la méthode n° 1 du a. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!\left((n+1)-(k+1)\right)!} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

On fait le changement d'indice $k' = k+1$. Ainsi, $k \in [\![0;\ n]\!] \iff k' \in [\![1;\ n+1]\!]$ et donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n+1}{k'} \\
&= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k'=0}^{n+1} \binom{n+1}{k'} - \binom{n+1}{0} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left(2^{n+1} - 1\right)
\end{aligned}$$

d) C'est à peu près la même chose que la question précédente ! Par des calculs similaires, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} &= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k'=0}^{n+1} (-1)^{k'-1} \binom{n+1}{k'} - (-1)^{-1} \binom{n+1}{0} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left(- \sum_{k'=0}^{n+1} (-1)^{k'} \binom{n+1}{k'} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left(-(1-1)^{n+1} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

On peut tester cette formule avec $n = 2$:

$$\frac{1}{1}\binom{2}{0} - \frac{1}{2}\binom{2}{1} + \frac{1}{3}\binom{2}{2} = 1 - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Exercice 5

Cet exercice est délicat et s'appuie sur la propriété suivante des fonctions polynômiales :
Deux fonctions polynômiales sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux, degré par degré.

> Une conséquence de cette proposition est que l'on peut procéder à des identifications de coefficients dans des égalités de fonctions polynômiales. D'ailleurs, nous avons déjà exploité cela lorsque nous avons factorisé des polynômes de degré trois grâce à une racine évidente.

1. On suit l'indication. D'une part :

$$(1+x)^m = \sum_{p=0}^{m} \binom{p}{m} x^p$$

   Et d'autre part :

$$\begin{aligned}
(1+x)^m &= (1+x)^q (1+x)^{m-q} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} x^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^{m-q} \binom{m-q}{k} x^k \right) \\
&= \left[\binom{q}{0} + \binom{q}{1} x + \cdots + \binom{q}{q} x^q \right] \times \left[\binom{m-q}{0} + \binom{m-q}{1} x + \cdots + \binom{m-q}{q} x^{m-q} \right]
\end{aligned}$$

   Dans cette dernière expression, le coefficient de degré $p \geq q$ obtenu par développement est donc :

$$\binom{q}{0} \times \binom{m-q}{p} + \binom{q}{1} \times \binom{m-q}{p-1} + \cdots + \binom{q}{q} \times \binom{m-q}{p-q} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \binom{m-q}{p-k}$$

   Mais, dans le développement direct obtenu par le binôme de Newton, le coefficient de degré p est aussi $\binom{m}{p}$. On obtient donc l'égalité recherchée, par identification des coefficients de degré p :

$$\binom{m}{p} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \binom{m-q}{p-k}$$

2. Considérons un ensemble E de cardinal m et un sous-ensemble $F \subset E$ de cardinal q. Pour fabriquer un sous-ensemble de cardinal $p \geq q$, on peut :
   - choisir 0 éléments de F et p éléments de $E \backslash F$: il y a $\binom{q}{0}\binom{m-q}{p}$ manières de faire ;
   - choisir 1 éléments de F et $p-1$ éléments de $E \backslash F$: il y a $\binom{q}{1}\binom{m-q}{p-1}$ manières de faire ;
   - $\cdots$
   - choisir q éléments de F et $p-q$ éléments de $E \backslash F$: il y a $\binom{q}{q}\binom{m-q}{p-q}$ manières de faire.

   Finalement il y a en tout $\binom{q}{0}\binom{m-q}{p} + \binom{q}{1}\binom{m-q}{p-1} + \cdots + \binom{q}{q}\binom{m-q}{p-q}$ sous-ensembles à p éléments de E. On obtient la formule escomptée.

3. On obtient le résultat en appliquant la formule avec $m = 2n$, $p = n$ et $q = n$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2n-n}{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \text{ car } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Exercice 5

a) Par récurrence sur n.

On pose, pour tout n, P_n : $\sum_{0\leq k\leq n}\binom{p+k}{k}=\binom{p+n+1}{n}$.

Initialisation :

P_0 s'écrit : $\sum_{0\leq k\leq 0}\binom{p+k}{k}=\binom{p+0+1}{0}\iff 1=1$, ce qui est vrai.

Hérédité :

Pour un certain entier n, on suppose P_n vraie, c'est à dire $\sum_{0\leq k\leq n}\binom{p+k}{k}=\binom{p+n+1}{n}$. Travaillons sur la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq k\leq n+1}\binom{p+k}{k}&=\sum_{0\leq k\leq n}\binom{p+k}{k}+\binom{p+n+1}{n+1}\\&=\binom{p+n+1}{n}+\binom{p+n+1}{n+1}\text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\&=\binom{p+n+2}{n+1}\text{ d'après la formule du triangle de Pascal.}\end{aligned}$$

On obtient donc bien $\sum_{0\leq k\leq n+1}\binom{p+k}{k}=\binom{p+n+2}{n+1}$, ce qui correspond à P_{n+1}.

Conclusion :

La formule est initialisée et héréditaire donc, par récurrence, vraie pour tout n.

b) Par récurrence sur n.

On pose, pour tout n, Q_n : $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$. Attention, ici l'initialisation commence avec $n=p$.

Initialisation :

Q_p s'écrit : $\sum_{k=p}^{p}\binom{k}{p}=\binom{p+1}{p+1}\iff 1=1$, ce qui est vrai.

Hérédité :

Pour un certain entier n, on suppose Q_n vraie, c'est à dire $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$. Travaillons là encore sur la somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p}&=\sum_{0\leq k\leq n}\binom{k}{p}+\binom{n+1}{p}\\&=\binom{n+1}{p+1}+\binom{n+1}{p}\text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\&=\binom{n+2}{p+1}\text{ d'après la formule du triangle de Pascal.}\end{aligned}$$

On obtient donc bien $\sum_{k=p}^{n+1}\binom{k}{p}=\binom{n+2}{p+1}$, ce qui correspond à Q_{n+1}.

Conclusion :

La formule est initialisée et héréditaire donc, par récurrence, vraie pour tout n.

Exercice 8

$A = 10$	$B = 7$	$C = 28$	$D = 25$	$E = 0$
$F = 24$	$G = 8$	$H = 0$	$I = \dfrac{1}{2}$	$J = i^{10}$

Exercice 9

a) $\dfrac{n(n+3)}{2}$ b) $n(n+1)$ c) $n(3n+1)$ d) $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-(n+1)}}{1-\mathrm{e}^{-1}}$ e) $\mathrm{e}^{-(n+1)}$ $\times$ $\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{1-\mathrm{e}^{-1}}\right)$

Exercice 12

1. Calculons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)$ d'une première manière. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right) &= \cancel{1^3}-0^3+\cancel{2^3}-\cancel{1^3}+\cancel{3^3}-\cancel{2^3}+\cdots+(n+1)^3-\cancel{n^3}\\ &= (n+1)^3\end{aligned}$$

Mais, d'autre part, pour tout $k \in [\![0;\ n]\!]$, on a $(k+1)^3-k^3 = 3k^2+3k+1$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(3k^2+3k+1\right)\\ &= 3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1\\ &= 3S_n+3\frac{n(n+1)}{2}+n\end{aligned}$$

2. La question précédente permet d'obtenir l'égalité :

$$(n+1)^3 = 3S_n+3\frac{n(n+1)}{2}+n \iff S_n = \frac{(n+1)^3-\frac{3n(n+1)}{2}-n}{3}$$

Un peu de calcul permet d'obtenir :

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k(k+1) &= \sum_{k=0}^{n}k^2+\sum_{k=0}^{n}k\\ &= S_n+\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{n(n+1)}{6}\left[(2n+1)+3\right]\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

Exercice 16

a) $2^n \times n!$

b) $(n!)^2$

c) $\dfrac{(n!)^2}{4}$

d) $\dfrac{(2n!)^2}{(n!)^2}$

e) $\dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}$

Exercice 18

Pour tout n, on pose $P_n : u_n = a + nr$.

Initialisation :
P_0 s'écrit $u_0 = a + 0 \times r = a$, ce qui est vrai.

Hérédité :
On suppose P_n vraie pour un certain rang n.
Au rang $n+1$, on exploite l'hypothèse de récurrence et la définition de la suite :

$$u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion :
(P_n) est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout n.

Exercice 19

Pour tout n, on pose $P_n : u_n = aq^n$.

Initialisation :
P_0 s'écrit $u_0 = aq^0 = a$, ce qui est vrai.

Hérédité :
On suppose P_n vraie pour un certain rang n.
Au rang $n+1$, on exploite l'hypothèse de récurrence et la définition de la suite :

$$u_{n+1} = qu_n = qaq^n = aq^{n+1}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion :
(P_n) est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout n.

Exercice 20

Pour tout n, on pose $P_n : (1+a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation :
P_0 s'écrit $(1+a)^0 \geq 1 + 0 \times a \iff 1 \geq 1$, ce qui est vrai.

Hérédité :
On suppose P_n vraie pour un certain rang n.
Au rang $n+1$, on exploite l'hypothèse de récurrence, sachant que le nombre $(1+a)$ est positif.

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a)$$

Or, $(1+na)(1+a) = 1+na+a+na^2 = 1+(n+1)a+na^2$. Or $na^2 \geq 0$. On en déduit, $(1+na)(1+a) \geq 1+(n+1)a$.
Finalement, on a

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) \geq 1 + (n+1)a$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion :
(P_n) est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout n.

Exercice 21

On répond directement à la seconde question.
Pour tout n, on pose $P_n : u_n = n(n+1)$.

Initialisation :
P_0 s'écrit $u_0 = 0 \times 1$, ce qui est vrai.

Hérédité :
On suppose P_n vraie pour un certain rang n.
Au rang $n+1$, on exploite l'hypothèse de récurrence et la définition de la suite.

$$u_{n+1} = u_n + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

Conclusion :
(P_n) est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout n.

Planche n° 9: Géométrie dans l'espace

Dans toute la feuille, sauf indication contraire, l'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Exercice 1

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ quatre vecteurs. Calculer $\det(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{w}, \vec{u} \wedge \vec{t})$.

Exercice 2

Déterminer une base orthonormale directe dont le premier vecteur est colinéaire au vecteur $(-1, 2, -2)$.

Exercice 3

Pour quelles valeurs de a les vecteurs $(1, 0, a)$, $(a, 1, 0)$ et $(0, a, 1)$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne ainsi qu'une représentation paramétrique du plan considéré :

1. $\mathcal{P}_1$ est le plan passant par le point $A(4, 3, 2)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u_1}(1, 1, -2)$ et $\vec{v_1}(-1, 3, 0)$;
2. $\mathcal{P}_2$ est le plan passant par le point $B(5, 7, -1)$ et orthogonal au vecteur $\vec{u_2}(2, 3, 3)$;
3. $\mathcal{P}_3$ est le plan passant par les les points $C(-4, 1, 2)$, $D(-1, -1, -1)$ et $E(0, 2, -1)$;
4. $\mathcal{P}_4$ est le plan dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2 + \lambda - 2\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = 1 + 2\lambda + \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$

Exercice 5

1. Les points $A(-4, 1, 2)$, $B(-1, -1, -1)$, $C(0, 2, -1)$ et $D(-5, 2, 0)$ sont-ils coplanaires ?
2. Les points $E(-4, 1, -2)$, $F(1, -1, 1)$ et $G(11, -5, 7)$ sont-ils alignés ?

Exercice 6

Calculer le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$ dans les cas suivants :

1. A est le point de coordonnées $(1, 2, 1)$ et $\mathcal{P}$ est le plan passant par $B(-1, -1, -1)$ et dirigé par $\vec{u}(-2, 1, 2)$ et $\vec{v}(3, 1, 0)$;
2. A est le point de coordonnées $(-3, 1, 0)$ et $\mathcal{P}$ est le plan passant par $C(-1, 4, 2)$ et orthogonal à $\vec{w}(-2, 3, 1)$;
3. A est le point de coordonnées $(1, 0, 3)$ et $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne $3x + 3y - 2z + 6 = 0$.

Exercice 7

Dans chacun des cas suivant, dire si les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles et, si c'est le cas, calculer la distance qui les sépare par une méthode de projection orthogonale :

1. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont respectivement les plans d'équations $3x + 4y + 3z + 1 = 0$ et $3x + 4y + 4z + 1 = 0$.
2. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont respectivement les plans d'équations $3x + 3y + 3z + 1 = 0$ et $3x + 3y + 3z + 3 = 0$.
3. $\mathcal{P}_1$ passe par $A_1(1, 1, 1)$, $\mathcal{P}_2$ passe par $A_2(3, 1, 1)$ et $\vec{u}(1, 1, 1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, déterminer un système d'équations cartésiennes ainsi qu'une représentation paramétrique de la droite considérée :

1. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par le point $A(4,-3,2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u_1}(3,1,-2)$;
2. $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par le point $B(5,0,-1)$ et orthogonale au plan d'équation $x-y+z-1=0$;
3. $\mathcal{D}_3$ est la droite passant par les les points $C(-4,1,2)$ et $D(-1,-1,-1)$.
4. $\mathcal{D}_4$ est la droite égale à l'intersection des plans d'équations $2x-y+z+2=0$ et $x-y-z-1=0$.

Exercice 9

Calculer le projeté orthogonal du point $M(1,3,-2)$ sur la droite $(D) : \begin{cases} x+y+z-2 &= 0 \\ 2x+y-5z &= 0 \end{cases}$.

Exercice 10

1. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $A(-1,0,3)$ sur la droite passant par $B(1,1,1)$ et dirigée par $\vec{u}(-1,2,3)$.
2. Déterminer les coordonnées du symétrique du point $B(-1,2,-1)$ par rapport au plan d'équation $x+2y-3z+1=0$.
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $M(\alpha,\beta,\gamma)$ sur le plan passant par $A(1,2,3)$, $B(0,1,5)$ et $C(2,3,4)$.

Exercice 11

Soient (D_1) et (D_2) les droites $(D_1) : \begin{cases} x+y &= 2 \\ y-2z &= 3 \end{cases}$ et $(D_2) : \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x-2y+3z &= a \end{cases}$.

1. (D_1) et (D_2) sont-elles parallèles ?
2. Déterminer a pour qu'elles soient coplanaire. Donner alors les coordonnées du point d'intersection de (D_1) et (D_2) et une équation du plan contenant (D_1) et (D_2).

Exercice 12

Déterminer une équation cartésienne des sphères suivantes :

1. la sphère $\mathcal{S}_1$ de centre $\Omega(1,3,-1)$ et de rayon 5 ;
2. la sphère $\mathcal{S}_2$ de diamètre $[A,B]$ avec $A(3,5,0)$ et $B(-1,1,1)$.

Exercice 13

Soient $\mathcal{S}$ la sphère de centre O et de rayon 5 et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+\sqrt{8}y-4z+12=0$.

1. Déterminer une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par O et orthogonale à $\mathcal{P}$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de la droite $\mathcal{D}$ et de la sphère $\mathcal{S}$.
3. Déterminer une équation des plans tangents à la sphère aux points A et B.

Exercice 14

Déterminer une équation cartésienne de la sphère contenant les cercles d'équations $\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$ et $\begin{cases} z=2 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$.

Exercice 15

Montrer qu'il existe une unique sphère contenant les cercles d'équations cartésiennes respectives : $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y^2+z^2-4y=0 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} z=1 \\ x^2+y^2-2x-4y+2=0 \end{array}\right.$. En déterminer une équation cartésienne.

Exercice 16

Soient A et B deux points distincts. Montrer que l'ensemble des points M tels que $AM = BM$ forme un plan dont on précisera un point et un vecteur normal.
Indication: On pourra par exemple raisonner sur le triangle ABM

Exercice 17

Écrire les fonctions Python suivantes :

- `produit_scal` qui prend en entrée deux listes, correspondant aux coordonnées de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé, et qui renvoie la valeur de $\vec{u} \cdot \vec{v}$;
- `norm` qui prend en entrée une liste, correspondant aux coordonnées de $\vec{u}$ dans un repère orthonormé, et qui renvoie la valeur de $\|\vec{u}\|$;
- `produit_vect` qui prend en entrée deux listes, correspondant aux coordonnées de deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ dans un repère orthonormé direct, et qui renvoie les coordonnées du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$;
- `aire` qui prend en entrée trois listes, correspondant aux coordonnées de trois points A, B et C dans un repère orthonormé, et qui renvoie l'aire du triangle ABC ;
- `equation` qui prend en entrée trois listes, correspondant aux coordonnées de trois points A, B et C dans un repère orthonormé, et qui renvoie, si possible, les coefficients a, b, c et d de l'équation cartésienne $ax + by + cz = d$ du plan $(A;\ B;\ C)$

Exercice 18

Soient A, B et C trois points distincts de l'espace. Déterminer les points M de l'espace pour lesquels $\overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}) = \vec{0}$.

Exercice 19

L'objectif de cet exercice est d'établir des formules de distance d'un point à un plan et d'un point à une droite. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k}\right)$.
Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient $(a;\ b\ c;\ d) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a;\ b;\ c) \neq (0;\ 0;\ 0)$. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $ax + by + cz = d$ et un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On note M' le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.
   (a) Donner un vecteur $\vec{n}$ normal du plan.
   (b) Montrer que, pour tout point A du plan, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{M'M} \cdot \vec{n}$.
   (c) En déduire que $MM' = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ puis déterminer une formule donnant la distance MM' en fonction de a, b, c, d et des coordonnées de M.
2. Soit une droite (D) passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{d}$. Soit un point M et M' le projeté orthogonal de M sur (D).
   (a) Montrer que $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{d} = \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{d}$.
   (b) En déduire une expression de la distance MM' en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}$.