Exercices de TSI 1

2018

Planche n$^{\text{o}}$ 1: Pour s'entraîner à la plage

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

(a) $x^2+1=2x$; (b) $x^2-x=\sqrt{2}(x+1)$; (c) $(x+1)(x^2+2x-3)=0$;

(d) $x^3=x$; (e) $x^3-39x+70=0$; (f) $x^3+6=3x+2x^2$;

(g) $x^3-2x=x^2-2$; (h) $x^3+2x^2-x=2$; (i) $x^3-x^2+x-1=0$;

(j) $x^4=2x^2$; (k) $x^4=1$; (l) $x^4+1=0$;

(m) $x^4-4x^2+3=0$; (n) $(x^3-x)^2-x^2=0$; (o) $\dfrac{1}{x}=2x+1$;

(p) $x^2=\dfrac{2}{x+1}$; (q) $\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{18}{x^2-4}$; (r) $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2-\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2=0$.

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $6x+5<-4x+3$; (b) $3x+2\geq 5x-1$; (c) $x^2<4x$;

(d) $(x+5)(x-2)\leq 0$; (e) $x(x+2)\leq 2x+6$; (f) $x^3<x$;

(g) $x^4\geq x^2$; (h) $(x^2+x+1)^2-4(x^2-x+1)^2>0$; (i) $x^4+2x^2-3<0$;

(j) $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{3}{x+2}>0$; (k) $\dfrac{x}{2-x}<1$; (l) $\dfrac{4-x}{7+x}\leq -1$;

(m) $\dfrac{2x+1}{x+1}\geq x$; (n) $\dfrac{x-2}{2x-2}<\dfrac{x-1}{x-5}$; (o) $\dfrac{x+3}{x-3}-\dfrac{x-3}{x+3}\leq\dfrac{36}{x^2-9}$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous de paramètre réel m :

(a) $(m-1)x+1=0$; (b) $2mx-3=x+5m$; (c) $x^2+mx-2m^2=0$;

(d) $x^4+2mx^2+1=0$; (e) $\dfrac{2x+1}{x+3}=m$; (f) $\dfrac{x-2m}{mx+5}=m-1$.

Exercice 4

Déterminer selon les valeurs du réel m le signe des trinômes suivants :

(a) $2x^2-mx-m^2$; (b) $mx^2+2(2m+1)x+1$.

Exercice 5

Comparer les expressions A et B suivantes :

(a) $A=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, $B=\sqrt{2}-1$; (b) $A=\sqrt{7}+3$, $B=\sqrt{3}+4$; (c) $A=\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $B=2$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

$$\text{(a) } \sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3}; \quad \text{(b) } \sqrt{x^2-3x-3} = x+2; \quad \text{(c) } \sqrt{1-2x} = x+1;$$

$$\text{(d) } \sqrt{x+1} < \sqrt{3-2x}; \quad \text{(e) } \sqrt{x^2+5x+3} < x+2; \quad \text{(f) } 2-x < \sqrt{x+1}.$$

Exercice 7

On rappelle que la *valeur absolue* d'un réel x est définie par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$ Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a) $|x| = 3$;
(b) $|x| = -2$;
(c) $|x| \leq 3$;
(d) $|x| \geq 3$;
(e) $|x| \geq -2$;
(f) $|x| - 2 \leq 4$;

(g) $|x-2| \leq 4$;
(h) $|x-2| \leq -4$;
(i) $|x^2-4| = 2$;
(j) $|x^2-8x+11| = 4$;
(k) $|x^2-8x+11| < 4$;
(l) $|x+1| = |2x-3|$;

(m) $|1-2x| = x+1$;
(n) $|x^2-3x-3| = x+2$;
(o) $|x^2+5x+3| < x+2$;
(p) $2-x < |x+1|$;
(q) $|x| + |x+1| = 2$;
(r) $|x-7| + |x-2| \leq 3$.

Exercice 8

Remplir le tableau suivant.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$					
$\cos x$					
$\tan x$					

Exercice 9

1. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. En remarquant que $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, calculer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

(a) $\sin(2x) = \sin(x)$; (b) $\cos(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(c) $\cos(x) = \sin(3x)$; (d) $\sin(x) = -\cos(x)$;

(e) $\tan(3x - \pi/5) = \tan(x + 4\pi/5)$; (f) $\sin(2x)(\sqrt{3} + 2\sin(2x)) = 0$;

(g) $\cos^2(x) - \frac{3}{2}\cos(x) + \frac{1}{2} = 0$; (h) $\cos(2x) + \cos(x) = 0$;

(i) $\cos(2x) - 3\cos(x) + 2 = 0$; (j) $\cos(2x) - \sin(x) = 1$;

(k) $1 + \sqrt{3}\sin(2x) - \cos(4x) = 0$; (l) $\sqrt{3}\tan(x) + 4\sin^2(x) = 0$;

(m) $\sin(2x) + \sin(6x) = \sin(4x)$; (n) $6\cos(2x) - 1 = 6\tan^2(x)$;

(o) $\cos(x) > \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; (p) $\sqrt{3 - 4\cos^2(x)} > 1 + 3\sin(x)$.

Exercice 11

Déterminer l'ensemble de définition, puis calculer la dérivée des fonctions suivantes.

(a) $f_1 : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-1}$;

(b) $f_2 : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$;

(c) $f_3 : x \mapsto \cos(2x) - \sin(3x)$;

(d) $f_4 : x \mapsto \exp(x^2 - 1)$;

(e) $f_5 : x \mapsto \dfrac{\cos^5(x)}{\ln x}$.

Exercice 12

On se place dans le plan complexe. Dans les cas suivants, préciser l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie l'équation ou le système d'équations. On pourra s'aider de dessins.

(a) $|z + \mathrm{i}| = 1$

(b) $|z| = |z - 1|$

(c) $\left\{ \begin{array}{lcl} \arg\left(z + \frac{1}{2};\ 1\right) & = & \frac{-\pi}{2} \\ |z| & = & 1 \end{array} \right.$

(d) $|z| = |z - 1| = 1$

Corrigé de la planche n° 1: Pour s'entraîner à la plage

Exercice 1

Voici les solutions de ces équations :

(a) $\{1\}$;
(b) $\left\{\dfrac{\sqrt{2}+1+\sqrt{6\sqrt{2}+3}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}+1-\sqrt{6\sqrt{2}+3}}{2}\right\}$;
(c) $\{-1;\ 3\}$;
(d) $\{0;\ -1;\ 1\}$;
(e) $\{2;\ 5;\ -7\}$;
(f) $\left\{2;\ -\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right\}$;
(g) $\left\{1; -\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right\}$;
(h) $\{1;\ -1;\ -2\}$;
(i) $\{1\}$;
(j) $\left\{0;\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2}\right\}$;
(k) $\{1;\ -1\}$;
(l) $\varnothing$;
(m) $\left\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3};\ -1;\ 1\right\}$;
(n) $\left\{0;\ -\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right\}$;
(o) $\left\{\dfrac{1}{2};\ -1\right\}$;
(p) $\{1\}$;
(q) $\left\{-\dfrac{9}{4}\right\}$;
(r) $\{0\}$.

Exercice 2

Voici les solutions de ces inéquations :

(a) $\left]-\infty;\ -\dfrac{1}{5}\right[$;
(b) $\left]-\infty;\ \dfrac{3}{2}\right]$;
(c) $]0;\ 4[$;
(d) $[-5;\ 2]$;
(e) $\left]-\sqrt{6};\ \sqrt{6}\right]$;
(f) $]-\infty;\ -1[\cup]0;\ 1[$;
(g) $]-\infty;\ -1[\cup\{0\}\cup[1;\ +\infty[$;
(h) $\left]\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$;
(i) $]-1;\ 1[$;
(j) $]-11;\ -2[\cup]1;\ +\infty[$;
(k) $]-\infty;\ 1[\cup]2;\ +\infty[$;
(l) $]-\infty;\ -7[$;
(m) $]-\infty;\ -1]\cup\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$;
(n) $\left]-\infty;\ \dfrac{-\sqrt{41}-3}{2}\right[\cup\left]1;\ \dfrac{\sqrt{41}-3}{2}\right[\cup]5;\ +\infty[$;
(o) $]-\infty;\ -3[$.

Exercice 10

On donne les mesures principales des solutions, toutes définies à un multiple entier de 2π près.

a) $\left\{0;\ \pi;\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right\}$
b) $\left[\frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6}\right]$
c) $\left\{\frac{-7\pi}{8};\ \frac{-3\pi}{8};\ \frac{\pi}{8};\ \frac{5\pi}{8};\ \frac{-3\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right\}$
d) $\left\{\frac{-\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right\}$
e) $\left\{\frac{-\pi}{2};\ 0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi\right\}$
f) $\left\{\frac{-\pi}{2};\ 0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi;\ \frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}\right\}$
g) $\left\{0;\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right\}$
h) $\left\{\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{\pi}{3};\ \pi\right\}$

i) $\left\{0;\ \frac{-\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right\}$

j) $\left\{\frac{-5\pi}{6};\ \frac{-\pi}{6};\ \pi\right\}$

k) $\left\{\frac{-\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{-\pi}{2};\ \frac{-\pi}{2};\ \pi\right\}$

l) $\left\{\frac{-\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ 0;\ \pi\right\}$

m) $\left\{\frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{-5\pi}{6};\ \frac{\pi}{6};\ \frac{-3\pi}{4};\ \frac{-\pi}{2};\ \frac{-\pi}{4};\ 0;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4};\ \pi\right\}$

n) $\left\{\frac{-5\pi}{6};\ \frac{\pi}{6};\ \frac{-\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right\}$

o) $\left[\frac{-11\pi}{12};\ \frac{\pi}{12}\right]$

p) $\left[\frac{-5\pi}{6};\ \frac{-\pi}{6}\right]$

Planche n$^{\text{o}}$ 2: Logique

Exercice 1

Soient P et Q deux propositions. Montrer, en écrivant les tables de vérité, que les propositions « $P \Longrightarrow Q$ » et « non P ou Q » sont équivalentes.
De même, montrer que les propositions « $P \Longleftrightarrow Q$ » et « $(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$ »sont équivalentes.

Exercice 2

Soient P, Q et R trois propositions. À l'aide de tables de vérités, montrer les équivalences des propositions suivantes :

a) $(P \vee Q) \Longrightarrow R$ et $(P \Longrightarrow R) \wedge (Q \Longrightarrow R)$

b) $(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R) \wedge (R \Longrightarrow P)$ et $(P \Longleftrightarrow Q) \wedge (Q \Longleftrightarrow R)$

Exercice 3

Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux puis écrire la négation de ceux qui sont faux.

(a) $1+1=2$ et $5+2=6$
(b) $1+1=2$ ou $5+2=6$
(c) $1+1=2 \Longrightarrow 5+2=6$
(d) $5+2=6 \Longrightarrow 1+1=2$
(e) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2$

(f) $\exists x \in \mathbb{R}, x \neq 2$
(g) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
(h) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1$
(i) $\exists y \in]0,+\infty[, \ln y = 1$
(j) $\exists! z \in \mathbb{R}, \cos z = 0$

(k) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$
(l) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \geq -x^2$
(m) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \geq -x^2$
(n) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \geq -x^2$
(o) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \geq -x^2$

Exercice 4

Soit x un réel. Dans chacun des cas suivants, écrire le lien logique entre les deux propriétés (sens de l'implication ou équivalence).

a) $x^2 = 1$ et $x = 1$;
b) $x \geq 1$ et $x \geq 2$;
c) $x \leq 1$ et $x = 1$;
d) $x > 1$ et $x = 1$;
e) $x + 3 \geq 4$ et $x \geq 1$;
f) $x^3 = 2x^2$ et $x = 2$;

g) $x \leq -2$ et $x^2 \geq 4$;
h) $x \geq 2$ et $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$;
i) $x \leq -1$ et $\dfrac{1}{x} \geq -1$;
j) $x \geq 3$ et $x^2 \geq 3x$;
k) $x \geq -3$ et $x^2 \geq -3x$.

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, comprendre le sens des deux phrases proposées et déterminer leur valeur de vérité.

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, n \leq N$.
   (b) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, n \leq N$.

2. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)$.
   (b) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x)$.

Exercice 6

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.

1. Traduire les propositions suivantes en langage naturel et les interpréter.
   (a) $\forall u, v \in \mathbb{R},\ u \leq v \Longrightarrow f(u) \leq f(v)$
   (b) $\exists x_0 \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq f(x_0)$
   (c) $\exists x_0 \in \mathbb{R} / f(x_0) = 1$
   (d) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
2. En s'inspirant de la question précédente, traduire les propositions suivantes en langage formel (à l'aide des quantificateurs)
   (a) N'importe quel nombre compris entre 2 et 3 possède un antécédent par f.
   (b) f est une fonction constante.
   (c) f n'est pas une fonction constante.
   (d) f est une fonction polynôme du second degré.
   (e) f est décroissante.

Exercice 7

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Écrire en langage formel les propositions suivantes :

(a) A et B ne sont pas disjointes.
(b) Il y a un et un seul élément commun à A et B.
(c) A n'est pas incluse dans B.
(d) A et B sont complémentaires.

Exercice 8

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer les propositions suivantes :

(a) $(A^c)^c = A$.
(b) $A \subset B \Longrightarrow B^c \subset A^c$.
(c) $A \cap B^c = A \cap C^c \Longleftrightarrow A \cap B = A \cap C$.
(d) $((A \cap B) \subset (C \cap B)) \wedge ((A \cup B) \subset (C \cup B)) \Longrightarrow (A \subset C)$.
(e) $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A$.

Exercice 9

Soient x et y deux nombres réels. Montrer :

(a) $x + y \geq 1 \Longrightarrow ((x \geq 1/2)$ ou $(y \geq 1/2))$.
(b) $x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow ((x = 0)$ et $(y = 0))$.

Indication: On pourra raisonner par contraposée. Les propositions réciproques sont-elles vraies ?

Exercice 10

Montrer qu'un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair. Quelle proposition peut-on en déduire concernant les nombre impairs ?

Exercice 11

Nadia est prisonnière d'un roi logicien qui lui propose comme défi de deviner la couleur des cheveux de ses enfants. Il aligne donc devant elle ses cinq enfants, cheveux cachés et lui annonce :
« Parmi mes enfants, trois sont blonds et les autres sont bruns. Ceux qui sont blonds mentent toujours tandis que les bruns disent toujours la vérité. Pourras-tu en un minimum de questions, deviner la couleurs des cheveux de mes enfants ? »

Nadia accepte le défi, se présente devant le premier enfant et lui demande « de quelle couleur sont tes cheveux ? »
Cet enfant lui répond en langage des signes, langue que Nadia ne maîtrise pas mais que connaissent les autres frères.
Puis elle se présente devant le second enfant et lui demande « qu'a répondu ton frère ? ». Celui-ci dit « il a répondu "mes cheveux sont blonds." »
Enfin, elle va vers le troisième enfant et lui demande « quelle est la couleur des cheveux des deux personnes précédentes ? ». Celui-ci répond « la première a les cheveux bruns tandis que la seconde est blonde. »

Nadia annonce alors au roi connaître la couleur des cheveux de tous ses enfants. Comment est-ce possible ?

Planche n° 3: Applications et dénombrement

Exercice 1

Soient f et g les fonctions réelles à valeurs réelles définies par $f(x) = x+1$ et $g(x) = \dfrac{x^2+x}{x}$. Les fonctions f et g sont-elles égales ?

Exercice 2

1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array} \right.$. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Mêmes questions pour l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{array} \right.$
3. Déterminer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 3

(Démonstration d'un théorème du cours)
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Montrer que f est bijective et que g est la réciproque de f.

Exercice 4

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. On suppose que $g \circ f$ est injective sur E. Montrer que f est injective sur E.
   L'application g est-elle nécessairement injective ?
2. On suppose que $g \circ f$ est surjective de E sur G. Montrer que g est surjective de F sur G.
   L'application f est-elle nécessairement surjective ?
3. Soit $h : G \longrightarrow H$ une application.
   Montrer que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g et h sont bijectives.
4. Soit $\varphi : E \longrightarrow E$ une application telle que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_E$ (on dit que φ est *involutive*).
   Montrer que φ est bijective. Que vaut sa réciproque φ^{-1} ?

Exercice 5

Soient $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} n-1 & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$.
Montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Peut-on en déduire que l'application g est la réciproque de f ?

Exercice 6

1. Déterminer l'image directe par la fonction sinus de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $[0, 2\pi]$,$[0, \pi/2]$, $[-\pi, \pi/2]$.
2. Déterminer l'image réciproque par la fonction sinus de $[-1, 1]$, $[0, 1]$,$[3, 4]$, $\mathbb{R}$, $\{1\}$, $\{-1, 1\}$.

Exercice 7

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2 - 4x + 1 \end{array} \right.$.

1. La fonction f est-elle injective sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que f est injective sur $[1, +\infty[$. En déduire que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur son image (que l'on précisera) et déterminer son application réciproque.
3. Déterminer $f([0,1])$, $f(\mathbb{R}_-)$, $f(\mathbb{R}_+)$, $f([-2,2])$, $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}([0,1])$, $f^{-1}([-2,1])$.

Exercice 8

Dans un sac contenant n billes numérotées, on prélève k billes (avec $k \leq n$) simultanément.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de tirages possibles :
   (a) contenant la bille 1 ;
   (b) ne contenant pas la bille n° 1.
3. Quel résultat retrouve-t-on ?

Exercice 9

Soient A, B et C trois ensembles finis. Montrer que l'on a

$$\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C) - \mathrm{Card}(B \cap C) + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C).$$

Application. Dans un lycée, il y a 800 élèves. 300 sont des garçons, 352 font partie d'une association, 424 étudient l'anglais, 188 garçons font partie d'une association, 166 garçons étudient l'anglais, 208 font partie d'une association et étudient l'anglais, 144 garçons étudient l'anglais et font partie d'une association. Combien y a-t-il de filles qui ne font pas partie d'une association et n'étudient pas l'anglais ?

Exercice 10

Une course oppose 12 hommes d'affaire.

- Déterminer le nombre de tiercés possibles (l'ordre est important).
- Déterminer le nombre de trios possibles (l'ordre n'est pas pris en compte).

Exercice 11

On colore les faces d'un cube en rouge puis on découpe ce cube en 27 petits cubes de même taille que l'on place dans un sac.

1. Faire l'inventaire des petits cubes selon le nombre de faces colorées.
2. On tire avec remise 3 petits cubes. Déterminer le nombre de tirages donnant :
   (a) exactement 3 cubes ayant chacun deux faces rouges ;
   (b) exactement 2 cubes ayant chacun deux faces rouges ;
   (c) exactement 1 cube possédant deux faces rouges ;
   (d) un nombre total de faces rouges égal à quatre.

Exercice 12

Soit E l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun 1.

1. Déterminer le cardinal de E.
2. Déterminer le cardinal de E_1, la partie de E constituée des nombres ayant 7 chiffres différents.
3. Déterminer le cardinal de E_2, la partie de E constituée des nombres pairs.
4. Déterminer le cardinal de E_3, la partie de E constituée des nombres dont la suite des chiffres (dans l'ordre où ils sont écrits) est strictement croissante.

Exercice 13

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

1. sans imposer de contraintes sur les cartes ?
2. contenant 5 cœurs ou 5 trèfles ?
3. contenant 2 cœurs et 3 trèfles ?
4. contenant au moins un as ?
5. contenant au plus un as ?
6. contenant 2 as et 3 cœurs ?

Exercice 14

On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique et 3 de SI. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement

1. si les livres doivent être groupés par matières ?
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés ?

Exercice 15

Déterminer le nombre d'anagrammes des mots « maths », « rire » et « ananas ».

Exercice 16

Combien y a-t-il de façons de ranger p couteaux (identiques) dans n tiroirs ?

Exercice 17

Vous êtes 26 élèves dans la classe. Je parie que deux d'entre vous (au moins) ont la même date d'anniversaire. Quelles sont mes chances d'avoir raison ?

Exercice 18

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Déterminer le nombre de parties de E de cardinal pair (proposer une conjecture et la démontrer par récurrence).

Exercice 19

Soit E un ensemble fini. Calculer $\sum\limits_{A \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(A)$.

Exercice 20

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On note $S(n,p)$ le nombre de surjection d'un ensemble de cardinal n dans un ensemble de cardinal p.

1. Calculer $S(n,p)$ pour $p > n$, $S(n,n)$, $S(n,1)$, $S(n,2)$.
2. Calculer $S(n+1,n)$.
3. Démontrer que pour tout $n > 1$ et tout $p > 1$, on a $S(n,p) = pS(n-1,p) + S(n-1,p-1)$.

Planche n° 4: Géométrie du plan

Exercice 0

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
Déterminer les coordonnées polaires des points suivants. *On pourra utiliser la fonction* arctan.

$$A\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$
$$D\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix} \qquad E\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-3\end{pmatrix} \qquad F\begin{pmatrix}1/2\\1/3\end{pmatrix}$$
$$G\begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix} \qquad H\begin{pmatrix}\sqrt{3}/5\\1/\left(10\sqrt{3}\right)\end{pmatrix} \qquad I\begin{pmatrix}-1/2\\-1/3\end{pmatrix}$$

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère quelconque $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et le point $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

1. Justifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de A dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère quelconque $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et le point $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

1. Justifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. On cherche à déterminer les valeurs de x et y telles que $x\vec{u}+y\vec{v}=\overrightarrow{OA}$
   (a) Montrer que pour tout x et y, $x\vec{u}+y\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.
   (b) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont-ils colinéaires ?
   (c) Conclure quant au nombre de solutions $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de ce problème.
3. On cherche à résoudre le système
$$\begin{cases} x+2y &= 2\\ 2x+4y &= 3\end{cases}$$
   (a) Montrer que ce système est équivalent au problème posé à la question précédente puis le résoudre.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère quelconque $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 2x+3y &= 4\\ x-y &= 1\end{cases}$$

1. Montrer que résoudre ce système est équivalent à trouver les valeurs de x et y telles que $x\vec{u}+y\vec{v}=\overrightarrow{OA}$. On précisera les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et A.
2. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
3. Résoudre le système.

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère le point $\Omega(-1,1)$ et les vecteurs $\vec{u}(1,2)$ et $\vec{v}(3,-2)$.

1. Montrer que $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ est un repère. Est-il orthonormal ? direct ?
2. On note $\vec{a}$ le vecteur de coordonnées $(2,2)$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$. Déterminer les coordonnées de $\vec{a}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
3. On note A le point de coordonnées $(1,2)$ dans $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$.. Déterminer les coordonnées de B dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
4. On note $\vec{b}$ le vecteur de coordonnées $(2,2)$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.
5. On note B le point de coordonnées $(2,-3)$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Déterminer les coordonnées de B dans $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$.
6. Déterminer une équation dans $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ du cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 5

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On note $\vec{u}_\theta$ et $\vec{v}_\theta$ les vecteurs de coordonnées respectives $(\cos\theta,\sin\theta)$ et $(-\sin\theta,\cos\theta)$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Montrer que $(\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta)$ est une base orthonormale directe du plan.
2. Soit M un point. On note (x,y) ses coordonnées dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et (x_θ,y_θ) ses coordonnées dans $(O,\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta)$. .
   (a) Exprimer x et y en fonction de x_θ et y_θ.
   (b) Exprimer x_θ et y_θ en fonction de x et y .

Exercice 6

On munit le plan d'un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$. On considère les points $A(1,3)$, $B(3,2)$, $C(2,2)$, $D(1,1)$, $E(-1,1)$ et $F(1,0)$. Déterminer les produits scalaires et les déterminants suivants :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE},\quad \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{DE}),\quad \det(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BE}),\quad \det(\overrightarrow{BE}-7\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}),\quad \det(2\overrightarrow{AB}-5\overrightarrow{AC},\overrightarrow{EF}).$$

Exercice 7

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
Soient les points $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation paramétrique et une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC issue du point C.
2. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[BC]$.
3. Déterminer une équation paramétrique de la médiane issue de C.

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne ainsi qu'une représentation paramétrique de la droite considérée :

1. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par le point $A(4,3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u_1}(1,1)$.
2. $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par le point $B(5,7)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u_2}(2,3)$.
3. $\mathcal{D}_3$ est la droite passant par le point $C(0,3)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n_3}(2,2)$.
4. $\mathcal{D}_4$ est la droite passant par le point $D(-2,-1)$ et orthogonale au vecteur $\vec{n_4}(-1,3)$.
5. $\mathcal{D}_5$ est la droite passant par les points de coordonnées $E(-4,1)$ et $F(0,2)$.

Exercice 9

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère le point $M(-1,1)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de M sur

1. $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $3x-2y+1=0$;
2. $\mathcal{D}_2$ la droite passant par le point $A(-1,2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u_1}(1,1)$;
3. $\mathcal{D}_3$ la droite passant par le point $B(3,4)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}(2,2)$;
4. $\mathcal{D}_4$ la droite passant par les points de coordonnées $C(-4,1)$ et $D(0,2)$.

Exercice 10

Calculer la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ dans les cas suivants :

1. A est le point de coordonnées $(1,2)$ et $\mathcal{D}$ est la droite passant par $B(-1,-1)$ et dirigée par $\vec{u}(-2,1)$;
2. A est le point de coordonnées $(-3,1)$ et $\mathcal{D}$ est la droite passant par $C(-1,4)$ et normale à $\vec{v}(-2,3)$;
3. A est le point de coordonnées $(0,3)$ et $\mathcal{D}$ est la droite d'équation cartésienne $3x-y+2=0$.

Exercice 11

Dans les cas suivants déterminer les intersections de D_1 et D_2 si elles existent.

a) D_1 passe par le point $A_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et est dirigée par le vecteur $\vec{d_1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ tandis que D_2 passe par le point $A_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et est dirigée par le vecteur $\vec{d_2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

b) D_1 passe par le point $A_1\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}$ et est dirigée par le vecteur $\vec{d_1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ tandis que D_2 a pour équation cartésienne $2y+3x=-1$.

c) D_1 a pour équation cartésienne $y=-x+5$ tandis que D_2 a pour équation cartésienne $2y+2x=3$.

Exercice 12

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(1,1)$, $B(2,3)$ et $C(4,0)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC, puis donner une équation de ce cercle.
3. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.
4. Déterminer les coordonnées du centre de gravité G de ABC.
5. Montrer que Ω, H et G sont alignés.

Exercice 13

Soient $A(-2,4)$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'équations respectives $x+2y+3=0$ et $3x+2y+1=0$. Déterminer

1. les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (s'il existe) ;
2. les coordonnées du projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$;
3. une équation cartésienne de la droite symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à A ;
4. une équation cartésienne de la droite symétrique de $\mathcal{D}'$ par rapport à $\mathcal{D}$;
5. une équation cartésienne des bissectrices de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Exercice 14

Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique des cercles suivants :

1. le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $\Omega(1,3)$ et de rayon 5 ;
2. le cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre $[A,B]$ avec $A(2,5)$ et $B(-1,1)$;
3. le cercle circonscrit au triangle ABC où $A(0,0)$, $B(2,1)$ et $C(2,3)$.

Exercice 15

Déterminer le centre et le rayon des cercles d'équation cartésienne

1. $x^2+y^2-4x+4y-1=0$.
2. $2x^2+2y^2-12x+16y=-48$.
3. $2x^2+2y^2-12x+16y=-52$.
4. $x^2+y^2+a(3a-4x)+b(b+2y)=0$.

Exercice 16

Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A(1,0)$ et de rayon 2 et $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $x-y-1=0$. Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, ainsi qu'une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en ces points.

Exercice 17

Déterminer une équation des droites passant par $A(2,1)$ et tangentes au cercle de centre $B(1,-1)$ et de rayon 1.

Exercice 18

Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère le point $M(-1,1)$. Déterminer les coordonnées de l'image de M par

1. la translation de vecteur $\vec{u}(-3,6)$;
2. la rotation de centre $A(1,2)$ et d'angle $\pi/3$;
3. l'homothétie de centre $B(3,4)$ et de rapport -2 ;
4. la réflexion par rapport à la droite d'équation $3x-2y+1=0$.

Exercice 19

1. Soient A, B, C et D quatre points. Montrer la relation d'Euler :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

2. Soit ABC un triangle non aplati. Déduire de la relation d'Euler que les trois hauteurs de ABC sont concourantes.

Exercice 20

On considère un hexagone régulier $ABCDEF$ de côté 1.

1. Faire un dessin.
2. Calculer les produits scalaires

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}$$
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE} \qquad \overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{BE} \qquad \overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{AD}$$

Exercice 21

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
a, b, c, α, β, λ désignent des nombres tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
θ désigne un angle.

Soient la droite D d'équation cartésienne $ax + by = c$, et le point $A\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$.

Enfin, $M\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ désigne un point quelconque.

Partie A

1. Déterminer en fonction de x et y les coordonnées du symétrique de M par rapport à A.
2. Déterminer en fonction de x et y les coordonnées de l'image de M par une homothétie de centre A et de rapport λ.
3. Déterminer en fonction de x et y les coordonnées de l'image de M par une rotation de centre A et d'angle θ.
4. ☆ Déterminer en fonction de x et y les coordonnées de l'image de M par une réflexion par rapport à la droite D.

Partie B

Coder une fonction python permettant d'obtenir les coordonnées de l'image de M par une symétrie de centre A et qui prend en entrée les coordonnées de A, et de M.
Coder de même la fonction de rotation (en précisant bien les variables d'entrée).

Corrigé de la planche n^o 4: Géométrie du plan

Exercice 12

Cet exercice est particulièrement lourd en terme de calculs. On ne donne ici que des éléments de correction ainsi que les solutions.

1. Le critère de colinéarité appliqué aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ nous montre que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Par suite, les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Il s'agit de déterminer les équations cartésiennes des médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$ puis de déterminer l'intersection de ces deux droites. Or ces deux droites passent par les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ et ont pour vecteurs normaux $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   On obtient le système
   $$\begin{cases} 2x + 4y = 11 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$
   Dont la solution correspond aux coordonnées de $\Omega \begin{pmatrix} 39/14 \\ 19/14 \end{pmatrix}$, le centre du cercle circonscrit.
   Le rayon du cercle vaut $R = \Omega A = \dfrac{5\sqrt{26}}{17}$.
   L'équation cartésienne de ce cercle est donc :
   $$\left(x - \frac{39}{14}\right)^2 + \left(y - \frac{19}{14}\right)^2 = \frac{650}{289}$$
3. On doit déterminer les équations des hauteurs issues de B et C par exemple puis déterminer l'intersection de ces deux droites. Après calcul, cela revient à résoudre le système :
   $$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$
   On obtient les coordonnées de $H \begin{pmatrix} 10/7 \\ 9/7 \end{pmatrix}$.
4. On doit déterminer les équations des médianes issues de B et C puis déterminer l'intersection de ces deux droites. Cela revient à résoudre le système :
   $$\begin{cases} 4x + 5y = 16 \\ 5x + y = 13 \end{cases}$$
   On obtient ainsi $G \begin{pmatrix} 7/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$.
5. On calcule les coordonnées de vecteurs $\overrightarrow{G\Omega} \begin{pmatrix} 19/42 \\ 1/42 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} -19/21 \\ -1/21 \end{pmatrix}$. Il est clair que ces deux vecteurs sont colinéaires. Plus précisément, on a
   $$-2\overrightarrow{G\Omega} = \overrightarrow{GH}$$

Exercice 13

1. En résolvant un système, on obtient une intersection unique $I\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$
2. La droite passant par A et orthogonale à D a pour équation

$$-2(x+2)+y-4=0 \iff -2x+y=8$$

On obtient donc le projeté orthogonal en résolvant le système :

$$\begin{cases}x+2y=-3\\-2x+y=8\end{cases}$$

Le projeté orthogonal a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-19/5\\2/5\end{pmatrix}$.

3. La droite symétrique de D par rapport à A est parallèle à D. En effet, une homothétie conserve les directions.

Elle a donc aussi pour vecteur normal $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Reste à trouver un point.

On sait que le point $M\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ appartient à D. Reste à calculer l'image de ce point par une symétrie de centre A.

On cherche donc les coordonnées de M' telles que $\overrightarrow{AM'}=-\overrightarrow{AM}$. On obtient $M'\begin{pmatrix}-1\\8\end{pmatrix}$.

Finalement l'équation de la droite symétrique de D par une symétrie de centre A est

$$(x+1)+2(y-8)=0 \iff x+2y=15$$

4. Le point d'intersection de D et D' appartient à la symétrique de D' par rapport à D.

Reste à trouver un second point. Le point $M'\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ appartient à D'. On va noter M'' le symétrique de ce point par la réflexion par rapport à la droite D. Le point M'' est tel que :
   - le milieu de $[M'M'']$ est sur D ;
   - le vecteur $\overrightarrow{M'M''}$ est un vecteur normal de D donc colinéaire à $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

On note $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ les coordonnées de M''.

Ces deux conditions se traduisent sous forme de système :

$$\begin{cases}\frac{x+3}{2}+2\times\left(\frac{y-5}{2}\right)+3=0\\2(x-3)-(y+5)=0\end{cases}$$

La résolution de ce système donne $M''\begin{pmatrix}23/5\\-9/5\end{pmatrix}$.

Finalement, il suffit maintenant de déterminer l'équation de la droite (IM'') dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{IM''}\begin{pmatrix}18/5\\1/5\end{pmatrix}$.

On obtient l'équation cartésienne :

$$\frac{1}{5}(x-1)-\frac{18}{5}(y+2)=0 \iff (x-1)-18(y+2)=0 \iff x-18y=37$$

5. Encore une fois, le point d'intersection I appartient à la bissectrice. Reste à trouver un second point de la bissectrice.

Pour cela, on va raisonner sur les triangles isocèles.

Supposons que l'on connaisse deux points B et B' appartenant respectivement aux droites D et D' tels que le triangle IBB' soit isocèle en I.
Dans ce cas une bissectrice de D et D' sera une médiatrice de $[BB']$ en raison des propriétés des triangles isocèles.
On sait que les vecteurs $\vec{d}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{d'}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de D et D'.
On calcule facilement $\|\vec{d}\| = \sqrt{5}$ et $\|\vec{d'}\| = \sqrt{13}$.
Par construction les vecteurs $\vec{e} = \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}$ et $\vec{e'} = \frac{\vec{d'}}{\|\vec{d'}\|}$ sont des vecteurs normés et directeurs des droites D et D'.
On construit les points B et B' tels que $\overrightarrow{IB} = \vec{e}$ et $\overrightarrow{IB'} = \vec{e'}$. De cette manière, on a $IB = IB' = 1$ et donc le triangle IBB' est isocèle en I comme nous le souhaitions.
Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ est un vecteur normal d'une bissectrice de D et D' (puisque dans ce cas, une bissectrice de D et D' correspond à la médiatrice de $[BB']$).
Or $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IB'} = \vec{e'} - \vec{e}$.
Un vecteur normal de l'une des bissectrices a donc pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix}-2/\sqrt{13}+2/\sqrt{5}\\3/\sqrt{13}-1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$$

Finalement, l'équation de l'une des bissectrices est :

$$\left(\frac{-2\sqrt{13}}{13}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)(x-1)+\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)(y+2)=0$$

Cette équation ne se simplifie pas beaucoup. Au mieux, on obtient

$$\left(-10\sqrt{13}+26\sqrt{5}\right)x+\left(15\sqrt{13}-13\sqrt{5}\right)y=-40\sqrt{13}+52\sqrt{5}$$

L'autre bissectrice est normale à la première. Un vecteur normal de cette bissectrice a donc pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix}-3/\sqrt{13}+1/\sqrt{5}\\-2/\sqrt{13}+2/\sqrt{5}\end{pmatrix}$$

Après d'affreux calculs, on obtient l'équation « simplifiée » de cette seconde bissectrice.

$$\left(-10\sqrt{13}-26\sqrt{5}\right)x+\left(15\sqrt{13}+13\sqrt{5}\right)y=-40\sqrt{13}-52\sqrt{5}$$

Planche n$^{\text{o}}$ 5: Sommes et produits

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. α est un réel. Calculer les sommes suivantes en utilisant la formule du binôme de Newton $(a+b)^n$ pour des nombres a et b bien choisis.

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$;

b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$;

c) $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$.

d) $\sum_{k=0}^{n} \alpha^k \binom{n}{k}$.

Exercice 2

En utilisant l'un des résultats de l'exercice précédent, retrouver le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer :

a) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$;

b) $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$;

c) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$;

d) $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 4

1. Soit $(p, q, m) \in \mathbb{N}^3$ tel que $q \leq p \leq m$. En développant de deux façons différentes $(1+x)^m$, montrer la formule :
$$\binom{m}{p} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k}\binom{m-q}{p-k}.$$
2. En donner une interprétation combinatoire. (On pourra s'inspirer de l'interprétation combinatoire de la formule de Pascal.)
3. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

Soient n et p des entiers naturels.

a) Montrer $\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}$

b) On suppose $n \geq p$. Montrer $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

Exercice 6

En calculant $(1+i)^{4n}$, déterminer les valeurs de

$$\sum_{p=0}^{2n} (-1)^p \binom{4n}{2p} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1}$$

Exercice 7

Calculer les sommes et produits suivants :

$$A=\sum_{i=1}^{4} i;\quad B=\sum_{i=0}^{6} 1;\quad C=\sum_{i=-3}^{3} 4;\quad D=\sum_{r=0}^{4}(r^2-r+1);\quad E=\prod_{k=0}^{4} k;$$

$$F=\prod_{k=1}^{4} k;\qquad G=\prod_{j=1}^{3} 2;\qquad H=\prod_{t=-10}^{10} t^3;\qquad I=\prod_{p=-1}^{1}\cos\frac{p\pi}{4};\qquad J=\prod_{k=1}^{10} i.$$

Exercice 8

Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} k$; b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k$; c) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} 2k$. d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-k}$; e) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} e^{-k}$.

Exercice 9

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = n(n+2)$.

1. Calculer les sommes suivantes.

$$S_1=\sum_{k=0}^{6} a_k;\ S_2=\sum_{k=0}^{n+1} a_k;\ \ S_3=\sum_{k=0}^{2n} a_k;\ S_4=\sum_{k=0}^{n} 2a_k;\ S_5=\sum_{k=0}^{n}(a_k-1);\ S_6=\sum_{k=n+1}^{2n} a_k.$$

2. Déterminer a_n en fonction de n.

Exercice 10

Soit $n\in\mathbb{N}$. On note S_n la somme des nombres impairs compris entre 0 et $2n+1$.

(a) Exprimer S_n à l'aide d'un symbole $\sum$.

(b) Montrer que $S_n=(n+1)^2$.

Exercice 11

Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$.

1. Calculer de deux façons différentes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^3-k^3\right)$.
2. En déduire la valeur de S_n.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$.

Exercice 12

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$ puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k^2}{(k+1)(k-1)}\right)$.

Exercice 13

($\star$)

(a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\geq\frac{1}{2}$.

(b) En déduire que pour tout $m\in\mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^m}\frac{1}{k}\geq\frac{m}{2}$.

Exercice 14

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Calculer $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ et $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$. Que se passe-t-il si on commence le produit à 1 au lieu de 2 ?

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire à l'aide de factorielles les expressions suivantes.

a) $\prod_{i=1}^{n}(2i)$;

b) $\prod_{i=1}^{n} i^2$;

c) $\prod_{i=3}^{n} i^2$;

d) $\prod_{i=n+1}^{2n} i^2$;

e) $\prod_{i=1}^{n}(2i+1)$.

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\prod_{k=0}^{n} e^{-k}$;

b) $\prod_{k=0}^{n} e^{(\sqrt{2}-k)}$;

c) $\prod_{k=0}^{n} 2^k$;

d) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$;

e) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k}$.

Planche n° 6: Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\ln x}}$;
2. $x \mapsto \dfrac{\ln(x^2-4)}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$;
3. $x \mapsto \ln\left(\tan \dfrac{x\pi}{2}\right)$.

Exercice 2

Tracer rapidement à main levée, en justifiant, l'allure du graphe des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \sqrt{3x-2}-1$;
2. $x \mapsto \dfrac{5}{2x+1}+3$.

Exercice 3

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$. Décrire comment, à partir du graphe de f, on peut tracer le graphe des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto f(a-x)$;
2. $x \mapsto a - f(x)$.

Exercice 4

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies sur I.
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant).

1. Si f et g sont croissantes sur I alors fg est croissante sur I.
2. Si f et g sont croissantes et positives sur I alors fg est croissante sur I.
3. Si f et g sont majorées sur I alors $f+g$ est majorée sur I.
4. Si f et g sont majorées sur I alors fg est majorée sur I.
5. Si f et g sont bornées sur I alors fg est bornée sur I.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ est croissante. Montrer que si f s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$ alors f est la fonction nulle.

Exercice 7

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto e^{-\frac{a}{x^2}}$;
2. $x \mapsto x - a\sqrt{x}$;
3. $x \mapsto \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$;
4. $x \mapsto \sqrt{1 + \cos^2 x}$;
5. $x \mapsto (ax+b)^x$;
6. $x \mapsto \dfrac{\cos(ax^2 + bx + 1)}{\sin(x)}$;
7. $x \mapsto \arctan(e^x)$;
8. $x \mapsto \arcsin(x^2 - 1)$;
9. $x \mapsto \arccos\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$;
10. $x \mapsto \dfrac{\cos^3 x}{(1-\cos x)^2}$.

Exercice 8

Montrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leq x$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ \dfrac{x+1}{x-1}\ln x \geq 2$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x\ln x - (x-1) \leq (x-1)^2$;
4. $\forall x \in]-\infty, 1],\ e^x \leq 1 + x + \dfrac{ex^2}{2}$;

Exercice 9

Tracer le graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |3x-2| - 2|x+1|$.

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln\left(\dfrac{x+3}{2}\right) = \dfrac{\ln x + \ln 3}{2}$;
2. $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$;
3. $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$.
4. $\ln|2x+1| + \ln|x+3| < \ln 3$.

Exercice 11

Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, parité, périodicité, variations et limites.)

1. $x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2-3}$;
2. $x \longmapsto \ln(x-1) + \ln(x+1)$;
3. $x \longmapsto \ln(x^2-1)$;
4. $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$;
5. $x \longmapsto \dfrac{\tan(2x)}{\tan x}$;
6. $x \longmapsto x\arctan\dfrac{1}{x}$;
7. $x \longmapsto \sin(3x) + 3\sin x$.

Exercice 12

Déterminer tous les couples d'entiers naturels distincts (n,p) non nuls tels que $n^p = p^n$.

Exercice 13

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que u et v sont dérivables sur I et que u est strictement positive sur I. Montrer que u^v est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
2. Étudier et tracer le graphe de l'application $f : \mathbb{R}+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ On précisera les éventuelles tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.
3. Étudier et tracer le graphe de l'application $f : \mathbb{R}+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ On précisera les éventuelles tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

Exercice 14

Montrer : $\forall x \in]0,1[,\ x^x(1-x)^{(1-x)} \geq 1/2$. (*Indication* : étudier les variations de la fonction $x \mapsto x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$.)

Exercice 15

Déterminer une période de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos\left(\frac{x}{5}\right) + \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.

Exercice 16

Soit $(\alpha,\beta,\omega) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin(\omega x + \varphi).$$

Exercice 17

Tracer le graphe de la fonction $x \longmapsto \arcsin(\sin x)$.

Exercice 18

Simplifier les expressions suivantes : $\tan(\arcsin x)$, $\sin(\arccos x)$, $\cos(\arctan x)$.

Exercice 19

Ensemble de définition et simplification de f définie par $f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

Exercice 20

1. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Cette égalité est-elle valable pour tout $x \in \mathbb{R}^*$?
3. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}\arccos x$.

Exercice 21

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\arcsin 2x = \arccos x$.
2. $\arcsin(x+1) - \arcsin x = \dfrac{\pi}{6}$.
3. $\arctan x + \arctan(2x) = \dfrac{\pi}{4}$.
4. $\arcsin x = \arccos \dfrac{1}{3} - \arccos \dfrac{1}{4}$.
5. $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{3}$.
6. $\arcsin x = \arctan 2 + \arctan 3$.

Exercice 22

Calculer $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$.

Exercice 23

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, simplifier $\arctan(k+1) - \arctan(k)$. (*Indication* : on pourra calculer la tangente de cette expression.)
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1} \right) \right)$.

Exercice 24

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$ et $g_n(x) = \dfrac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Montrer que f_n et g_n sont des fonctions polynomiales.

Exercice 25

Une entreprise de photocopie couleur pratique des tarifs dégressifs de la manière suivante :

- les 20 premières copies sont à 15 centimes la copie ;
- les 60 copies suivantes sont à 10 centimes la copie ;
- toutes les copies suivantes sont à 5 centimes la copie.

Par exemple, 25 copies coûtent $20 \times 0,15 + 5 \times 0,10 = 3,50$ €.
On note f la fonction qui à tout nombre entier n associe le prix pour n photocopies réalisées dans cette entreprise.
Le gérant souhaite un algorithme donnant le tarif en fonction du nombre de photocopies réalisées. Proposer votre code.

Corrigé de la planche n° 6: Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1

1. Il faut s'assurer que l'argument de la racine est strictement positif et que l'argument du logarithme est strictement positif.
   On doit donc vérifier simultanément les deux conditions
   $$x > 0 \text{ et } \ln(x) > 0$$
   Ce qui donne pour domaine $]1;\ +\infty[$.
2. Il faut s'assurer que l'argument de la racine est strictement positif et que l'argument du logarithme est strictement positif.
   On doit donc vérifier simultanément les deux conditions
   $$4x^2 - 2x + 1 > 0 \text{ et } x^2 - 4 > 0$$
   Après étude du trinôme, la première inégalité est vraie pour tout x.
   On obtient donc pour domaine $]-\infty;\ 2[\cup]2;\ +\infty[$.
3. Il faut que l'argument de la tangente n'appartienne pas à l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ et que l'argument du logarithme soit positif.
   La résolution de $\tan \dfrac{x\pi}{2} > \frac{\pi}{2}$ donne comme solutions tous les intervalles de la forme $]2k;\ 2k+1[$ avec k entier relatif.

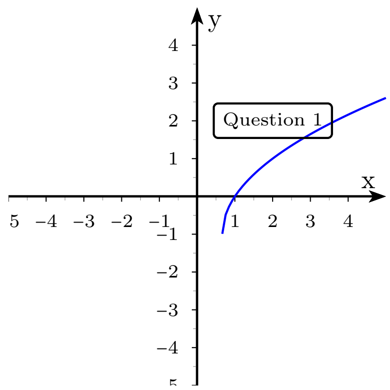
Exercice 2

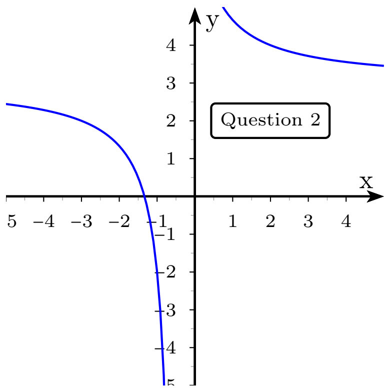
1. On peut réécrire cette fonction $x \mapsto \sqrt{3\left(x - \dfrac{2}{3}\right)} - 1$.

   En utilisant la décomposition $x \mapsto \sqrt{x} \mapsto \sqrt{3x} \mapsto \sqrt{3\left(x - \dfrac{2}{3}\right)} - 1$, on en déduit qu'on obtient la courbe à partir de la courbe de racine en appliquant successivement les opérations suivantes :
   - contraction selon l'axe des abscisses d'un rapport de 3 ;
   - translation d'un vecteur $\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. On peut réécrire cette fonction $x \mapsto \dfrac{5}{2} \times \dfrac{1}{x + \frac{1}{2}} + 3$.

   En utilisant la décomposition $x \mapsto \dfrac{1}{x} \mapsto \dfrac{5}{2} \times \dfrac{1}{x} \mapsto \dfrac{5}{2} \times \dfrac{1}{x + \frac{1}{2}} + 3$, on en déduit qu'on obtient la courbe à partir de la courbe d'inverse en appliquant successivement les opérations suivantes :
   - dilatation d'un facteur de $\dfrac{5}{2}$ selon l'axe des ordonnées ;
   - translation d'un vecteur $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Finalement, on trace les courbes :





Exercice 3

1. Pour a fixé, la fonction $x \mapsto a - x$ correspond à une symétrie sur l'axe des abscisses par rapport au point d'abscisse $\frac{a}{2}$.
   En effet, si on nomme M le point d'abscisse x et M' le point d'abscisse $a - x$, on vérifie aisément que le milieu de $[MM']$ est toujours le point d'abscisse $\frac{a}{2}$ (en utilisant la formule de l'abscisse du milieu par exemple).
   Ainsi, la courbe de $x \mapsto f(a - x)$ s'obtient par une réflexion de la courbe de f par rapport à l'axe d'équation $x = \frac{a}{2}$.
2. On peut appliquer le même raisonnement sur les ordonnées.
   On en déduit que la courbe de $x \mapsto f(a - x)$ s'obtient par une réflexion de la courbe de f par rapport à l'axe d'équation $y = \frac{a}{2}$.

Exercice 4

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies sur I.
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant).

1. C'est faux.
   Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x$ sont croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
2. C'est vrai. Supposons f et g croissantes et positives sur I.
   Pour tous nombres $u \leq v$ de I, on a $0 \leq f(u) \leq f(v)$ et $0 \leq g(u) \leq g(v)$.
   Comme ces deux séries d'inégalités portent sur des nombres positifs, on peut les multiplier entre elles. On obtient $f(u)g(u) \leq f(v)g(v)$ et donc fg est croissante.
3. C'est vrai. Supposons f et g majorées sur I et posons M et N des majorants respectifs de f et g.
   On a, pour tout x de I, $f(x) \leq M$ et $g(x) \leq N$. Or, on peut ajouter membre à membre des inégalités.
   On en déduit $f(x) + g(x) \leq M + N$ et ainsi $f + g$ est majorée (par $M + N$ par exemple).
4. C'est faux.
   Les fonctions $x \mapsto -x^2$ et $x \mapsto -x^2$ sont majorées sur $\mathbb{R}$ (par 0 par exemple).
   Or la fonction $x \mapsto x^4$ n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$.
5. C'est vrai. Supposons que f et g sont bornées, ce qui est équivalent à dire que $|f|$ et $|g|$ sont majorées et notons M et N des majorants respectifs de $|f|$ et $|g|$.
   Pour tout x de I, $0 \leq |f|(x) \leq M$ et $0 \leq |g|(x) \leq N$. Comme ces séries d'inégalités portent sur des nombres positifs, on peut les multiplier. On obtient $0 \leq |f|(x) \times |g|(x) \leq M \times N$. Ainsi, $|fg|$ est majorée.
   Par suite, fg est bornée.

Exercice 5

Par l'absurde. On rappelle que le contraire de $A \Longrightarrow B$ est $(\neg A) \wedge B$.
On va donc supposer que $f \circ f$ est croissante, $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante mais que f n'est pas strictement décroissante.
En particulier, cela signifie qu'il existe deux nombres $u < v$ tels que $f(u) \leq f(v)$.
Comme $f \circ f$ est croissante, en composant cette inégalité par $f \circ f$, on obtient $f \circ f \circ f(u) \leq f \circ f \circ f(v)$ mais c'est absurde car $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante.

Exercice 6

On se place dans les hypothèses du problème et on suppose que f s'annule sur $\mathbb{R}_*^+$. Ainsi, il existe $a > 0$ tel que $f(a) = 0$.
Soit alors x un réel strictement positif.
Si on suppose $x \geq a$ alors on a

- $xf(x) \geq af(a) = 0$ car g est croissante ; ce qui donne $f(x) \geq 0$ (car $x > 0$) ;
- $f(x) \leq f(a) = 0$ car f est décroissante.

Donc, si $x \geq a$, on obtient $f(x) \geq 0$ et $f(x) \leq 0$ et ainsi $f(x) = 0$.
Le cas où $x < a$ se traite de manière similaire. On obtient également $f(x) = 0$.
Finalement, la fonction f est nulle.

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. Cette équation prend sens lorsque $x > -3$ et $x > 0$ simultanément, c'est à dire pour $x > 0$.
   D'autre part, pour tout $x > 0$, on a la série d'équivalences :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{\ln x + \ln 3}{2} &\iff 2\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) - (\ln x + \ln 3) = 0 \\
&\iff \ln\left(\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{3x}\right) = 0 \\
&\iff \frac{(x+3)^2}{12x} = 1 \\
&\iff \frac{(x+3)^2 - 12x}{12x} = 0 \\
&\iff \frac{x^2 - 6x + 9}{12x} = 0 \\
&\iff \frac{(x-3)^2}{12x} = 0
\end{aligned}$$

   On obtient la solution $x = 3$.

2. Cette équation prend sens pour tout x. De plus, pour tout x, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1} &\iff 3^{2x} + 3^{2x-1} = 2^{x+\frac{7}{2}} + 2^{x+\frac{1}{2}} \\
&\iff e^{2x\ln(3)} + e^{(2x-1)\ln(3)} = e^{(x+7/2)\ln(2)} + e^{(x+1/2)\ln(2)} \\
&\iff e^{2x\ln(3)}\left(1+e^{-\ln(3)}\right) = e^{x\ln(2)}\left(e^{7/2\ln(2)} + e^{1/2\ln(2)}\right) \\
&\iff \frac{e^{2x\ln(3)}}{e^{x\ln(2)}} = \frac{\left(e^{7/2\ln(2)} + e^{1/2\ln(2)}\right)}{\left(1+e^{-\ln(3)}\right)} \\
&\iff 2x\ln(3) - x\ln(2) = \ln\left(\frac{\left(e^{7/2\ln(2)} + e^{1/2\ln(2)}\right)}{\left(1+e^{-\ln(3)}\right)}\right) \\
&\iff x = \frac{1}{2\ln(3)-\ln(2)} \times \ln\left(\frac{\left(e^{7/2\ln(2)} + e^{1/2\ln(2)}\right)}{\left(1+e^{-\ln(3)}\right)}\right) \\
&\iff x = \frac{1}{2\ln(3)-\ln(2)} \times \ln\left(\frac{\left(8\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)}\right) \\
&\iff x = \frac{1}{2\ln(3)-\ln(2)} \times \ln\left(\frac{27\sqrt{2}}{4}\right)
\end{aligned}$$

3. L'expression est définie pour tout $x > 0$ et on a alors la série d'équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}} &\iff e^{x\ln(\sqrt{x})} = e^{\sqrt{x}\ln(x)} \\
&\iff e^{x\ln(x)/2} = e^{\sqrt{x}\ln(x)} \\
&\iff x\ln(x) = 2\sqrt{x}\ln(x) \\
&\iff \ln(x)\left(x - 2\sqrt{x}\right) = 0 \\
&\iff \left(x-2\sqrt{x}\right) = 0 \text{ ou } \ln(x) = 0 \\
&\iff x^2 = 4x ou x = 1 \\
&\iff x(x-4) = 0 \text{ ou } x = 1 \\
&\iff x = 4 \text{ ou } x = 1
\end{aligned}$$

On a donc deux solutions : 4 et 1.

4. Cette inéquation est définie lorsque $|2x+1| > 0$ et $|x+3| > 0$. Ainsi, on doit avoir $x \neq \frac{-1}{2}$ et $x \neq -3$. Sous ces conditions on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\ln|2x+1| + \ln|x+3| < \ln 3 &\iff \ln\left(|2x+1| \times |x+3|\right) < \ln(3) \\
&\iff |(2x+1)(x+3)| < 3 \\
&\iff -3 < (2x+1)(x+3) < 3
\end{aligned}$$

Les solutions de l'inéquation de départ sont donc les intersections des solutions de $(2x+1)(x+3) < 3$ et des solutions de $(2x+1)(x+3) > -3$.
On obtient ainsi comme solutions :

$$\left(\left]-\frac{7}{2};\ -2\right[\cup \left]-\frac{3}{2};\ 0\right[\right) \setminus \left\{-3;\ \frac{-1}{2}\right\}$$

Exercice 11

Étudier les fonctions suivantes (domaine de définition, parité, périodicité, variations et limites.)

1. On note f_1 cette fonction. Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right\}$. De plus, pour tout x de son domaine de définition, on a

$$f_1(-3) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-3} = \frac{-x^3}{x^2-3} = -f_1(x)$$

Cette fonction est donc impaire.
De plus sa dérivée vaut, après calcul et factorisation :

$$f_1'(x) = \frac{x^2(x+3)(x-3)}{(x^2-3)^2}$$

On étudie le sens de variation de f_1 sur $\mathbb{R}^+ \backslash \left\{\sqrt{3}\right\}$ puisqu'elle est impaire. Sur cet ensemble la dérivée change de signe en $x = 3$.
Reste à déterminer les limites de f_1 en $+\infty$ et à gauche et à droite de $\sqrt{3}$.
Pour tout x non nul du domaine de définition, on a

$$f_1(x) = \frac{x}{1 - \frac{3}{x^2}}$$

On en déduit

$$\lim_{+\infty} f_1 = +\infty$$

Pour la limite autour de $\sqrt{3}$, on écrit, pour tout x du domaine :

$$f_1(x) = \frac{x^3}{\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)}$$

On en déduit

$$\lim_{\sqrt{3}^+} f_1 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\sqrt{3}^+} f_1 = -\infty$$

Finalement, on peut reconstituer tout le tableau de variations de f_1 sur $\mathbb{R}^+$, l'ensemble des variations se déduisant par symétrie centrale.

x	0		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$

2. On note f_2 cette fonction.
Elle est définie pour $x > 1$ et $x > -1$, soit sur $]1;\ +\infty[$. Son domaine de définition n'est pas symétrique, elle n'est donc ni paire ni impaire.
Les fonctions $x \mapsto \ln(x-1)$ et $x \mapsto \ln(x+1)$ sont strictement croissantes par composition. Ainsi, f_2 est strictement croissante par somme.
D'autre part, $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(1-x) = -\infty$ par composition et ainsi, $\lim\limits_{1^+} f_2 = -\infty$ par somme.
Enfin, $\lim\limits_{+\infty} f_2 = +\infty$ par somme.
3. Notons f_3 cette fonction. Elle est définie sur $]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[$
Elle est paire car $f_3(-x) = \ln\left((-x)^2 - 1\right) = \ln(x^2-1) = f_3(x)$.
De plus, pour tout $x > 1$, $\ln(x^2-1) = \ln\left((x-1)(x+1)\right) = \ln(x-1) + \ln(x-1) = f_2(x)$. Ainsi, on déduit de l'étude de f_2 celle de f_3 par symétrie.
4. Notons f_4 cette fonction. Elle est définie lorsque $x \neq 0$ et $\dfrac{\ln|x|}{x} > 0$.
Un petit tableau de signes de l'expression $\dfrac{\ln|x|}{x}$ donne

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\ln\lvert x\rvert$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{\ln\lvert x\rvert}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On en déduit que le domaine de définition de f_4 est $[-1;\ 0[\cup[1;\ +\infty[$

On va étudier la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln\lvert x\rvert}{x}$ qui est définie sur $\mathbb{R}^*$ et impaire et on déduira de l'étude de cette fonction celle de f_4 par composition par racine.

Pour tout $x > 0$, $\lvert x\rvert = x$ et par suite, $g'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

g' est donc négative sur $[\mathrm{e};\ +\infty[$ et positive sur $]0;\ \mathrm{e}]$, ce qui nous donne les variations de g.

On calcule $g(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ par quotient.

Enfin, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$ par croissance comparée.

Finalement, le tableau de variations de g est :

x	$-\infty$		$-\mathrm{e}$		-1		0		1		e		$+\infty$
$g(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

L'étude de g nous permet d'en déduire f_4 par composition :

x	-1		0		1		e		$+\infty$
$f_4(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$		0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{e}}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

5. On note f_5 cette fonction. $f_5(x)$ existe dès que
   - $2x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
   - $x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
   - $\tan(x) \neq 0$, c'est à dire $x \notin \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

   La conjonction de ces trois conditions donne le domaine de définition et de dérivabilité $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{k\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

   De plus, comme le numérateur est périodique de période $\frac{\pi}{2}$ et que le dénominateur est périodique de période π, on en déduit que π est une période de f_5.

   D'autre part, le domaine de définition de f_5 est symétrique par rapport à 0 et pour tout x de ce domaine
   $$f_5(-x) = \frac{\tan(-2x)}{\tan(-x)} = \frac{-\tan(2x)}{-\tan(x)} = f_5(x)$$

   Ainsi, f_5 est paire. Il suffit donc d'étudier cette fonction sur $\left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout x de ce domaine :

$$\begin{aligned} f_5(x) &= \frac{\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}}{\tan(x)} \\ &= \frac{2}{1-\tan^2(x)} \end{aligned}$$

Cette dernière forme facilite l'étude de la fonction. Ainsi, pour tout $0 < u < v < \frac{\pi}{4}$, on a :

$$0 < \tan(u) < \tan(v) < 1 \Longrightarrow 1-\tan^{(} u) > 1-\tan^2(v) > 0 \Longrightarrow f_5(u) < f_5(v)$$

en raison des sens de variations des fonctions carré et inverse sur $]0;\ +\infty[$.
En particulier, on en déduit que f_5 est strictement croissante sur $\left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[$.
De même, on peut prouver qu'elle est strictement croissante sur $\left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$.
Reste à calculer les limites.
On a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \left(1-\tan^2(x)\right) = 0^+$ et donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f_5(x) = +\infty$.
On prouve de même, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f_5(x) = -\infty$.
Enfin, on sait que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ et ainsi $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f_5(x) = 0^-$.
Reste à calculer $f_5(0) = 2$ pour pouvoir dresser le tableau de variations sur une période en exploitant la parité.

x	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f_4(x)$	‖ 0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0 ‖

6. On note f_6 cette fonction. Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
De plus, pour tout $x \neq 0$, $f_6(-x) = (-x) \times \arctan \frac{1}{-x} = x \arctan \frac{1}{x}$ car arctan est impaire. Donc f_6 est paire. On réduit donc le domaine d'étude à $\mathbb{R}^+$.
Sa dérivée vaut, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f_6'(x) &= \arctan \frac{1}{x} + x \times \frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \arctan \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

Il n'est pas évident de connaître le signe de f_6'. Pour tout $x \neq 0$, cette fonction est dérivable et on obtient, après calcul :

$$f_6''(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^2}$$

Ainsi, f_6' est strictement décroissante sur $]-\infty;\ 0[$ et sur $]0;\ +\infty[$.
Mais on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan \frac{1}{x} = 0$ par composition et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x}{x^2+1} = 0$ en utilisant les techniques de levée d'indétermination.
On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_6'(x) = 0$ par somme et on en déduit ainsi que f_6' est positive sur $\mathbb{R}^+$.
Ainsi, f_6 est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.
De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan \frac{1}{x} = 0$. Par produit on obtient donc $\lim\limits_{0^+} f_6 = 0$. En revanche, en $+\infty$, on a une indétermination et il nous est impossible à ce stade de l'année de lever cette indétermination.

Exercice 20

1. On va utiliser le fait que $\cos(a) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$.

   L'égalité que l'on doit démontrer est équivalente à $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$.

   Or, on sait que $0 \leq \arccos x \leq \pi$, ce qui donne $-\pi \leq -\arccos x \leq 0$ et donc $\frac{-\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos x \leq \frac{\pi}{2}$.
   On peut donc appliquer sinus à cette égalité pour obtenir une égalité équivalente :
   $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \iff \sin\arcsin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) \iff x = \cos\arccos x$, ce qui est vrai.

2. Même stratégie. On va utiliser le fait que $\frac{1}{\tan(a)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$.

   L'égalité que l'on doit démontrer est équivalente à $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}$.

   Or, pour tout $x > 0$, $0 < \arctan\frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$, ce qui donne $-\frac{\pi}{2} < -\arctan\frac{1}{x} < 0$ et donc $0 < \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$.
   On peut donc appliquer tangente à cette égalité et obtenir une égalité équivalente :
   $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x} \iff \tan\arctan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\right) \iff x = \frac{1}{\tan\arctan\frac{1}{x}} \iff x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$

   ce qui est vrai.

3. Une petite étude de signe de la fonction $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ nous montre qu'elle est positive sur $]-1;\ 1[$ donc l'égalité est bien valide.

   De plus, pour tout $x \in]-1;\ 1[$, on a $\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \in \left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$. Sur cet intervalle cosinus est injectif.

   On a donc la série d'équivalences :

$$\begin{aligned} \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}\arccos x &\iff 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \arccos x \\ &\iff \cos\left(2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = x \\ &\iff 2\cos^2\left(\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) - 1 = x \end{aligned}$$

   Or, on sait que $\cos^2(a) = \frac{1}{1+\tan^2(a)}$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}\arccos x &\iff 2 \times \frac{1}{1+\tan^2\left(\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)} - 1 = x \\ &\iff 2 \times \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} - 1 = x \\ &\iff 2 \times \frac{1}{\frac{2}{1+x}} - 1 = x \\ &\iff 1 + x - 1 = x \end{aligned}$$

   Ce qui est vrai !

> On a l'équivalence $\sin(u) = \sin(v) \iff u = v$ uniquement si u et v appartiennent à un intervalle sur lequel la fonction sinus est injective.
> Par exemple sur $[0;\ \pi[$, on n'a pas l'équivalence $\sin(u) = \sin(v) \iff u = v$ mais on l'a sur $\left[\frac{-\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.
> Le même genre de précautions s'imposent avec cosinus et tangente.

Planche n° 7: Nombres complexes

Exercice 1

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique et calculer leur module :

$$z_1 = \frac{1}{i}; \quad z_2 = \frac{1+i}{1-i}; \quad z_3 = \frac{1+2i}{1-3i}; \quad z_4 = \frac{(2+3i)^2}{4-2i}; \quad z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}; \quad z_6 = \frac{(5-i)^6}{(3+2i)^5}.$$

Exercice 2

a) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{z+i}{z-3i} \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{2z+1}{iz-2} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Montrer l'égalité $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$ et en donner une interprétation géométrique.

Exercice 4

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $\lambda \neq -i$. Montrer l'équivalence : $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left|\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1$.

Exercice 5

Soient a et b deux entiers naturels. On suppose que a et b sont chacun la somme de deux carrés d'entiers. Montrer qu'alors leur produit ab est aussi la somme de deux carrés d'entiers.
Indication : Voir a et b comme les carrées de modules de nombres complexes bien choisis.

Exercice 6

Montrer :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \frac{|\Re(z)| + |\Im(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|.$$

Exercice 7

Montrer : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}, \quad \left|\dfrac{1-z^n}{1-z}\right| \leq \dfrac{1-|z|^n}{1-|z|}$.

Exercice 8

(Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire). Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Montrer :

$$|z+z'| = |z| + |z'| \Longleftrightarrow \arg(z) \equiv \arg(z')[2\pi] \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z = \lambda z'.$$

Exercice 9

Montrer : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{C}^3, |1+a| + |a+b| + |b+c| + |c| \geq 1$.

Exercice 10

Déterminer le module et un argument de

$$z_1 = (1+i)^{18}; \quad z_2 = (\sqrt{15}+i\sqrt{5})^{2013}; \quad z_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}.$$

Exercice 11

On considère les deux nombres complexes $z_1 = e^{i\pi/3}$ et $z_2 = e^{-i\pi/4}$.

a) Écrire z_1 et z_2 sous formes algébrique.

b) Écrire $z_1 z_2$ sous formes algébrique et trigonométrique.

c) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 12

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $(\sqrt{3}+i)^n \in \mathbb{R}_-$.

Exercice 13

Montrer : $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \left(\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ |2 + z_1 z_2| = 1 \end{cases} \Longrightarrow z_1 z_2 = -1 \right).$

L'implication réciproque est-elle vraie ?

Exercice 14

Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser les expressions trigonométriques suivantes :

$$\cos^2 x, \quad \sin^2 x, \quad \cos^3 x, \quad \sin^3 x, \quad \cos^4 x, \quad \sin^4 x, \quad \sin^3 x \cos^3 x.$$

Exercice 15

Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer les quantités suivantes en à l'aide de puissances de $\sin x$ et $\cos x$:

$$\sin 3x, \quad \cos 3x, \quad \sin 4x, \quad \cos 4x, \quad \sin 5x.$$

Exercice 16

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Factoriser les expressions suivantes :

$$\cos x + \cos y, \quad \sin x + \sin y, \quad \cos x + \sin y.$$

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $3z - (3-i)\overline{z} = 1 - 2i$.

b) $4z^2 - 16z + 11 - 12i = 0$.

c) $z^2 + 4 = 5z - 10i$.

d) $z(z+5) = i - 7$.

e) $z^5 = 16\sqrt{2} + 16i\sqrt{2}$.

f) $z^8 - 3z^4 + 2 = 0$.

g) $z^7 - 4z^5 - z^2 + 4 = 0$.

h) $z^8 + 2z^7 - 2z - 4 = 0$.

Exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme et le produit des racines n-ième de l'unité.

Exercice 19

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.

Exercice 20

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.

Exercice 21

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $e^z = i$.

b) $e^z = 1 + i$.

Exercice 22

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Montrer l'inégalité $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
2. Soient A, B et C trois points du plan. Montrer l'inégalité $AB + BC \geq AC$.

Exercice 23

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2 - i\sqrt{3}$ et $z_C = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Tracer le triangle ABC, et montrer qu'il est rectangle.
2. On note E l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie : $|z|^2 - 5|z| + 4 \leq 0$.
   i) Les points A, B et C appartiennent-ils à E ?
   ii) Déterminer l'ensemble E, et le hachurer sur le dessin.

Exercice 24

Déterminer géométriquement et par le calcul l'ensemble des nombres complexes z tels que $\left|\dfrac{z-8}{z-4}\right| = 1$.

Exercice 25

Déterminer géométriquement l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| = \dfrac{1}{|z|} = |z-1|$.

Exercice 26

Déterminer l'ensemble des points d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que :

1. $1, z$ et z^2 soient les affixes de trois points alignés.
2. z et $\dfrac{1}{z}$ soient les affixes de deux vecteurs orthogonaux.
3. $1, z$ et $z + i$ soient les affixes de trois sommets d'un triangle dont le centre du cercle circonscrit est l'origine O du repère.

Corrigé de la planche n° 7: Nombres complexes

Exercice 2

a) Il faut que $z \neq 3\text{i}$.
Soient M l'image de z, A, l'image de 3i et B l'image de $-\text{i}$.
Cette condition s'écrit « $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ colinéaires », c'est à dire $M \in (AB)$.
Or (AB) est l'axe des imaginaires. On en déduit donc l'ensemble des solutions

$$\{\lambda\text{i},\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{3\}\}$$

b) Il faut que $\text{i}z \neq 2$, c'est à dire $z \neq -2\text{i}$.
On va essayer de traduire cette condition géométriquement, en terme de vecteurs. Or cette condition s'écrit

$$\begin{aligned}\exists\lambda \in \mathbb{R}/\ \frac{2z+1}{iz-2} = \text{i}\lambda &\iff \frac{2}{\text{i}} \times \frac{z+\frac{1}{2}}{z+2\text{i}} = \text{i}\lambda \\ &\iff \frac{z+\frac{1}{2}}{z+2\text{i}} = \frac{-\lambda}{2}\end{aligned}$$

Lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, $\dfrac{-\lambda}{2}$ décrit également $\mathbb{R}$.
Cette condition est donc équivalente à dire que les vecteur $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{DM}$ sont colinéaires avec M qui est l'image de z, C, celle de $\frac{-1}{2}$ et D celle de -2i.
Or l'équation de (CD) est $y = -4x - 2$. Finalement, l'ensemble des solutions est

$$\{a + \text{i}(-4a-2),\ a \in \mathbb{R}^*\}$$

Exercice 3

On a l'identité suivante

$$\forall(z;\ z') \in \mathbb{C}^2,\ |z+z'|^2 = (z+z') \times \overline{(z+z')} = \cdots = |z|^2 + |z'|^2 + 2\Re\left(z\overline{z'}\right)$$

qui est équivalente au théorème d'Al Kashi.
Cela conduit, après calcul, à

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = \cdots = 2\left[|z|^2 + |z'|^2\right]$$

Cela correspond à l'identité du parallélogramme.

Exercice 6

Pour cet exercice, il s'agit de poser $z = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$.
La série d'inégalité à prouver s'écrit alors

$$\frac{|a|+|b|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a^2+b^2} \leq |a| + |b|$$

On travaille par équivalences sur la première inégalité, sachant que les deux membres sont positifs et que $|a|^2 = a^2$.

$$\begin{aligned}\frac{|a|+|b|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a^2+b^2} &\iff a^2+b^2+2|a||b| \leq 2\left(a^2+b^2\right) \\ &\iff 0 \leq a^2+b^2-2|a||b| \\ &\iff 0 \leq (|a|-|b|)^2\end{aligned}$$

Ce qui est vrai !
On montre de manière similaire que la seconde inégalité est équivalente à

$$0 \leq 2\,|a|\,|b|$$

Ce qui est également vrai !

Exercice 7

Ici, il s'agit de remarquer que, pour $|z| \neq 1$, on a

$$\frac{1-z^n}{1-z} = \sum_{0\leq k\leq n} z^k$$

et

$$\frac{1-|z|^n}{1-|z|} = \sum_{0\leq k\leq n} |z|^k$$

Ainsi, l'inégalité à prouver peut se réécrire :

$$\left|\sum_{0\leq k\leq n} z^k\right| \leq \sum_{0\leq k\leq n} |z|^k$$

Ce qui est vrai puisque le module vérifie l'inégalité triangulaire.

Exercice 13

Soient z_1 et z_2 deux complexes tels que $|z_1| = |z_2|$ et $|2 + z_1 z_2| = 1$.
On pose $\alpha = z_1 z_2$ puisque la propriété à prouver porte sur α.
On sait que $|\alpha| = |z_1|\,|z_2| = 1$ et que $|2+\alpha| = 1$, c'est à dire $|\alpha - (-2)| = 1$.
Posons Γ' le cercle de centre $(-2;\ 0)$ et de rayon 1. Posons Γ le cercle trigonométrique.
Et enfin, soit M l'image de α.
La relation $|\alpha| = 1$ se traduit par $M \in \Gamma$ et la relation $|\alpha - (-2)| = 1$ se traduit par $M \in \Gamma'$. Ainsi $M \in \Gamma \cap \Gamma'$.
Or l'intersection de ces deux cercles est réduite au point de coordonnées $(-1;\ 0)$.
Ainsi $\alpha = -1$.
La réciproque est fausse, prendre par exemple $z_1 = \frac{1}{2}$ et $z_2 = -2$.

Exercice 17

a) Poser $a = \mathfrak{R}(z)$ et $b = \mathfrak{I}(z)$. L'équation se traduit alors par (après calculs) :

$$b + \mathrm{i}(6b + a) = 1 - 2\mathrm{i}$$

En identifiant partie réelle et partie imaginaire on obtient le système

$$\begin{cases} b = 1 \\ 6b + a = -2 \end{cases}$$

Ce qui donne $b = 1$ et $a = -8$, c'est à dire $z = -8 + \mathrm{i}$.

b) On applique la méthode de résolution par calcul du discriminant. On obtient les solutions $z_1 = \frac{1-2\mathrm{i}}{2}$ et $z_2 = \frac{7+\mathrm{i}}{2}$

c) Cette équation est équivalente à $z^2 - 5z + 4 + 10\mathrm{i} = 0$. On la résout à l'aide de la méthode du cours, on obtient les solutions $z_1 = 5 - 2\mathrm{i}$ et $z_2 = 2\mathrm{i}$.

d) Cette équation est équivalente à $z^2 + 5z + 7 - \mathrm{i} = 0$.
On obtient, après calcul, les solutions $z_1 = -3 - \mathrm{i}$ et $z_2 = -2 + \mathrm{i}$

e) On pose $\alpha = 16\sqrt{2} + 16i\sqrt{2}$. On obtient $|\alpha| = 32$ et $\arg(\alpha) = \dfrac{\pi}{4}$.
Le module et l'argument de z vérifient donc

$$\begin{cases} |z|^5 = 32 \\ 5\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On obtient donc les cinq solutions :

$$\left\{ 2\mathrm{e}^{\pi/20};\ 2\mathrm{e}^{9\pi/20};\ 2\mathrm{e}^{17\pi/20};\ 2\mathrm{e}^{25\pi/20};\ 2\mathrm{e}^{33\pi/20} \right\}$$

f) On réalise un changement de variable, on pose $Z = z^4$. On obtient l'équation :
$Z^2 - 3Z + 2 = 0$ qui a pour solutions $Z = 1$ et $Z = 2$.
On résout ensuite les deux équations $z^4 = 1$ et $z^4 = 2$. On obtient ainsi les huit solutions :

$$\left\{ 1;\ i;\ -1;\ -i;\ 2^{1/4};\ 2^{1/4}i;\ -2^{1/4};\ -2^{1/4}i \right\}$$

g) On constate que 1, 2 et -2 sont des racines évidentes. On peut donc factoriser le polynôme $z^7 - 4z^5 - z^2 + 4$ par $(z-1)(z-2)(z+2)$.
On obtient, après calcul, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^7 - 4z^5 - z^2 + 4 = (z-1)(z+2)(z-2)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

Or, on sait que, pour $z \neq 1$, $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \dfrac{z^5 - 1}{z - 1}$. On obtient donc l'expression simplifiée :

$$z^7 - 4z^5 - z^2 + 4 = (z+2)(z-2)(z^5 - 1)$$

Cette expression est nulle pour $z = 2$ ou $z = -2$ ou $z^5 = 1$. On obtient donc les sept racines

$$\left\{ 2;\ -2;\ 1;\ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/5};\ \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/5};\ \mathrm{e}^{6\mathrm{i}\pi/5};\ \mathrm{e}^{8\mathrm{i}\pi/5} \right\}$$

h) Dans cette expression, -2 est une racine évidente. Après factorisation, on obtient

$$z^8 + 2z^7 - 2z - 4 = (z+2)(z^7 - 2)$$

Il y a donc huit racines :

$$\left\{ -2;\ 2^{1/7};\ 2^{1/7}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/7};\ 2^{1/7}\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\pi/7};\ 2^{1/7}\mathrm{e}^{6\mathrm{i}\pi/7};\ 2^{1/7}\mathrm{e}^{8\mathrm{i}\pi/7};\ 2^{1/7}\mathrm{e}^{10\mathrm{i}\pi/7};\ 2^{1/7}\mathrm{e}^{12\mathrm{i}\pi/7} \right\}$$

Planche n° 8: Èquations différentielles

Exercice 1

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $4y' + y = 0$ avec $y(0) = e$;
2. $y' + 2xy - e^{x-x^2} = 0$;
3. $xy' \ln(x) - y = 3x^2(\ln x)^2$ sur $]0,1[$;
4. $y' - y\tan x = \cos^2 x$ sur $\left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
5. $y'\sqrt{1-x^2} - y = 1$ sur $]-1,1[$.
6. $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' - 2 = 0$ sur $]-1,+\infty[$.
7. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $4y'' + 9y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$;
2. $y'' + 2y' + y = 0$ avec $y(2) = 0$ et $y'(2) = 1$;
3. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} + x^2 - x + 1$;
4. $y'' - y = e^x + e^{-x}$;
5. $y'' - 3y' + y = \sin x + \cos x$;
6. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}\sin(3x)$;
7. $y'' - 2y' + 5y = 4e^x\cos(2x)$;
8. $y'' - 4y' + 3y = 3e^{3x}$;
9. $y'' + y' - 2y = \cos(x)$;
10. $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$. (Poser $z = xy$).

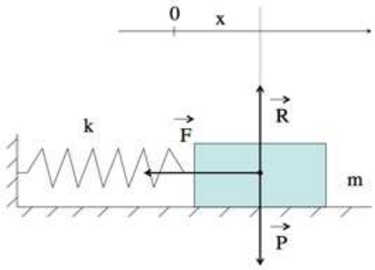
Exercice 3

Déterminer les applications f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(-x) = e^x.$$

Exercice 4

Un peu de mécanique...
On considère le système mécanique « masse-ressort » suivant :



On souhaite étudier les oscillations du solide de masse m lorsque, après l'avoir écarté de sa position de repos, on l'abandonne à lui-même. On suppose que le ressort a un coefficient de raideur k et une masse négligeable. Le solide est soumis à trois forces : $\vec{P}$ son poids, $\vec{R}$ l'action du support sur le solide et $\vec{F}$ l'action du ressort sur le solide, proportionnelle à l'étirement. Le principe fondamental de la dynamique donne l'équation (E) : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$ où $\vec{a}$ est le vecteur-accélération du solide.

1. Dans un premier temps, on considère qu'il y a absence de frottement (système non-amorti). L'action du support sur le solide est donc normale au mouvement. La composante horizontale de (E) donne : $-kx = mx''$. Résoudre cette équation différentielle. À l'instant $t = 0$, on lâche le solide, sans vitesse, en position $x_0 > 0$. Esquisser le graphe de la fonction x.

2. On suppose maintenant qu'il y a du frottement entre le solide et le support. L'action du support sur le solide n'est donc plus normale au mouvement, mais possède une composante tangentielle que l'on suppose proportionnelle à la vitesse du solide, de coefficient de proportionnalité a, appelé coefficient d'amortissement. La composante horizontale de (E) devient donc : $-ax' - kx = mx''$. Résoudre cette équation différentielle en discutant selon les valeurs de m, k et a. À l'instant $t = 0$, on lâche le solide, sans vitesse, en position $x_0 > 0$. Esquisser le graphe de la fonction x dans les différents cas.

Corrigé de la planche n° 8: Èquations différentielles

Exercice 1

1. Les solutions de l'équation sont :
$$\left\{x \mapsto K\mathrm{e}^{-x/4};\ K \in \mathbb{R}\right\}$$
La condition initiale entraîne $K = \mathrm{e}$. Ainsi, la solution est $x \mapsto \mathrm{e}^{-x/4+1}$
2. Cette équation s'écrit
$$y' + 2xy = \mathrm{e}^{x-x^2}$$
Les solutions de l'équation homogène sont :
$$\left\{x \mapsto K\mathrm{e}^{-x^2};\ K \in \mathbb{R}\right\}$$
Pour résoudre l'équation, on applique la méthode de variation de la constante. On cherche une fonction k qui vérifie, pour tout x :
$$k'(x) = \mathrm{e}^x$$
On obtient les solution de l'équation :
$$\left\{x \mapsto (K + \mathrm{e}^x)\,\mathrm{e}^{-x^2};\ K \in \mathbb{R}\right\}$$
3. Pour $x \in]0;\ 1[$, $\ln(x) \neq 0$ et $x \neq 0$ donc l'équation est équivalente à
$$y' - \frac{1}{x\ln(x)}y = 3x\ln(x)$$
Or, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto \ln|\ln(x)|$.
Or, sur cet intervalle, $\ln|\ln(x)| = \ln(-\ln(x))$. On obtient les solutions de l'équation homogène :
$$\left\{x \mapsto K\mathrm{e}^{\ln(-\ln(x))} = -\ln(x);\ K \in \mathbb{R}\right\}$$
La méthode de variation de la constante fonctionne ici très bien et on obtient finalement les solutions :
$$\left\{x \mapsto \left(\frac{3}{2}x^2 + K\right)\ln(x);\ K \in \mathbb{R}\right\}$$
4. On résout l'équation homogène sur l'intervalle considéré, sachant que $\cos(x) > 0$. On obtient les solutions :
$$\left\{x \mapsto \frac{K}{\cos(x)};\ K \in \mathbb{R}\right\}$$
On applique ensuite la méthode de variation de la constante. On cherche donc une fonction k telle que, pour tout x de l'intervalle :
$$k'(x) = \cos^3(x)$$
Pour déterminer une telle primitive, il faut linéariser l'expression. Or
$$\cos^3(x) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\sin(3x)$$
On trouver ensuite facilement une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$ et on obtient donc les solution de cette équation :
$$\left\{x \mapsto \frac{K}{\cos(x)} + \frac{1}{12}\left[9\tan(x) + \frac{\sin(3x)}{\cos(x)}\right];\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

5. Une solution particulière est la fonction constante égale à -1.
L'équation homogène s'écrit, sur l'intervalle considéré :

$$y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = 0$$

On reconnaît la dérivée de arcsin. On obtient donc finalement les solutions :

$$\left\{x \mapsto -1 + K\mathrm{e}^{\arcsin(x)};\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

6. On résout dans un premier temps l'équation du premier ordre sur y' que l'on peut réécrire :

$$(y')' + \frac{1}{1+x} y' = \frac{2}{(1+x)^2}$$

L'équation homogène associée a pour solutions :

$$\left\{x \mapsto \frac{K}{1+x};\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

On applique ensuite la méthode de variation de la constante. On cherche ainsi une fonction k qui vérifie :

$$k'(x) = \frac{2}{x+1}$$

On obtient donc les solutions concernant l'équation portant sur y'. Ainsi, pour tout x du domaine :

$$y'(x) = \frac{2\ln(x+1)}{x+1} + \frac{K}{1+x} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

En intégrant de nouveau cette fonction, on obtient y :

$$y(x) = \ln(x+1)^2 + K_1 \ln(x+1) + K_2 \text{ avec } (K_1;\ K_2) \in \mathbb{R}^2$$

7. On pose $\varphi(x) = y^2$ de sorte que $\varphi'(x) = 2yy'$.
On obtient ainsi une équation sur φ :

$$\varphi - x\varphi' = -x^2 \iff \varphi' - \frac{1}{x}\varphi = x$$

Les solutions de l'équation homogène sur l'intervalle considéré sont :

$$\{x \mapsto Kx;\ K \in \mathbb{R}\}$$

On cherche donc une fonction k telle que

$$k'(x) = 1$$

On obtient finalement les solutions de l'équation sur φ :

$$\{x \mapsto (x+K)\,x;\ K \in \mathbb{R}\}$$

On en déduit que pour tout x du domaine :

$$y(x)^2 = \left(x^2 + Kx\right)$$

C'est à dire

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 + Kx}$$

Pour que les solutions soient valides, il faut $K \geq 0$, sinon l'argument de la racine peut devenir négatif.

Exercice 2

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. Après résolution de l'équation caractéristique, et détermination des deux constantes grâce aux conditions initiales, on obtient l'unique solution
$$x \mapsto \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{2}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$$
2. Après résolution de l'équation caractéristique, et détermination des deux constantes grâce aux conditions initiales, on obtient l'unique solution
$$x \mapsto (x-2)\,\mathrm{e}^{x-2}$$
3. Après résolution de l'équation homogène et utilisation de la méthode de superposition pour déterminer les solutions particulières, on obtient les solutions :
$$x \mapsto \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{8} + (K_1x + K_2)\mathrm{e}^{-2x}$$
avec $(K_1;\ K_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés.

   Pour trouver la solution particulière avec le second membre e^{-2x}, il fallait aller jusqu'au polynôme du second degré puisque n'importe quelle fonction de la forme $f(x)\mathrm{e}^{-2x}$ avec f affine est déjà solution de l'équation homogène.
4. On utilise la même technique que précédemment en remarquant que e^x et e^{-x} sont déjà solutions de l'équation homogène, ce qui contraint à aller jusqu'à la fonction affine pour la recherche de solution particulière. On obtient :
$$x \mapsto \frac{x}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) + K_1\mathrm{e}^x + K_2\mathrm{e}^{-x}$$
avec $(K_1;\ K_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés.
5. On peut plonger dans les complexes pour déterminer la solution particulière. On obtient :
$$x \mapsto \frac{1}{3}(\cos(x) - \sin(x)) + K_1\mathrm{e}^{r_1x} + K_2\mathrm{e}^{r_2x}$$
avec $r_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $r_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $(K_1;\ K_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés.
6. On peut ici plonger dans les complexes en résolvant l'équation E_c :
$$y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x}$$
En effet, le second membre de l'équation de départ vaut $\Im\left(\mathrm{e}^{(2+3\mathrm{i})x}\right)$.
On obtient alors les solutions
$$x \mapsto \frac{-\mathrm{e}^{2x}}{30}(\cos(3x) + 3\sin(3x)) + K_1\mathrm{e}^x + K_2\mathrm{e}^{2x}$$
avec $(K_1;\ K_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés.
7. On applique la même technique qu'à la question précédente à l'exception qu'ici, la fonction à valeurs complexes $x \mapsto \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}$ est solution de l'équation homogène !
On obtient :
$$x \mapsto x\sin(2x)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\left(K_1\cos(2x) + K_2\sin(2x)\right)$$
avec $(K_1;\ K_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés.
8. Encore une fois le second membre est solution de l'équation homogène.
On obtient :
$$x \mapsto \frac{3}{2}x\mathrm{e}^{3x} + K_1\mathrm{e}^x + K_2\mathrm{e}^{3x}$$
avec $(K_1;\ K_2) \in \mathbb{R}^2$ fixés.

9. On obtient :
$$x \mapsto \frac{1}{10}\left(-3\cos(x)+\sin(x)\right)+K_1\mathrm{e}^{x}+K_2\mathrm{e}^{-2x}$$
avec $(K_1;\ K_2)\in\mathbb{R}^2$ fixés.

10. En suivant l'indication, on pose $z=xy$. Il vient :
$$z'=xy'+y=(x+1)y' \text{ et } z''=xy''+2y'$$
Dans l'équation de départ, on substitue xy'' par $z''-2y'$, xy' par $z'-y$ et enfin xy par z. Ainsi :
$$\begin{aligned} xy''+2(x+1)y'+(x+2)y=0 &\iff xy''+2xy'+2y'+xy+2y=0\\ &\iff z''-2y'+2(z'-y)+2y'+z+2y=0\\ &\iff z''+2z'+z=0\end{aligned}$$
Cette équation en z donne les solutions :
$$x\mapsto (K_1x+K_2)\mathrm{e}^{-x}$$
On en déduit les solutions sur $\mathbb{R}^*$ pour l'équation de départ en y :
$$x\mapsto \frac{K_1x+K_2}{x}\mathrm{e}^{-x}$$

Planche n° 9: Géométrie dans l'espace

Dans toute la feuille, sauf indication contraire, l'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Exercice 1

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ quatre vecteurs. Calculer $\det(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{w}, \vec{u} \wedge \vec{t})$.

Exercice 2

Déterminer une base orthonormale directe dont le premier vecteur est colinéaire au vecteur $(-1, 2, -2)$.

Exercice 3

Pour quelles valeurs de a les vecteurs $(1, 0, a)$, $(a, 1, 0)$ et $(0, a, 1)$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne ainsi qu'une représentation paramétrique du plan considéré :

1. $\mathcal{P}_1$ est le plan passant par le point $A(4, 3, 2)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u_1}(1, 1, -2)$ et $\vec{v_1}(-1, 3, 0)$;
2. $\mathcal{P}_2$ est le plan passant par le point $B(5, 7, -1)$ et orthogonal au vecteur $\vec{u_2}(2, 3, 3)$;
3. $\mathcal{P}_3$ est le plan passant par les les points $C(-4, 1, 2)$, $D(-1, -1, -1)$ et $E(0, 2, -1)$;
4. $\mathcal{P}_4$ est le plan dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2 + \lambda - 2\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = 1 + 2\lambda + \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$

Exercice 5

1. Les points $A(-4, 1, 2)$, $B(-1, -1, -1)$, $C(0, 2, -1)$ et $D(-5, 2, 0)$ sont-ils coplanaires ?
2. Les points $E(-4, 1, -2)$, $F(1, -1, 1)$ et $G(11, -5, 7)$ sont-ils alignés ?

Exercice 6

Calculer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$ dans les cas suivants :

1. A est le point de coordonnées $(1, 2, 1)$ et $\mathcal{P}$ est le plan passant par $B(-1, -1, -1)$ et dirigé par $\vec{u}(-2, 1, 2)$ et $\vec{v}(3, 1, 0)$;
2. A est le point de coordonnées $(-3, 1, 0)$ et $\mathcal{P}$ est le plan passant par $C(-1, 4, 2)$ et orthogonal à $\vec{w}(-2, 3, 1)$;
3. A est le point de coordonnées $(1, 0, 3)$ et $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne $3x + 3y - 2z + 6 = 0$.

Exercice 7

Dans chacun des cas suivant, dire si les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles et, si c'est le cas, calculer la distance qui les sépare :

1. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont respectivement les plans d'équations $3x + 4y + 3z + 1 = 0$ et $3x + 4y + 4z + 1 = 0$.
2. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont respectivement les plans d'équations $3x + 3y + 3z + 1 = 0$ et $3x + 3y + 3z + 3 = 0$.
3. $\mathcal{P}_1$ passe par $A_1(1, 1, 1)$, $\mathcal{P}_2$ passe par $A_2(3, 1, 1)$ et $\vec{u}(1, 1, 1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants, déterminer un système d'équations cartésiennes ainsi qu'une représentation paramétrique de la droite considérée :

1. $\mathcal{D}_1$ est la droite passant par le point $A(4,-3,2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u_1}(3,1,-2)$;
2. $\mathcal{D}_2$ est la droite passant par le point $B(5,0,-1)$ et orthogonale au plan d'équation $x-y+z-1=0$;
3. $\mathcal{D}_3$ est la droite passant par les les points $C(-4,1,2)$ et $D(-1,-1,-1)$.
4. $\mathcal{D}_4$ est la droite égale à l'intersection des plans d'équations $2x-y+z+2=0$ et $x-y-z-1=0$.

Exercice 9

Calculer la distance du point $M(1,3,-2)$ à la droite $(D) : \left\{\begin{array}{ll} x+y+z-2 & =0 \\ 2x+y-5z & =0 \end{array}\right.$.

Exercice 10

1. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $A(-1,0,3)$ sur la droite passant par $B(1,1,1)$ et dirigée par $\vec{u}(-1,2,3)$.
2. Déterminer les coordonnées du symétrique du point $B(-1,2,-1)$ par rapport au plan d'équation $x+2y-3z+1=0$.
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $M(\alpha,\beta,\gamma)$ par rapport au plan passant par $A(1,2,3)$, $B(0,1,5)$ et $C(2,3,4)$.

Exercice 11

Soient (D_1) et (D_2) les droites $(D_1) : \left\{\begin{array}{ll} x+y & =2 \\ y-2z & =3 \end{array}\right.$ et $(D_2) : \left\{\begin{array}{ll} x+y+z & =1 \\ x-2y+3z & =a \end{array}\right.$.

1. (D_1) et (D_2) sont-elles parallèles ?
2. Déterminer a pour qu'elles soient coplanaire. Donner alors les coordonnées du point d'intersection de (D_1) et (D_2) et une équation du plan contenant (D_1) et (D_2).

Exercice 12

Déterminer une équation cartésienne des sphères suivantes :

1. la sphère $\mathcal{S}_1$ de centre $\Omega(1,3,-1)$ et de rayon 5 ;
2. la sphère $\mathcal{S}_2$ de diamètre $[A,B]$ avec $A(3,5,0)$ et $B(-1,1,1)$.

Exercice 13

Soient $\mathcal{S}$ la sphère de centre O et de rayon 5 et $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+\sqrt{8}y-4z+12=0$.

1. Déterminer une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par O et orthogonale à $\mathcal{P}$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de la droite $\mathcal{D}$ et de la sphère $\mathcal{S}$.
3. Déterminer une équation des plans tangents à la sphère aux points A et B.

Exercice 14

Déterminer une équation cartésienne de la sphère contenant les cercles d'équations $\left\{\begin{array}{l} z=0 \\ x^2+y^2=9 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} z=2 \\ x^2+y^2=25 \end{array}\right.$.

Exercice 15

Montrer qu'il existe une unique sphère contenant les cercles d'équations cartésiennes respectives : $\begin{cases} x = 1 \\ y^2 + z^2 - 4y = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$. En déterminer une équation cartésienne.

Corrigé de la planche n° 9: Géométrie dans l'espace

Exercice 1

Ce déterminant est nul. Pour le prouver, on va faire une disjonction de cas :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ donc le déterminant est nul;
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires mais que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{w}$ sont colinéaires. Ainsi, le déterminant est également nul;
- Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires, alors ces trois vecteurs forment une base. Ainsi, il existe trois nombres λ, μ et ν tel que
$$\vec{t} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{w}$$
Ainsi, $\vec{u} \wedge \vec{t} = \mu\vec{u} \wedge \vec{v} + \nu\vec{u} \wedge \vec{w}$.
En exploitant la trilinéarité du déterminant, il vient :
$$\begin{aligned} \det(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{w}, \vec{u} \wedge \vec{t}) &= \mu \det(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{w}, \vec{u} \wedge \vec{v}) + \nu \det(\vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{w}, \vec{u} \wedge \vec{w}) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 3

Une condition nécessaire et suffisante de coplanarité est que le déterminant de ces trois vecteurs est nul. Après calcul, cela donne la condition

$$a^3 + 1 = 0 \iff a = -1$$

Exercice 4

Voici les solutions pour les équations cartésiennes.

1. On obtient
$$3x + y + 2z = 19$$
2. On obtient
$$2x + 3y + 3z = 28$$
3. On obtient
$$9x - 3y + 11z = -17$$
4. On obtient
$$-x - 5y + 3z = 1$$

Exercice 5

Il faut utiliser le déterminant (critère de coplanarité) et le produit vectoriel (critère de colinéarité).

Exercice 6

1. Les coordonnées du projeté de A dans le plan sont
$$A' \, \frac{1}{65}\begin{pmatrix} 73 \\ 106 \\ 85 \end{pmatrix}$$
La distance est donc
$$AA' = \frac{4\sqrt{65}}{65}$$

2. Les coordonnées du projeté de A dans le plan sont

$$A' \, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La distance est donc

$$AA' = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

3. Un vecteur normal du plan est $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du projeté de A dans le plan sont

$$A' \, \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 13 \\ -9 \\ 72 \end{pmatrix}$$

La distance est donc

$$AA' = \frac{3\sqrt{22}}{22}$$

Exercice 7

1. Les vecteurs normaux des deux plans (obtenus depuis les équations cartésiennes) sont non colinéaires.

   Les deux plans ne sont donc pas parallèles.
2. Les deux vecteurs normaux sont colinéaires donc les plans sont parallèles.

   On calcule un point du second plan :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Puis on cherche le projeté orthogonal de ce point sur le premier plan.

On obtient

$$A' \, \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Et ainsi la distance entre les deux plans est

$$AA' = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

3. On peut par exemple calculer le projeté orthogonal de A_2 sur $\mathcal{P}_1$. On obtient

$$A_2' \, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La distance entre les deux plans est donc

$$A_2A_2' = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Exercice 8

1. Une équation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -3 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Pour trouver le système d'équation cartésienne, il suffit de substituer t par $y + 3$.
On obtient

$$\begin{cases} x = 4 + 3y + 12 \\ z = 2 - 2y - 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y = 16 \\ z + 2y = -4 \end{cases}$$

2. Un vecteur directeur de la droite est un vecteur normal du plan. On obtient donc une équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Avec la même technique que précédemment on obtient un système d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} x = 5 - y \\ z = -1 - y \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 5 \\ z + y = -1 \end{cases}$$

3. Un vecteur directeur est $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. On obtient une équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

Avec la même technique que précédemment on obtient un système d'équations cartésiennes (on substitue t par $\dfrac{1 - y}{2}$

$$\begin{cases} 2x = -2 + 3 - 3y \\ 2z = -2 - 3 + 3y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 2z - 3y = -5 \end{cases}$$

4. Le système d'équation est obtenu directement

$$\begin{cases} 2x - y + z + 2 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

En faisant $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$, on obtient

$$\begin{cases} 2x - y + z = -23x - 2y = -1 \end{cases}$$

En faisant $L_1 \longleftarrow L_1 - \dfrac{1}{2}L_2$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + z = -\frac{3}{2}3x - 2y = -1 \end{cases}$$

On peut donc exprimer z et y en fonction de x :

$$\begin{cases} z = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x \end{cases}$$

En posant $x = t$, on a ainsi l'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \\ z = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \end{cases}$$

Exercice 9

On détermine les coordonnées du projeté orthogonal de M sur cette droite, que l'on note M'.
Si $\vec{d}$ est un vecteur directeur de (D), M' vérifie :

- $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{d} = 0$ (orthogonal à (D)) ;
- $M' \in (D)$.

On obtient (D) en réalisant le produit vectoriel des vecteurs directeurs des deux plans dont (D) est l'intersection.

$$\vec{d}\begin{pmatrix}-6\\7\\-1\end{pmatrix}$$

La première condition donne l'équation

$$-6x + 7y - z = 17$$

Il faut résoudre le système suivant pour trouver les coordonnées de M' :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - 5z = 0 \\ -6x + 7y - z = 17 \end{cases}$$

Après d'abominables calculs, on obtient la distance :

$$MM' = \frac{15\sqrt{258}}{86}$$

Exercice 10

1. Le projeté A' vérifie :
   - A' est sur la droite $(B;\vec{u})$;
   - $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = 0$

   Il faut donc déterminer une équation paramétrique de la droite $(B;\vec{u})$ puis écrire la seconde condition.
   Cela donne une unique équation portant sur un paramètre.
   Après résolution, on obtient :

   $$\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\\frac{13}{7}\\\frac{16}{7}\end{pmatrix}$$

2. Le symétrique B' vérifie :
   - $\overrightarrow{BB'}$ est orthogonal au plan, c'est à dire que B' est sur la droite passant par B et dirigée par un vecteur normal du plan ;
   - $m[BB']$ est sur le plan.

   La première condition se traduit sous forme d'équation paramétrique :

   $$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

   Les coordonnées du milieu de $[BB']$ sont

   $$m[BB']\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2+t\\4+2t\\-2-3t\end{pmatrix}$$

La seconde condition donne donc l'équation sur t :

$$\frac{1}{2}(-1+t)+2\times\frac{1}{2}(2+2t)-3\times\frac{1}{2}(-1-3t)+1=0$$

Après résolution, on obtient

$$B'\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$$

Exercice 11

1. Pour déterminer un vecteur directeur de (D_1), on peut utiliser la méthode de l'escroc ou bien utiliser les deux vecteurs normaux des deux plans.
   Une direction de (D_1) est donnée par le produit vectoriel de ces deux vecteurs.
   On obtient ainsi un vecteur directeur de (D_1) :

   $$\vec{d_1}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

   Avec la même technique, on détermine un vecteur directeur de (D_2) :

   $$\vec{d_2}\begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix}$$

   Il est clair que ces deux vecteurs sont non colinéaires.
   Donc (D_1) et (D_2) sont non parallèles.
2. On sait que ces droites sont non parallèles. Donc elles sont coplanaires si et seulement si elles sont sécantes.
   Il convient donc de résoudre le système :

   $$\begin{cases}x+y=2\\y-2z=3\\x+y+z=1\\x-2y+3z=a\end{cases}$$

   En faisant $L_3 \longleftarrow L_3-L_1$, puis $L_4 \longleftarrow L_4-L_1$ il vient :

   $$\begin{cases}x+y=2\\y-2z=3\\z=-1\\-3y+3z=a-2\end{cases}$$

   En faisant maintenant $L_4 \longleftarrow L_4+3L_2$, on obtient :

   $$\begin{cases}x+y=2\\y-2z=3\\z=-1\\-3z=a-2+9\end{cases}$$

   Enfin, en faisant $L_4 \longleftarrow L_4+3L_3$, on obtient :

   $$\begin{cases}x+y=2\\y-2z=3\\z=-1\\0=a+4\end{cases}$$

Finalement, ce système n'a de solutions que pour $a = -4$.
Dans ce cas, on obtient le point d'intersection des deux droites, après résolution du système :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Un vecteur normal du plan est donc $\vec{n} = \vec{d_1} \wedge \vec{d_2} \begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix}$.
Finalement, l'équation cartésienne du plan est

$$4x + y + 6z = -1$$

Planche n^{o} 10: Systèmes linéaires

Exercice 1

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \\ 10 & 21 & 30 & 39 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 4 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & -6 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 19 & -4 & 28 & -6 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -1 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & -4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & -6 \\ 4 & -4 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 & 6 & 8 \\ -4 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ -1 & 12 & 9 & 10 & 19 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(A) : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + 2z = -1 \end{array} \right. \quad (B) : \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{array} \right. \quad (C) : \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z + 3t = 2 \\ -2x - 4y + 2z + t = 3 \\ 3x + 6y - 3z + 2t = 1 \end{array} \right.$$

$$(D) : \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases} \qquad (E) : \begin{cases} x + 2y + z + 4t = 2 \\ y + t = 0 \\ 3x + 2y + z = 3 \\ 4x + 4y + 6z = 6 \end{cases} \qquad (F) : \begin{cases} 2x - 2y + z + t = -1 \\ \dfrac{3}{2}x + y - 3z + \dfrac{t}{2} = 2 \\ y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$(G) : \begin{cases} x + 3y + z + 3t + 4u = 2 \\ -x + y - u = 5 \\ 3x + 2y + t + 4u = 2 \end{cases} \qquad (H) : \begin{cases} 9x + 15y + 18z - 6t + 3u = 3 \\ 2x + y - t + u = 5 \\ 3x + 5y + 6z - 2t + u = 1 \end{cases}$$

Exercice 3

Discuter et résoudre les systèmes suivants, où a, b, m sont des paramètres réels :

$$(I) : \begin{cases} 3x + y - z = -1 \\ 5x + 2y - 2z = a \\ 4x + y - z = b \end{cases} \qquad (J) : \begin{cases} x + y = 1 \\ ax + by = 0 \\ a^2x + b^2y = 1 \\ a^3x + b^3y = 0 \end{cases} \qquad (K) : \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + y + z = m \end{cases}$$

Exercice 4

En préparant l'itinéraire d'une sortie à bicyclette, un organisateur estime que l'on fera du 10 km/h en montée, du 15 km/h en terrain plat et du 18 km/h en descente. La longueur de la promenade est de 33 kilomètres (soit 66 kilomètres aller-retour). On met 2 heures et 32 minutes à l'aller et 2 heures et 16 minutes au retour. Combien de kilomètres de montée, de terrain plat et de descente la route comprend-elle ?

Exercice 5

1. Le vecteur $\vec{u} = (1, 2)$ est-il combinaison linéaire de $\vec{u}_1 = (1, -2)$ et $\vec{u}_2 = (2, 3)$?
2. Le vecteur $\vec{u} = (2, 5, 3)$ est-il combinaison linéaire de $\vec{u}_1 = (1, 3, 2)$ et $\vec{u}_2 = (1, -1, 4)$?
3. Le vecteur $\vec{u} = (3, 1, m)$ est-il combinaison linéaire de $\vec{u}_1 = (1, 3, 2)$ et $\vec{u}_2 = (1, -1, 4)$?

Exercice 6

On considère les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (4, 1, 4)$ et $\vec{u}_3 = (2, -1, 4)$.

1. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est-elle libre ?
2. Même question pour les familles $(\vec{u}_1, \vec{u}_3)$ et $(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$.
3. La famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est-elle libre ?

Exercice 7

On considère les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, -2, 2)$ et $\vec{u}_3 = (2, -1, 2)$.

1. Existe-t-il un vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v})$ soit libre ? Si oui, en donner un.
2. Existe-t-il un vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}_1, \vec{u}_3, \vec{v})$ soit libre ? Si oui, en donner un.

Exercice 8

Déterminer si les familles suivantes sont libres et/ou génératrices de $\mathbb{R}^n$.

1. $\vec{u}_1 = (1, 1)$, $\vec{u}_2 = (-1, 1)$, $\vec{u}_3 = (-1, -1)$;
2. $\vec{u}_1 = (1, 1)$, $\vec{u}_2 = (-1, 1)$;
3. $\vec{u}_1 = (1, 1)$;
4. $\vec{u}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, 1, 0)$;
5. $\vec{u}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$;

6. $\vec{u}_1 = (0,1,1)$, $\vec{u}_2 = (1,0,1)$, $\vec{u}_3 = (1,1,0)$, $\vec{u}_4 = (1,2,3)$, $\vec{u}_5 = (-1,1,-1)$;
7. $\vec{u}_1 = (0,1,1)$, $\vec{u}_2 = (1,0,1)$, $\vec{u}_3 = (0,0,0)$;
8. $\vec{u}_1 = (1,1,1,1)$, $\vec{u}_2 = (1,0,1,0)$, $\vec{u}_3 = (0,-1,0,1)$, $\vec{u}_4 = (1,0,1,1)$;
9. $\vec{u}_1 = (1,0,\ldots,0)$, $\vec{u}_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $\vec{u}_n = (0,\ldots,0,1)$.

Corrigé de la planche n° 10: Systèmes linéaires

Exercice 1

A est déjà échelonnée. Son rang est 3.
Pour B, l'algorithme du pivot de gauss requiert de faire des disjonctions de cas.
Après calcul, on obtient :

- Si $a = b = 0$, le rang est 0 ;
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, le rang est 3 ;
- Si $a \neq 0$ et $b \neq -a$, le rang est 3.
- Si $a \neq 0$ et $b = -a$, le rang est 2

Le rang de C est 1.
Le rang de D est 2.
Le rang de E est 3.
Le rang de F est 3.
Le rang de G est 2.
Le rang de H est 2.
Le rang de I est 4.
Le rang de J est 4.
Le rang de K est 5.
Le rang de L est 4.
Le rang de M est 4.
Le rang de N est 5.
Le rang de O est 5.
Le rang de P est 3.
Pour le rang de Q, il faut faire une disjonction de cas :

- Si deux des coefficients sont égaux, le rang de Q est 2 ;
- Si les trois coefficients sont égaux, le rang de Q est 1 ;
- Dans tous les autres cas, le rang de Q est 3.

Pour le rang de R, il faut également faire une disjonction de cas :

- Si $\lambda = 1$, le rang est 1 ;
- Si $\lambda = -2$, le rang est 2 ;
- Dans tous les autres cas, le rang est 3.

Exercice 2

La solution de (A) est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Voici les étapes du pivot :

$$\begin{aligned}
&L_2 \longleftarrow L_2 + (-1) \times L_1 \\
&L_3 \longleftarrow L_3 + (-1) \times L_1 \\
&L_3 \longleftarrow L_3 + (2) \times L_2 \\
&L_3 \longleftarrow \left(\tfrac{1}{5}\right) \times L_3 \\
&L_1 \longleftarrow L_1 + (-1) \times L_3 \\
&L_2 \longleftarrow L_2 + (-2) \times L_3 \\
&L_1 \longleftarrow L_1 + (-1) \times L_2
\end{aligned}$$

La solution de (B) est :

$$\begin{cases} x - 11z = -8 \\ y + 7z = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Voici les étapes du pivot :

$$\begin{array}{l} L_1 \longleftarrow \left(\frac{1}{2}\right) \times L_1 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + (-1) \times L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + (-3) \times L_1 \\ L_2 \longleftarrow (2) \times L_2 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + \left(\frac{1}{2}\right) \times L_2 \\ L_1 \longleftarrow L_1 + \left(-\frac{3}{2}\right) \times L_2 \end{array}$$

La solution de (C) est :

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ t = 1 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

Voici les étapes du pivot :

$$\begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 + (2) \times L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + (-3) \times L_1 \\ L_2 \longleftarrow \left(\frac{1}{7}\right) \times L_2 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + (7) \times L_2 \\ L_1 \longleftarrow L_1 + (-3) \times L_2 \end{array}$$

La solution de (D) est :

$$\begin{cases} x = \frac{13}{2} \\ y = -8 \\ 0 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Voici les étapes du pivot :

$$\begin{array}{l} L_1 \longleftarrow \left(\frac{1}{4}\right) \times L_1 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + (-2) \times L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + (-3) \times L_1 \\ L_2 \longleftarrow (-2) \times L_2 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + \left(\frac{1}{4}\right) \times L_2 \\ L_1 \longleftarrow L_1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \times L_2 \end{array}$$

La solution de (E) est :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Voici les étapes du pivot :

$$\begin{array}{l} L_3 \longleftarrow L_3 + (-3) \times L_1 \\ L_4 \longleftarrow L_4 + (-4) \times L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + (4) \times L_2 \\ L_4 \longleftarrow L_4 + (4) \times L_2 \\ L_3 \longleftarrow \left(-\frac{1}{2}\right) \times L_3 \\ L_4 \longleftarrow L_4 + (-2) \times L_3 \\ L_4 \longleftarrow \left(-\frac{1}{20}\right) \times L_4 \\ L_1 \longleftarrow L_1 + (-4) \times L_4 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + (-1) \times L_4 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + (-4) \times L_4 \\ L_1 \longleftarrow L_1 + (-1) \times L_3 \\ L_1 \longleftarrow L_1 + (-2) \times L_2 \end{array}$$

La solution de (F) est :

$$\begin{cases} x + \frac{19}{45}t = \frac{4}{5} \\ y - \frac{1}{15}t = \frac{7}{5} \\ z + \frac{1}{45}t = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Voici les étapes du pivot :

$$\begin{array}{l} L_1 \longleftarrow \left(\frac{1}{2}\right) \times L_1 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + \left(-\frac{3}{2}\right) \times L_1 \\ L_2 \longleftarrow \left(\frac{2}{5}\right) \times L_2 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + (-1) \times L_2 \\ L_3 \longleftarrow \left(\frac{2}{9}\right) \times L_3 \\ L_1 \longleftarrow L_1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + \left(\frac{3}{2}\right) \times L_3 \\ L_1 \longleftarrow L_1 + (1) \times L_2 \end{array}$$

La solution de (G) est :

$$\begin{cases} x + \frac{1}{5}t + \frac{6}{5}u = -\frac{8}{5} \\ y + \frac{1}{5}t + \frac{1}{5}u = \frac{17}{5} \\ z + \frac{11}{5}t + \frac{11}{5}u = -\frac{33}{5} \end{cases}$$

Voici les étapes du pivot :

$$\begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 + (1) \times L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + (-3) \times L_1 \\ L_2 \longleftarrow \left(\frac{1}{4}\right) \times L_2 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + (7) \times L_2 \\ L_3 \longleftarrow \left(-\frac{4}{5}\right) \times L_3 \\ L_1 \longleftarrow L_1 + (-1) \times L_3 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + \left(-\frac{1}{4}\right) \times L_3 \\ L_1 \longleftarrow L_1 + (-3) \times L_2 \end{array}$$

La solution de (H) est :

$$\begin{cases} x - \frac{6}{7}z - \frac{3}{7}t + \frac{4}{7}u = \frac{24}{7} \\ y + \frac{12}{7}z - \frac{1}{7}t - \frac{1}{7}u = -\frac{13}{7} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Voici les étapes du pivot :

$$\begin{array}{l} L_1 \longleftarrow \left(\frac{1}{9}\right) \times L_1 \\ L_2 \longleftarrow L_2 + (-2) \times L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + (-3) \times L_1 \\ L_2 \longleftarrow \left(-\frac{3}{7}\right) \times L_2 \\ L_1 \longleftarrow L_1 + \left(-\frac{5}{3}\right) \times L_2 \end{array}$$

Exercice 3

On utilise la notation des matrices augmentées pour résoudre les systèmes.

$$I \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & -2 & a \\ 4 & 1 & -1 & b \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & a+2 \\ 1 & 0 & 0 & b+1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 0 & 0 & a+b+3 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 3a+5 \\ -1 & 0 & 0 & a+2 \\ 0 & 0 & 0 & a+b+3 \end{array}\right)$$

Il faut faire une disjonction de cas :

- Si $a+b+3 \neq 0$, il n'y a pas de solutions.
- Dans le cas contraire, c'est à dire $a+b=-3$. Dans ce cas les solutions sont les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-2 \\ 3a+5 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour résoudre le système J, on utilise l'égalité $b^n - a^n = (b-a)\left(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}\right)$.

$$J \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 0 \\ a^2 & b^2 & 1 \\ a^3 & b^3 & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & -a \\ 0 & (b-a)(b+a) & 1-a^2 \\ 0 & (b-a)(b^2+ab+a^2) & -a^3 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & -a \\ 0 & 0 & 1-a^2+a(b+a) \\ 0 & 0 & -a^3+a(a^2+ba+b^2) \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & -a \\ 0 & 0 & 1+ab \\ 0 & 0 & ab(a+b) \end{array}\right)$$

Ici encore, il faut faire une disjonction de cas.

- Si $1+ab=0$ et $ab(a+b)=0$, ce qui s'écrit $ab=-1$ et $a=-b$ alors le système devient :
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2b & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
  Or $b \neq 0$ (car $ab=-1$). On a donc une unique solution dans $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$
- Dans le cas contraire, il n'y a pas de solutions.

Exercice 3

On note x, y et z les distances de côte, descente et plat à l'aller.
Le temps à l'aller vaut :

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{15} + \frac{z}{18} = 2 + \frac{32}{60}$$

Le temps au retour vaut :

$$\frac{x}{18} + \frac{y}{15} + \frac{z}{10} = 2 + \frac{16}{60}$$

La longueur totale vaut :

$$x + y + z = 33$$

En résolvant le système formé par ces trois équations, on obtient

$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 15 \\ z = 6 \end{cases}$$

À l'aller, la montée est de 12 km, la descente est de 6 km et le plat est de 15 km.

Exercice 4

1. On cherche λ_1 et λ_2 tels que
$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 = \vec{u}$$
En posant le système correspondant aux coordonnées, on obtient des solutions donc la réponse est oui.
2. Même démarche, on obtient un système incompatible donc la réponse est non.
3. Même démarche, on obtient un système compatible lorsque $m \neq 10$. Dans ce cas, la réponse est oui. Et lorsque $m = 10$ la réponse est non.

Exercice 7

On considère les vecteurs $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{u}_2 = (2, -2, 2)$ et $\vec{u}_3 = (2, -1, 2)$.

1. Ces deux vecteurs sont colinéaires donc il est impossible d'obtenir une famille libre contenant ces deux vecteurs.
2. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Il suffit donc de trouver un vecteur $\vec{v}$ qui convient. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ fait l'affaire !
En effet, le produit mixte de ces trois vecteurs donne $-1 \neq 0$.

Exercice 8

Déterminer si les familles suivantes sont libres et/ou génératrices de $\mathbb{R}^n$.

1. $\vec{u}_1 = (1, 1)$, $\vec{u}_2 = (-1, 1)$, $\vec{u}_3 = (-1, -1)$;
2. $\vec{u}_1 = (1, 1)$, $\vec{u}_2 = (-1, 1)$;
3. $\vec{u}_1 = (1, 1)$;
4. $\vec{u}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, 1, 0)$;
5. $\vec{u}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$;
6. $\vec{u}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_4 = (1, 2, 3)$, $\vec{u}_5 = (-1, 1, -1)$;
7. $\vec{u}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{u}_3 = (0, 0, 0)$;
8. $\vec{u}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{u}_3 = (0, -1, 0, 1)$, $\vec{u}_4 = (1, 0, 1, 1)$;
9. $\vec{u}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\vec{u}_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

Planche n° 11: Nombres réels

Exercice 1

Déterminer, si elles existent, les bornes des ensembles suivants et préciser s'il s'agit d'un maximum/minimum.

1. $\left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$;
2. $\left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$;
3. $\left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^*\right\}$;
4. $\left\{\dfrac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$;
5. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 < 0\right\}$;
6. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 < 0 \text{ et } x \geq 0\right\}$;
7. $\{a + bn \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;
8. $\{a + (-1)^n b \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;
9. $\left\{a + \dfrac{b}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. On suppose que B est bornée. Montrer que A est bornée et comparer les bornes supérieures et inférieures de A et de B.

Exercice 3

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les ensembles suivants :

$$-A = \{-x \mid x \in A\}, \; A + B = \{x + y \mid (x,y) \in A \times B\}, \; A + \lambda = \{x + \lambda \mid x \in A\}, \; \lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\}.$$

1. Montrer que $A \cup B$ est majoré et que l'on a $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.
2. Montrer que $A \cap B$ est majoré et que l'on a $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}$. Donner un exemple où l'inégalité est stricte.
3. Montrer que $-A$ est minoré et que l'on a $\inf(-A) = -\sup(A)$.
4. Montrer que $A + \lambda$ est majoré et que l'on a $\sup(A + \lambda) = \sup(A) + \lambda$.
5. Montrer que $A + B$ est majoré et que l'on a $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
6. Si $\lambda > 0$, montrer que λA est majoré et que l'on a $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$. Que peut-on dire si $\lambda < 0$ ou $\lambda = 0$?

Établir des propriétés analogues lorsque l'on suppose que A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et minorées.

Exercice 4

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in A, \forall y \in B, x < y$. Montrer que A est majorée, que B est minorée et que l'on a $\sup A \leq \inf B$. Peut-on avoir égalité ?

Exercice 5

Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ telle que $\sup A > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

Exercice 6

Soient x et y deux réels. Montrer les assertions suivantes.

1. $x \leq y \Longrightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$. La réciproque est-elle vraie ?
2. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 7

Soit x un nombre réel.
Soit l'ensemble $P = \{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$.

Montrer que P admet un maximum. À quoi correspond ce maximum ?

Corrigé de la planche n° 11: Nombres réels

Exercice 1

1. Le maximum est 1 et la borne inférieure est 0.
2. Le maximum est 1 et le minimum est 0.
3. Le maximum est 1 et le minimum est -1.
4. La borne inférieure est 0.
5. C'est l'intervalle $]-1;\ 2[$. La borne supérieure est 2 et la borne inférieure est -1.
6. C'est l'intervalle $[0;\ 2[$. Le minimum est 0 et la borne supérieure est 2.
7. Tout dépend du signe de b.
   Si b est positif, il y a un minimum qui est $a+b$.
   Si b est négatif, il y a un maximum qui est $a+b$.
8. Il y a un maximum et un minimum qui sont, selon le signe de b, $a+b$ et $a-b$.
9. Si b est positif, il y a un maximum qui est $a+b$ et une borne inférieure qui est a.
   Si b est négatif, il y a un minimum qui est $a+b$ et une borne supérieure qui est a.

Exercice 2

Dans toute la suite notons s et t les bornes supérieures respectives de A et B.

1. Les rôles de A et B peuvent être échangés sans nuire à la généralité du problème.

   On peut donc supposer $s \geq t$, c'est à dire $\max\{s;\ t\} = s$. On va montrer que s est la borne supérieure de $A \cup B$.

   Soit $x \in A \cup B$. Si $x \in A$, on a $x \leq s$ et si $x \in B$, on a $x \leq t \leq s$. Ainsi, s est bien un majorant.
   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x \in A$ tel que $s - \varepsilon < x \leq s$. Or $x \in A \cup B$.
   Ainsi s est bien la borne supérieure de $A \cup B$.
2. Soit $x \in A \cap B$. On a $x \in A$ donc $x \leq s$ et $x \in B$ donc $x \leq t$. Ainsi, $x \leq \min(s;\ t)$. On en déduit $\min(s;\ t)$ est un majorant de $A \cap B$ et donc $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}$.

   Cette inégalité n'est pas forcément toujours atteinte. En effet, en considérant $A = [0;\ 2] \cup [12;\ 13]$ et $B = [1;\ 2]$. On a $\sup(A \cap B) = 1$ et $\min\{\sup(A), \sup(B)\} = 2$.
3. Pour tout $x \in -A$, $x \in A$ et donc $-x \leq s$, ce qui donne $x \geq -s$. Ainsi, $-s$ est un minorant de $-A$.
   Et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $s - \varepsilon < x \leq s$, ce qui donne $-s \leq -x < -s + \varepsilon$. Or $-x \in A$.
   On en déduit que $-s$ est la borne inférieure de $-A$.
4. Par un procédé similaire, on montre que $s+\lambda$ est un majorant et que c'est le plus petit des majorants.
5. Ici, la méthode est un peu différente.
   Soit $x \in A+B$. Il existe $(a;\ b) \in A \times B$ tels que $x = a+b$. On obtient ainsi, par somme, $x = a+b \leq s+t$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(a;\ b) \in A \times B$ tels que $s - \dfrac{\varepsilon}{2} < a \leq s$ et $t - \dfrac{\varepsilon}{2} < b \leq t$.
   En sommant, on obtient $s + t - \varepsilon < a + b \leq s + t$. Or $a + b \in A + B$, ce qui montre que $s + t$ est le plus petit des majorants.

Exercice 3

A est majoré par n'importe quel élément de B et B est minoré par n'importe quel élément de A.

Pour montrer l'inégalité, on va raisonner par l'absurde. On suppose que donc $\sup A > \inf(B)$. Cela entraîne qu'il existe un élément a de A tel que $\inf(B) < a \leq \sup(A)$. Et, on en déduit l'existence d'un élément b de B tel que $\inf(B) \leq b < a$, ce qui conduit à une incohérence.

Exercice 4

Il suffit de considérer $\varepsilon = \sup A$.

Exercice 5

1. On va montrer cela par contraposée.
   On note $n = \lfloor x \rfloor$ et $p = \lfloor y \rfloor$. On suppose que $n > p$. Or $x \in [n;\ n+1[$ et $y \in [p;\ p+1[$. Ces deux intervalles sont disjoints et tous les éléments de $[n;\ n+1[$ sont strictement supérieurs à ceux de $[p;\ p+1[$, ce qui permet de conclure.
2. On utilise les mêmes notations. On sait que $x \in [n;\ n+1[$ et $y \in [p;\ p+1[$ donc $x+y \in [n+p;\ n+p+2[$. On réalise alors une disjonction de cas.
   Si $x+y \in [n+p;\ n+p+1[$ alors $\lfloor x+y \rfloor = n+p$ et on vérifie bien que la série d'inégalités est vraie.
   Si $x+y \in [n+p+1;\ n+p+2[$ alors $\lfloor x+y \rfloor = n+p+1$ et on vérifie bien que la série d'inégalités est vraie.
3. On sait que $\lfloor nx \rfloor \in]nx-1;\ nx]$ donc $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \in \left]x - \dfrac{1}{n};\ x\right]$. Or, $\left]x - \dfrac{1}{n};\ x\right] \subset]x-1;\ x]$ et il existe un unique entier dans cet intervalle qui vaut $\lfloor x \rfloor$.
   On en déduit $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Planche n$^{\text{o}}$ 12: Suites

Exercice 1

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie au fausse (en justifiant).

1. La somme de deux suites majorées est majorée.
2. Le produit de deux suites majorées est majoré.
3. Le produit de deux suites bornées est borné.
4. Une suite réelle positive qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui ne s'annule pas.
   La suite est croissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
6. La somme de deux suites divergentes est divergente.
7. Le produit de deux suites divergentes est divergente.
8. La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.
9. Le produit d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.

Exercice 2

1. Rappeler le théorème du cours concernant les suites extraites d'une suite convergente.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers l.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Que peut-on dire de la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 4

Montrer que toute suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire.

Exercice 5

Montrer que toute suite d'entiers naturels convergente est stationnaire.

Exercice 6

Étudier la convergence des suites dont le terme général est :

$$a_n = \frac{\cos n}{n+1}; \quad b_n = \sin(n^2\pi/3); \quad c_n = \frac{n+(-1)^n}{n^2+1}; \quad d_n = \frac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2}; \quad e_n = \frac{e^n+n^2}{n^4+1};$$

$$f_n = \frac{\ln n + 1}{n+4}; \quad g_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}; \quad h_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}; \quad i_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \quad j_n = \frac{n!}{n^n}.$$

Exercice 7

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Étudier la monotonie de S_n.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$: $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
3. En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 8

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et trouver sa limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $T_{n+1} = \frac{T_n + S_n}{3}$.
3. En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 9

Étudier la convergence des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k} \quad , \quad v_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!.$$

(*Indication* : On pourra penser à encadrer de façon judicieuse chacun des termes des sommes.)

Exercice 10

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On la note x_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1/2 \leq x_n \leq 1$.
3. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
4. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 11

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ci-dessous sont adjacentes.

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$;
2. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$;
3. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$
4. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$. Montrer que la limite commune de celles-ci est un irrationnel.

Exercice 12

Soit $x > 1$. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = x$, $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies, qu'elles sont adjacentes et calculer leur limite commune.

Exercice 13

Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies et qu'elles sont adjacentes. Leur limite commune (que l'on ne cherchera pas à calculer) est appelée la *moyenne arithmético-géométrique* de a et de b.

Exercice 14

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right). \end{cases}$

1. Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$.
   Montrer que pour tout $x \geq \sqrt{a}$, on a $f(x) \leq x$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \sqrt{a}$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 15

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 > e \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e\ln(u_n). \end{cases}$

1. Tracer les courbes d'équation $y = x$ et $y = e\ln(x)$, et essayer de deviner le comportement de la suite.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Montrer que si $u_0 \geq e$, alors la suite converge vers e.
4. On suppose maintenant que $u_0 < e$. Montrer que la suite ne peut pas être minorée par 0. En déduire que la suite n'est définie que pour un nombre fini de termes.

Exercice 16

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$. Montrer que la suite est bien définie, étudier sa convergence et déterminer son éventuelle limite. (*Indication* : On pourra commencer par tracer les courbes d'équation $y = x$ et $y = \sqrt{x+4}$, et essayer de deviner le comportement de la suite.)

Exercice 17

Soient $f : x \mapsto 1 + \dfrac{2}{x}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'intervalle $[1,3]$ est stable par f, c'est-à-dire que $f([1,3]) \subset [1,3]$.
   Que peut-on en déduire sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Quel est le sens de variation de f sur $[1,3]$?
2. Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   Montrer que (v_n) est croissante et (w_n) décroissante.
3. En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leur limite respective.
4. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Exercice 18

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in]-\infty, 2] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}. \end{cases}$

1. Pour quelles valeurs de u_0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie ? (*Indication* : On pourra étudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2-x}$ et s'intéresser aux intervalles I de $\mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset I$.)
   On suppose désormais que u_0 a une telle valeur.
2. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Qu'en déduit-on ?
4. On cherche à présent les points fixes de $f \circ f$.
   (a) Déterminer les points fixes de f et montrer qu'ils sont points fixes de $f \circ f$.
   (b) Montrer que les points fixes de $f \circ f$ sont racines d'un polynôme de degré 4.
   (c) Déterminer les points fixes de $f \circ f$ en utilisant les deux questions précédentes.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 19

Donner un équivalent simple des suites de termes généraux suivants :

$$\frac{3n^4 - 2n^2 + 1}{2n^3 + 1}; \quad \frac{\ln n + n + 1}{3n^2 + 2n + 1}; \quad n^3 \frac{\ln n + e^n + 1}{1 + n^2}; \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n^2 + 1}\right); \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right); \quad \sin\sin\frac{\pi}{n^2};$$

$$\frac{n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\tan\frac{\pi}{n}}; \quad \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{\cos\left(\frac{\pi}{n^2}\right) - e^{\frac{1}{n}}}; \quad \frac{\ln(n^3 + 3)}{n + 2}; \quad 1 + e^{2/n} - \frac{3}{n}; \quad \ln(n+2) - \ln(n+1).$$

Exercice 20

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est décroissante. (*Indication :* Que vaut $f_{n+1} - f_n$?)
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$, et retrouver ainsi la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Montrer : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
6. Donner un équivalent simple de $\frac{1}{n} - u_n$ en $+\infty$.

Exercice 21

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln x = n$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ que nous noterons u_n.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et déterminer sa limite.
3. En déduire : $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$.
4. Montrer : $u_n - n \underset{+\infty}{\sim} -\ln n$.

Exercice 22

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie au fausse (en justifiant).

1. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
3. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$.
4. $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$ si et seulement si $u_n - v_n \underset{+\infty}{=} o(1)$
5. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang alors $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.
6. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

Corrigé de la planche n° 12: Suites

Exercice 1

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites majorées par des réels M et M'.
   On a, pour tout n, $u_n + v_n \leq M + M'$. C'est vrai.
2. C'est faux. Considérer, pour tout n, $u_n = -n$ et $v_n = -n$. Ces deux suites sont majorées. Pourtant $u_n v_n = n^2$ ne l'est pas.
3. C'est vrai. Soient (u_n) et (v_n) deux suites bornées. Il existe deux nombres positifs K et K' tels que, pour tout n, $|u_n| \leq K$ et $|v_n| \leq K'$.
   On en déduit $|u_n v_n| = |u_n| \times |v_n| \leq KK'$.
4. C'est faux. Considérer pour cela la suite (u_n) définie pour tout n par $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
   Cette suite tend vers 0 et n'est jamais décroissante.
5. C'est faux. Considérer la suite (u_n) définie pour tout n par $u_n = -n - 1$. Cette suite n'est pas décroissante et pourtant elle vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.
6. C'est faux. Considérer la somme de $(-1)^{n+1}$ et de $(-1)^n$ qui est constante égale à 0.
7. C'est faux. Considérer le produit de $(-1)^n$ par lui-même.
8. C'est vrai. En effet, considérons (u_n) convergente, (v_n) divergente. Notons w_n la somme de ces deux suites.
   On ne peut pas avoir w_n convergente car sinon $v_n = w_n - u_n$ serait convergente.
9. C'est faux. Considérer le produit de $(-1)^n$ par $\dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 5

Soit (u_n) une suite d'entier qui possède une limite finie l.
Soit $\varepsilon = \dfrac{1}{3} > 0$. Il existe un rang p tel que pour tout $n \geq p$, $u_n \in \left]l - \dfrac{1}{3};\ l + \dfrac{1}{3}\right[$. Or la largeur de cet intervalle est de $\dfrac{2}{3}$ donc il existe au plus un entier dans cet intervalle. Or u_p est dans cet intervalle et est un entier. Ainsi, pour tout $n \geq p$, $u_n = u_p$ donc la suite est bien stationnaire.

Exercice 6

Pour tout n, $\dfrac{-1}{n+1} \leq a_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ car $\cos(n) \in [-1;\ 1]$. Par le théorème des Gendarmes, $a_n \to 0$.

On calcule les premiers termes de la suite $b_0 = 0$, $b_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $b_2 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, $b_3 = 0$, $b_4 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, $b_5 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

En particulier, lorsque $n^2 \equiv 1[6]$, $b_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et lorsque $n^2 \equiv 0[6]$, $b_n = 0$.
Mais si $n \equiv 1[6]$, on vérifie facilement que $n^2 \equiv 1[6]$. De même, si $n \equiv 0[6]$, on a $n^2 \equiv 0[6]$. Ces deux remarques nous montrent que les suites extraites (b_{6n}) et (b_{6n+1}) sont constantes mais de valeurs différentes. Ainsi (b_n) n'a pas de limite.

Pour tout $n \neq 0$, $c_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}\right)$. Cette forme n'est pas indéterminée et on a ainsi $c_n \to 0$.

On vérifie facilement que, pour tout n, $d_n \geq \dfrac{n-1}{3}$. Par le théorème de minoration, $d_n \to +\infty$.

Pour tout $n \neq 0$, $e_n = \dfrac{e^n}{n^4}\left(\dfrac{1+\frac{n^2}{e^n}}{1+\frac{1}{n^4}}\right)$. Par croissances comparées, on en déduit que $e_n \to +\infty$.

Avec le même genre de technique, on prouve que $f_n \to 0$.

En utilisant la conjugaison, on vérifie que, pour tout $n \geq 1$, $g_n = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$. Ainsi, $g_n \to 0$.

Avec la même technique, on vérifie que, pour tout $n \geq 1$, $h_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$.

Ainsi, $h_n \to 1$.

Pour tout n, on a $\dfrac{\sqrt{n}-1}{n} \leq i_n \leq \dfrac{\sqrt{n}}{n}$, c'est à dire $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq i_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Par le théorème des Gendarmes, on en déduit que $\lim i_n = 0$.

Pour tout $n \geq 2$, $j_n = \dfrac{1}{n} \times \left(\dfrac{2 \times 3 \times \cdots \times n}{n \times n \times \cdots \times n}\right)$. On en déduit que $0 \leq j_n \leq \dfrac{1}{n}$. Ainsi, toujours par le théorème des Gendarmes, $j_n \to 0$.

Exercice 7

1. Pour tout $n \geq 1$, $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$. (S_n) est donc strictement croissante.
2. Pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n(n-1)}$. Or $n(n-1) \leq n^2$. On a donc bien

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

3. D'après ce qui précède, pour tout $n \geq 2$, on a $S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}\right)$. Cette dernière somme est télescopique. On obtient ainsi, après simplification :

$$S_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

En particulier (S_n) est croissante et majorée. On peut conclure à l'aide du théorème de convergence monotone.

Exercice 9

Pour (u_n) :
Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $1 \leq k \leq n$, on vérifie que $\dfrac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \dfrac{n}{n^2+1}$.

Par sommation, on obtient, $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$. Or, on montre facilement que les deux suites qui encadrent (u_n) ont pour limite commune 1. On conclut à l'aide du théorème des Gendarmes.

Pour (v_n) :
Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $kx - 1 \leq \lfloor kx \rfloor \leq kx$.
Par sommation, on obtient, $\dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leq v_n \leq \sum_{k=1}^{n} kx$.
En utilisant les nombres triangulaires, on a $\dfrac{1}{n^2} \times \sum_{k=1}^{n} kx = x \times \dfrac{n(n+1)}{2n^2} = \dfrac{x}{2} \times \left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.
Finalement, on vérifie $\dfrac{x}{2} \times \left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} \leq v_n \leq \dfrac{x}{2} \times \left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. On en déduit, par le théorème des Gendarmes que $v_n \to \dfrac{x}{2}$.

Exercice 10

On pose, pour tout $n \geq 1$, $f_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + 1$. Notons que cette fonction est strictement croissante et continue comme somme de fonctions strictement croissantes et continues.

1. On a $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$. Or f_n est strictement croissante et continue. Ainsi, tout nombre positif possède un unique antécédent par f_n sur $\mathbb{R}^+$. En particulier 1 possède un unique antécédent par f_n sur $\mathbb{R}^+$.
2. On a $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$ et $f_n(1) = n \geq 1$. Par les mêmes arguments que précédemment, le théorème des valeurs intermédiaires nous montre que 1 possède un unique antécédent par f_n sur $\left]\frac{1}{2};\ 1\right]$
3. Pour tout $n \geq 1$, calculons $f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + x_n^{n+1} = 1 + x_n^{n+1} > 1$. Ainsi, 1 possède un unique antécédent par f_{n+1} dans $\left]\frac{1}{2};\ x_n\right[$, ce qui nous prouve que $x_{n+1} < x_n$. La suite est donc bien strictement décroissante.
4. Pour tout n, on a $f_n(x_n) = 1$ donc $x_n \left(\dfrac{1 - x_n^n}{1 - x_n}\right) = 1$, c'est à dire, après calcul, $x_n = \dfrac{1}{2} + x_n^{n+1}$. On en déduit, pour tout $n \geq 2$, sachant que x_n est décroissante :

$$0 \leq x_n - \frac{1}{2} = x_n^{n+1} \leq x_2^{n+1}$$

   Or $0 < x_2 < 1$. Ainsi, par le théorème des Gendarmes, on prouve que $\lim x_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 11

1. Pour tout $n \geq 1$, $v_n - u_n = \dfrac{1}{n} > 0$. Ainsi, $v_n \geq u_n$ et $\lim(v_n - u_n) = 0$.
   De plus, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, ce qui montre que (u_n) est strictement croissante.
   Enfin, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{-1}{n(n+1)^2} < 0$. Ainsi, (v_n) est strictement décroissante. Cela permet de conclure.
2. On obtient, après calcul que, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0$. Ainsi, (u_n) est strictement croissante.
   On obtient également, pour tout $n \geq 1$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n}$. Or $2n+2 > n$ et $2n+1 > 2n$, ce qui donne $\dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} < 2 \times \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, $v_{n+1} - v_n < 0$. (v_n) est donc strictement décroissante.
   Enfin, on vérifie que $v_n - u_n = \dfrac{1}{n}$, ce qui montre que $\lim(v_n - u_n) = 0$ et permet de conclure.

Exercice 12

On va commencer par montrer que, pour tout n, $u_n \geq v_n > 0$.
Une petite récurrence permet de montrer facilement que ces deux suites sont toujours strictement positives. Montrons maintenant que pour tout n, $u_n \geq v_n$
C'est vrai au rang 0 car $x > 1$. Et pour tout $n \geq 1$, on a la série d'équivalences :

$$\begin{aligned} u_{n+1} \geq v_{n+1} &\iff \frac{u_n + v_n}{2} \geq \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ &\iff (u_n + v_n)^2 \geq 4u_n v_n \text{ car } u_n + v_n > 0 \\ &\iff (u_n - v_n)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vraie, on en déduit que pour tout n, $u_n \geq v_n$.

Pour tout n, u_{n+1} étant la moyenne arithmétique de (u_n) et (v_n), on a $u_n \geq u_{n+1} \geq v_n$, ce qui montre que (u_n) décroît.

De même, v_{n+1} étant la moyenne harmonique de (u_n) et (v_n), on a $u_n \geq v_{n+1} \geq v_n$, ce qui montre que (v_n) décroît.
En raison du théorème de convergence monotone, ces deux suites convergent vers des limites l et l'.

Par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, on obtient $\dfrac{l + l'}{2} = l$, c'est à dire $l = l'$. Les deux suites sont donc bien adjacentes.

Reste à déterminer leur limite commune. Mais on a prouvé en TD l'ordre des différentes moyennes de deux nombres strictement positifs. On en déduit que, pour tout n :

$$u_n \geq \frac{u_n + v_n}{2} \geq \sqrt{u_n v_n} \geq \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \geq v_n$$

Or, pour tout n, $u_{n+1}v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \times \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = u_n v_n$. Ainsi la suite $(u_n v_n)$ est constante égale à $u_0 v_0 = x$.
On en déduit par passage à la limite dans la série d'inégalité précédente que

$$\lim u_n = \lim v_n = \sqrt{x}$$

Planche n° 13: Probabilités

Exercice 1

Soit Ω un univers et soient A, B, C trois événements de Ω. Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :

1. seul A se réalise ;
2. A et B se réalisent, mais pas C.
3. les trois événements se réalisent ;
4. au moins l'un des trois événements se réalise ;
5. au moins deux des trois événements se réalisent ;
6. aucun ne se réalise ;
7. au plus l'un des trois se réalise ;
8. exactement deux des trois se réalisent.

Exercice 2

Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{k\}$ soit proportionnelle à k.

Exercice 3

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.
Montrer : $\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \leq P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$.

Exercice 4

On tire trois cartes dans un jeu de 52 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir trois cartes qui sont soit toutes trois de la même couleur, soit toutes les trois de couleurs différentes si

1. on tire les trois cartes simultanément ;
2. on tire les trois cartes successivement sans remise ;
3. on tire les trois cartes successivement avec remise.

Exercice 5

Paradoxe du Chevalier de Méré.

1. On lance quatre fois un dé. Prenez-vous le pari d'obtenir (au moins) un 6 ?
2. Lorsqu'on lance deux dés, il y a 6 fois plus d'issues que lorsqu'on ne lance qu'un dé.
   On lance 24 (=6×4) fois deux dés, prenez-vous le pari d'obtenir (au moins) un double 6 ?

Exercice 6

On dispose de deux dés équilibrés notés D et D' à respectivement n faces et m faces avec $n > m$.

On lance ces deux dés. Quelle est la probabilité que la face de D' soit strictement supérieure à la face de D ?

Exercice 7

On lance trois fois de suite un dé (non pipé) à 6 faces. Déterminer la probabilité d'obtenir :

— au moins un 6 ;
— exactement un 6 ;
— au moins deux faces identiques ;
— au moins deux faces identiques et une somme paire des faces.

Exercice 8

On jette 3 fois un dé à 6 faces, et on note a, b et c les résultats successifs obtenus. On note $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer la probabilité pour que

— Q ait deux racines réelles distinctes ;
— Q ait une racine réelle double ;
— Q n'ait pas de racines réelles.

Exercice 9

On choisit simultanément deux entiers distincts entre 1 et n (premier tirage) puis indépendamment, trois entiers distincts entre 1 et n (deuxième tirage).

1. Avec quel probabilité les entiers tirés au premier tirage le sont aussi au deuxième ?
2. Quelle est la probabilité qu'aucun des entiers tirés au premier tirage ne le soit de nouveau au deuxième ?

Exercice 10

Une urne contient b boules blanches et n boules noires. On tire successivement toutes les boules sans remise. Déterminer la probabilité que la première boule noire soit tirée au k-ième tirage.

Exercice 11

Un concours met en jeu n places de concert. Vous faites partie des gagnants. Vous vous retrouvez, avec les autres gagnants, à faire la queue à un guichet pour retirer votre place. Parmi ces n places il y en a p pour le concert de votre groupe préféré. Elles sont données au hasard. Où vous placez-vous dans la file ?

Exercice 12

Un jeu de 32 cartes a été truqué : on a remplacé une carte autre que l'as de pique par un deuxième as de pique.

1. On tire simultanément n cartes (n<32). Quelle probabilité a-t-on de de déceler la supercherie ?
2. On répète à présent k fois l'expérience précédente avec $n = 4$. À partir de quelle valeur de k la probabilité de déceler la supercherie est-elle supérieure ou égale à $0,9$?

Exercice 13

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. On suppose $P(A) > 0$. Comparer $P(A \cap B | A \cup B)$ et $P(A \cap B | A)$.

Exercice 14

On dispose trois coffres sur une table. Le premier coffre contient deux pièces d'or, le second deux pièces d'argent et le dernier une pièce d'or et une pièce d'argent. Toutes ces pièces sont indiscernables au toucher.
Un candidat est invité à choisir à l'aveugle et au hasard l'un des coffres. Il saisit ensuite, toujours à l'aveugle, l'une des pièces de ce coffre. Elle est en or.

Quelle est la probabilité que l'autre pièce du coffre soit également en or ?

Exercice 15

1. J'ai deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que mon autre enfant soit un garçon ?
2. J'ai deux enfants et mon ainée est une fille. Quel est la probabilité que mon autre enfant soit un garçon ?
3. Une famille a quatre enfants. Je parie qu'il y a trois enfants du même sexe et un quatrième de l'autre sexe. Pourquoi ?

Exercice 16

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boîtes de clé USB. 5% des boîtes sont abimées. Le gérant estime que :

— 60% des boîtes abimées contiennent au moins une clé défectueuse ;

— 98% des boîtes non abimées ne contiennent aucune clé défectueuse.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : « la boite est abimée » et par D l'événement « la boite achetée contient au moins une clé défectueuse ».

1. Donner les probabilités de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P(D|A)$, $P(D|\bar{A})$, $P(\bar{D}|A)$ et $P(\bar{D}|\bar{A})$.
2. Le client constate qu'une des clés achetées est défectueuse. Quelle est a la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abimée ?

Exercice 17

On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

Exercice 18

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice 19

Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'apparition d'un six soit de $1/2$. On choisit un dé au hasard, on le jette, et on obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

Exercice 20

Une usine fabrique des pièces, avec une proportion de 0,05 de pièces défectueuses. Le contrôle des fabrications est tel que :

— si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0,96.

— si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité

1. qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Exercice 21

Vous jouez à pile ou face avec un autre joueur. Il parie sur pile, lance la pièce, et obtient pile. Quelle est la probabilité pour qu'il soit un tricheur ? (On l'exprimera en fonction de la proportion de tricheurs dans la population).

Exercice 22

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1, 50% pour la classe R_2, et 30% pour la classe R_3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?
2. Si M. Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Exercice 23

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
3. En déduire la valeur de $\lim_n p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 24

On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor a été placé dans l'un des ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quel est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Exercice 25

On se donne $N+1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne numéro k contient k boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans l'urne choisie, on tire des boules avec remise.

1. Quelle est la probabilité que la $(n+1)$-ième boule tirée soit blanche sachant que les n précédentes l'étaient toutes ?
2. Que devient cette probabilité lorsque N tend vers $+\infty$?

Exercice 26

1. Soient A, B, C trois événements. Montrer :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

2. On dispose de 3 composants électriques C_1, C_2 et C_3 dont la probabilité de fonctionnement est p_i, et de fonctionnement totalement indépendant les uns des autres. Donner la probabilité de fonctionnement du circuit
   (a) si les composants sont disposés en série.
   (b) si les composants sont disposés en parallèle.
   (c) si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

Exercice 27

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une hasard, et on considère les événements A = « tirage d'un nombre pair » et B = « tirage d'un multiple de 3 ». Les événements A et B sont-ils indépendants ?
Même question avec une urne contenant 13 boules.

Exercice 28

On considère un dé pipé à 6 faces, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k. On note X la valeur de la face obtenue.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance. Comparer avec un dé non pipé.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, puis son espérance.

Exercice 29

Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec $P(X = 0) = 0,1$; $P(X = 1) = 0,3$; $P(X = 2) = 0,4$; $P(X = 3) = 0,2$.

1. On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z.
2. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de voitures louées par jour.
   Déterminer la loi de Y.
3. Calculer la marge brute moyenne par jour.

Exercice 30

A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ? (on discutera en fonction de p).

Exercice 31

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clefs dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

1. Il essaie les clefs les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clef qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.
2. En réalité, la soirée était bien arrosée, et après chaque essai, le concierge remet la clef essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef.

Exercice 32

On se propose d'analyser le sang d'une population de N individus pour y déceler l'éventuelle présence d'un virus dont on sait qu'il affecte une personne donnée avec une probabilité p. Pour cela, on regroupe les individus par groupes de n (on suppose N divisible par n). On rassemble la collecte de sang des individus d'un même groupe et on teste l'échantillon. Si le résultat est positif, on analyse alors le sang de chacun des individus du groupe.

1. Déterminer la probabilité qu'un groupe soit infecté.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de groupes positifs.
3. Soit Y la variable aléatoire déterminant le nombre d'analyses effectuées. Calculer l'espérance de Y en fonction de N, n et p.
4. Discuter de l'avantage de ce protocole de dépistage dans le cas où $N = 1000$, $n = 10$ et $p = 0,01$.
5. Déterminer, en fonction de n, la valeur maximale de p pour que ce protocole soit plus avantageux que le test systématique de chacune des personnes.

Exercice 33

On tire au hasard un entier X entre 1 et n, puis de nouveau au hasard un entier Y entre 1 et X. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

Exercice 34

Soit X une variable aléatoire réelle de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Quelle est la valeur de X la plus probable ?

Exercice 35

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,N]\!]$. Montrer : $E(X) = \sum_{k=0}^{N-1} P(X > k)$.

Exercice 36

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$.
On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = k) = a\binom{n}{k}$.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Calculer l'espérance de $X(X-1)$.
4. En déduire la variance de X.

Exercice 37

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note X le nombre de boules noires obtenues.

1. Déterminer la loi de X.
2. (a) En considérant le coefficient de t^{n-1} dans le développement de $(1+t)^{n-1}(1+t)^n$, montrer $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k} = \binom{2n-1}{n-1}$.
   (b) En déduire l'espérance de X.
3. (a) En considérant le coefficient de t^{n-2} dans le développement de $(1+t)^{n-2}(1+t)^n$, établir une égalité analogue à celle de la question précédente.
   (b) En déduire l'espérance de $X(X-1)$.
   (c) En déduire la variance de X.

Exercice 38

Soit X une variable aléatoire réelle de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Calculer l'espérance de la variable $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

Exercice 39

Dans une urne contenant n boules blanches et n boules noires, on prélève successivement et sans remise les boules. On note X le nombre de tirage nécessaire à l'obtention de toutes les boules noires.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer son espérance.

Exercice 40

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini.

1. Démontrer l'**inégalité de Markov** : pour tout $a > 0$, $P(|X| \geq a) \leq \dfrac{E(|X|)}{a}$.
2. En déduire l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : pour tout $a > 0$, $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$.

Exercice 41

20 livres sont disposés sur une étagère. Parmi ces livres 5 sont de Zola.
On suppose que les livres sont rangés aléatoirement.
On note Z le nombre maximal de livres de Zola consécutifs que l'on peut trouver sur cette étagère. Par exemple, $Z = 3$ signifie qu'il y a exactement trois livres de Zola côte à côte sur cette étagère.

1. Déterminer, pour tout $k \in [\![1;\ 5]\!]$, $P(Z = k)$.
2. On constate qu'il y a quatre livres de Zola côte à côte. Peut-on, avec une certitude d'au moins 95% suspecter que le bibliothécaire a rassemblé ces livres ?

Corrigé de la planche n° 13: Probabilités

Exercice 1

1. $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
2. $A \cap B \cap \overline{C}$
3. $A \cap B \cap C$
4. $A \cup B \cup C$
5. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
6. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
7. $\overline{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)}$
8. $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (B \cap C \cap \overline{A})$

Exercice 2

On cherche α telle que $P(k) = \alpha k$.
Or, on sait que

$$P(\Omega) = 1 = \sum_{1 \leq \leq n} P(k) = \sum_{1 \leq \leq n} (\alpha k) = \alpha \times \frac{n(n+1)}{2}$$

On obtient donc

$$\alpha = \frac{2}{n(n+1)}$$

Exercice 4

On va noter C : « les cartes sont de la même couleur. » et D : « les cartes sont toutes les trois de couleurs différentes. »

1. Pour la résolution, on décide que l'ordre n'a pas d'importance.
   L'univers équiprobable est ainsi constitué de l'ensemble des mains à trois cartes. $\#\Omega = \binom{3}{32}$ (nombre de combinaisons de trois éléments pris parmi 52).
   $\#C = 4 \times \binom{3}{4} \times 48$ et $\#D = \binom{3}{4} \times 13^3$.
   On en déduit, $P(C) = \dfrac{\#C}{\#\Omega}$ et $P(D) = \dfrac{\#D}{\#\Omega}$.
2. C'est kif-kif !
3. Là, c'est différent.
   Pour la résolution, on décide que l'ordre est important ! (mais on peut ne pas faire ce choix mais dans ce cas les calculs sont nettement plus compliqués).
   Ainsi l'univers équiprobable est constitué de 52^3 issues (nombre d'applications de $[\![1;\ 3]\!]$ vers les 52 cartes).
   Dans ce cas, $\#C = 4 \times 13^3$ et $\#D = 4 \times 3 \times 2 \times 13^3$.

Exercice 9

On peut résoudre cet exercice avec un arbre ou bien avec du dénombrement uniquement.
On va choisir le dénombrement ! (mais je traiterai l'arbre, plus facile, en TD).
Notons E_k cet évènement.
On note W_i, une boule blanche est choisie au i-ième tirage.
On a donc $E_k = W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_{k-1} \cap \overline{W_k}$.

On cherche, pour tout k,
$$P\left(W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_{k-1} \cap \overline{W_k}\right)$$
Ainsi, si $k-1 > b$, on a $P(E_k) = 0$. On se place donc dans le cas contraire, c'est à dire $k-1 \leq b$.
On considère ici que l'ordre des boules est important. Soit Ω l'univers formé des tirages des k premières boules. $\#\Omega = (n+b) \times (n+b-1) \times \cdots (n+b-k+1)$.

On a donc $\#\left(W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap \cdots \cap W_{k-1} \cap \overline{W_k}\right) = b \times (b-1) \times (b-2) \times \cdots \times (b-k+2) \times n$, soit
$$P(E_k) = P\left(W_1 \cap W_2 \cap W_3 \cap \cdots \cap W_{k-1} \cap \overline{W_k}\right) = \frac{b \times (b-1) \times (b-2) \times \cdots \times (b-k+2) \times n}{(n+b) \times (n+b-1) \times \cdots (n+b-k+1)}$$

Exercice 10

L'intuition nous dit que l'ordre importe peu ! On va le prouver par le raisonnement.

On note G_k l'évènement, la k-ième place tirée est celle du groupe que j'aime.

On va montrer que, pour tout $k \in [\![1;\ n]\!]$, $P(G_k) = \dfrac{p}{n}$, ce qui montrera que l'ordre importe peu.

Faisons une récurrence sur k.

- Pour $k = 1$, on a bien $P(G_1) = \dfrac{p}{n}$.
- On suppose que, pour tout $i \leq k$, $P(G_i) = \dfrac{p}{n}$.
  On veut montrer que $P(G_{k+1}) = \dfrac{p}{n}$. Pour cela, on utilise la formule des probabilités totales.
  On a
$$\begin{aligned}
P(G_{k+1}) &= P(G_{k+1}|G_k) \times P(G_k) + P\left(G_{k+1}|\overline{G_k}\right) \times P\left(\overline{G_k}\right) \\
&= \frac{p-1}{n-1} \times \frac{p}{n} + \frac{p}{n-1} \times \frac{n-p}{n} \\
&= \frac{p(p-1) + p(n-p)}{n(n-1)} \\
&= \frac{p(n-1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{p}{n}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'hypothèse est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout n.

Exercice 11

1. L'univers équiprobable est ici constitué de l'ensemble des mains de n cartes, son cardinal est $\#\Omega = \binom{n}{32}$.
   On peut déceler la supercherie si et seulement si les deux as de pique se trouvent dans la main prélevée. Soit S cet évènement. On a $\#S = \binom{(n-2)}{30}$.
   Finalement, $P(S) = \dfrac{\#S}{\#\Omega}$.
2. On note S_i l'évènement : on décèle la supercherie à la i-ième répétition.
   L'évènement recherché est le contraire de $\overline{S_1} \cap \overline{S_1} \cap \cdots \overline{S_k}$.
   Or, tous ces évènements sont indépendants et de même probabilité $1 - P(S_1)$.
   On cherche donc k tel que $1 - (1 - P(S_1))^k \geq 0,9$, c'est à dire $(1 - P(S_1))^k \leq 0,1$.
   On résout donc
$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{\binom{2}{30}}{\binom{4}{32}}\right)^k \leq 0,1 &\iff k \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln\left(1 - \frac{\binom{2}{30}}{\binom{4}{32}}\right)} \\
&\iff k \geq 190
\end{aligned}$$

Il faut répéter 190 fois l'expérience !

Exercice 13

1. Ici, on considère que l'ordre des enfants est important. L'univers est constitué de 4 issues.

   On note F l'évènement « j'ai une fille ». On a $P(F) = \dfrac{3}{4}$.

   On note G l'évènement « j'ai une fille et un garçon ». On a $P(G) = \dfrac{1}{2}$.

   On en déduit, $P(G|F) = \dfrac{P(G \cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(G)}{P(F)}$ (car $G \subset F$).

   Ainsi, $P(G|F) = \dfrac{2}{3}$.

2. On note A l'évènement « l'aînée est une fille ». On a $P(A) = \dfrac{1}{2}$.
   On note H l'évènement : « mon premier est un garçon et ma seconde est une fille ». Sa probabilité est $\dfrac{1}{4}$.
   On cherche $P(H|A) = \dfrac{P(H \cap A)}{P(A)} = \dfrac{1}{2}$.

3. L'univers est constitué alors de $2^4 = 16$ issues équiprobables. Soit l'évènement H : mon pari est correct.
   H est constitué de $4 \times 2 = 8$ issues. Mon pari a donc une chance sur deux d'être vrai.

Exercice 14

1. Par lecture de l'énoncé : $P(A) = 0,05$, $P(\bar{A}) = 0,95$, $P(D|A) = 0,6$ et $P\left(D|\bar{A}\right) = 0,02$.
2. C'est la formule de Bayes.
   $P(A|D) = \dfrac{P(D|A) \times P(A)}{P(D)} = \dfrac{P(D|A) \times P(A)}{P(D|A) \times P(A) + P\left(D|\bar{A}\right) \times P\left(\bar{A}\right)} \simeq 0,6122.$

Exercice 16

Soit H l'évènement : « l'étudiant répond au hasard. »
Soit B l'évènement : « l'étudiant a la bonne réponse. »
On a, par lecture de l'énoncé, $P(B|H) = \dfrac{1}{m}$, $P\left(B|\bar{H}\right) = 1$, $P\left(\bar{H}\right) = p$.
On cherche

$$P\left(\bar{H}|B\right) = \frac{P\left(B|\bar{H}\right) \times P\left(\bar{H}\right)}{P(B|H) \times P(H) + P\left(B|\bar{H}\right) \times P\left(\bar{H}\right)} = \frac{p}{p + \frac{1-p}{m}} = \frac{mp}{1 + p(m-1)}$$

Exercice 20

1. On note A l'évènement « la personne va avoir un accident dans l'année. »
   Enfin, on note R_i les évènements « la personne appartient à la classe de risque R_i »

   On a, par la formule des probabilités totales :

   $$P(A) = P(A|R_1)P(R_1) + P(A|R_2)P(R_2) + P(A|R_3)P(R_3) = 0,175$$

2. On cherche

   $$P(R_1|A) = \frac{P(A \cap R_1)}{P(R_1)} = \frac{P(A|R_1) \times P(R_1)}{P(A)} \simeq 0,0571$$

Exercice 21

Ici, tout dépend de l'interprétation de la proposition « Avec une probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. »
Je choisis de considérer que le contraire est vraiment le contraire logique. En particulier, cela implique qu'une personne qui a reçu une information fausse mais qui transmet son contraire transmettra alors l'information juste !

1. On note C_n la n-ième personne a reçu l'information correcte.
   On a $P(C_1) = p_1 = p$ et, pour tout n, $P(C_{n+1}|C_n) = p$ et $p\left(C_{n+1}|\overline{C_n}\right) = 1-p$. Ainsi, d'après le formule des probabilités totales, on obtient :
$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p \times p_n + (1-p) \times (1-p_n) \\ &= p_n \times (2p-1) + (1-p) \end{aligned}$$
2. p_n est en fait une suite arithmético-géométrique.
   On peut prouver que $p_n = \left(p - \dfrac{1}{2}\right) \times (2p-1)^{n-1} + \dfrac{1}{2}$. Il suffit pour cela d'étudier la suite $q_n = p_n - \dfrac{1}{2}$ et de prouver qu'elle est géométrique.
3. On a pour $p \in]0;\ 1[$, $2p-1 \in]0;\ 1[$. Par conséquent, la limite de (p_n) est $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 22

Soit D_i l'évènement « le trésor est dans le i-ème coffre. »

Les D_i sont incompatibles deux à deux, on a donc :
$$P\left(\bigcup_{1\leq i\leq N} D_i\right) = p = \sum_{k=1}^{N} P(D_k)$$
On fait l'hypothèse raisonnable que tous les coffres ont la même probabilité de recevoir le trésor. Donc, pour tout $i \in [\![1;\ N]\!]$, $P(D_i) = \dfrac{p}{N}$.
Finalement, on cherche
$$P\left(D_N | \bigcap_{1\leq i\leq N-1} \overline{D_i}\right) = \frac{P\left(D_N \cap \left(\bigcap_{1\leq i\leq N-1} \overline{D_i}\right)\right)}{P\left(\bigcap_{1\leq i\leq N-1} \overline{D_i}\right)}$$
Or, $D_N \subset \left(\bigcap_{1\leq i\leq N-1} \overline{D_i}\right)$.

D'autre part, en notant A l'évènement « il n'y a pas de trésor », on a $P\left(\bigcap_{1\leq i\leq N-1} \overline{D_i}\right) = P(A) + P(D_N)$.
Finalement :
$$P\left(D_N | \bigcap_{1\leq i\leq N-1} \overline{D_i}\right) = \frac{P(D_N)}{P(A)+P(D_N)} = \frac{\frac{p}{N}}{\frac{p}{N}+(1-p)} = \frac{p}{p+N(1-p)}$$
Quelle est la probabilité que l'autre pièce du coffre soit également en or ?

Exercice 25

1. On utilise la formule de l'union pour deux évènements ainsi que les règles de calcul sur l'union et l'intersection.
$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C) &= P\left((A\cup B)\cup C\right) \\ &= P(A\cup B) + P(C) - P\left((A\cup B)\cap C\right) \\ &= P(A) + P(B) - P(A\cap B) + P(C) - P\left((A\cap C)\cup(B\cap C)\right) \\ &= P(A) + P(B) - P(A\cap B) + P(C) - [P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C)] \end{aligned}$$

On pour peut aussi déterminer une formule plus générale pour une union de n d'évènements en procédant par récurrence. On l'appelle « formule du crible (ou de Poincaré) ».

1. On notera H_i l'évènement « le i-ème composant fonctionne. » et K l'évènement « le circuit fonctionne. »
   (a) Le circuit fonctionne lorsque les trois composants fonctionnent simultanément. Sachant que les composants sont mutuellement indépendants, on en déduit :
   $$P(K) = P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = p_1 p_2 p_3$$
   (b) Le circuit fonctionne lorsque l'un des composants au moins fonctionne. On en déduit, d'après la première question et toujours en considérant l'hypothèse d'indépendance mutuelle :
   $$P(K) = P(H_1 \cup H_2 \cup H_3) = p_1 + p_2 + p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3$$
   (c) Cette fois-ci :
   $$\begin{aligned} P(K) &= P\left(H_1 \cap (H_2 \cup H_3)\right) \\ &= P\left((H_1 \cap H_2) \cup (H_1 \cap H_3)\right) \\ &= P(H_1 \cap H_2) + P(H_1 \cap H_3) - P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) \\ &= p_1 p_2 + p_1 p_3 - p_1 p_2 p_3 \end{aligned}$$

Exercice 26

On doit calculer $P(A \cap B)$ puis $P(A)$ et $P(B)$ et vérifier si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

En calculant les cardinaux de cet univers très simple à 12 issues, on obtient :
$P(A) = \dfrac{1}{2}$ et $P(B) = \dfrac{1}{3}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$.
On vérifie donc bien que les évènement sont indépendants dans le cas d'un urne à 12 boules.

Dans le cas d'une urne à 13 boules :
$P(A) = \dfrac{6}{13}$ et $P(B) = \dfrac{4}{13}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{2}{13}$. On a donc pas $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Les évènements ne sont alors plus indépendants.

Exercice 27

1. Soit α le nombre tel que, pour tout $k \in [\![1;\ 6]\!]$, $P(X = k) = \alpha k$.
   α vérifie
   $$P(X = 1) + P(X = 2 + \cdots P(X = 6) = 1 \iff \alpha \times \frac{6 \times 7}{2} = 1$$
   On obtient ainsi $\alpha = \dfrac{1}{21}$

   Ainsi, pour tout $k \in [\![1;\ 6]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{k}{21}$.
   L'espérance vaut :
   $$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + \cdots + 6 \times P(X = 6) \\ &= \frac{1}{21} \times (1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2) \\ &= \frac{1}{21} \times \frac{6 \times (6 + 1) \times (2 \times 6 + 1)}{6} \\ &= \frac{1}{21} \times 7 \times 13 \\ &= \frac{13}{3} \simeq 4,3 \end{aligned}$$

Dans le cas d'un dé non pipé, l'espérance vaut $\frac{7}{2} = 3,5$.

L'espérance est donc plus grande dans le cas de ce dé pipé, ce qui semble cohérent puisque les grandes valeurs sont plus probables.

2. Pour tout $k \in [\![1;\ 6]\!]$, $P\left(Y = \frac{1}{k}\right) = P(X = k) = \frac{k}{21}$.

   On utilise la formule du transfert pour calculer l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{1} \times P(X = 1) + \frac{1}{2} \times P(X = 2) + \cdots + \frac{1}{6} P(X = 6) \\ &= \alpha + \alpha + \cdots + \alpha \\ &= \frac{6}{21} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Exercice 30

1. Soit l'évènement T_i : « il a trouvé la clef au i-ème essai. ».

   On a $P(T_1) = \frac{1}{n}$ et, pour tout $i \geq 1$, $P\left(T_{i+1}|\overline{T_i}\right) = \frac{1}{n-i}$ car il ne reste plus que $n-i$ dans le trousseau dont celle de ce domicile à cette étape là de l'expérience.

   Il nous faut donc calculer $P\left(\overline{T_i}\right)$ pour pouvoir conclure. On va raisonner sur le dénombrement mais on peut aussi faire, plus simplement, un arbre (voir correction au tableau en TD).
   Soit Ω l'univers correspondant à l'ensemble des choix des i premières clefs avec $i \leq n-1$. Ici l'ordre est important.
   On a donc $\#\Omega = n \times (n-1) \times \cdots \times (n+1-i)$
   On a $\#\overline{T_i} = (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-i)$ car on choisit à chaque fois la clef parmi toutes les clefs sauf la bonne !
   On a donc, après simplification :

$$P\left(\overline{T_i}\right) = \frac{\#\overline{T_i}}{\#\Omega} = \frac{n-i}{n}$$

   Finalement,

$$P(T_i) = P\left(T_{i+1}|\overline{T_i}\right) \times P\left(\overline{T_i}\right) = \frac{n-i}{n} \times \frac{1}{n-i} = \frac{1}{n}$$

   Soit X le nombre d'essais nécessaires. On a

$$P(X = i) = P(T_i) = \frac{1}{n}$$

   Donc le nombre moyen d'essais (qui est forcément inférieur ou égal à n) vaut :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} i \times P(X = i) = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)}{2}$$

2. Ici, à chaque essai la probabilité d'obtenir la clef est de $\frac{1}{n}$ et la probabilité de ne pas obtenir la bonne clef est de $\frac{(n-1)}{n}$.

   Comme il y a remise, tous les essais sont indépendants.

   Par conséquent, pour tout $i \in N^*$, on a

$$P(T_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} \times \frac{1}{n}$$

   En théorie le nombre d'essais nécessaires peut être infini. Le calcul de l'espérance conduit donc à déterminer une somme infinie :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} i \times P(X = i)$$

Vous saurez l'an prochain comment manipuler avec rigueur les sommes infinies. Pour le moment, on va juste admettre que cette somme correspond à la limite de S_n avec

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i \times P(X = i)$$

Avec, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} i \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i} \end{aligned}$$

La solution de ce problème nécessite des notions que nous verrons plus tard.

Exercice 34

On a, d'après la formule de transfert :

$$E(X) = \sum_{i=0}^{N} i \times P_X(i) = \sum_{i=1}^{N} i \times P_X(i)$$

Or, pour tout $i \in [\![0;\ N]\!]$

$$iP_X(i) = \sum_{k=1}^{i} P_X(i)$$

Une petite considération graphique montre que :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{i} P_X(i) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=k}^{N} P(i)$$

Or, $\sum\limits_{i=k}^{N} P(i) = P(X \geq k)$. On a donc :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{N} P(X \geq k)$$

On peut aussi raisonner plus formellement.
Partant de

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{i} P_X(i)$$

On pose $\delta : [\![1;\ N]\!] \times [\![1;\ N]\!] \to \{0;\ 1\}$ la fonction telle que

$$\delta(i;\ k) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \geq k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{i} P_X(i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \delta(i;\ k) P_X(i) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \delta(i;\ k) P_X(i) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=k}^{N} P_X(i) \\ &= \sum_{k=1}^{N} P(X \geq k) \end{aligned}$$

La fonction δ définie plus haut s'appelle une indicatrice, c'est grâce à elle que l'on peut échanger les sommes d'indices i et k pour obtenir la formule recherchée.

Exercice 37

On utilise la formule du transfert :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Pour tout $k \in [[0;\ n]]$, travaillons sur le terme :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+k}\binom{n}{k} &= \frac{1}{(k+1)} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)} \times \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)} \times \binom{(n+1)}{(k+1)}
\end{aligned}$$

On en déduit, en faisant le changement $k' = k+1$ à partir de la troisième ligne :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k'=1}^{n+1}\binom{n+1}{k'}p^{k'-1}(1-p)^{n+1-k'} \\
&= \frac{1}{p(n+1)}\sum_{k'=1}^{n+1}\binom{n+1}{k'}p^{k'}(1-p)^{n+1-k'} \\
&= \frac{1}{p(n+1)}\left[\underbrace{\sum_{k'=0}^{n+1}\binom{n+1}{k'}p^{k'}(1-p)^{n+1-k'}}_{\text{probabilité totale d'une binomiale}} - \underbrace{(1-p)^{n+1}}_{\text{terme de rang0}}\right] \\
&= \frac{1}{p(n+1)}\left[1-(1-p)^{n+1}\right]
\end{aligned}$$

Exercice 38

1. L'univers est composé de toutes les manières de disposer les 20 livres. Son cardinal est $20\,!$.
   On va considérer le problème comme étant la combinaison :
   - de l'ordre de 15 autres livres ;
   - de la position des 5 livres de Zola au sein des 16 emplacements possibles entre les autres livres ou aux extrêmités de l'étagère (14 espaces entre les autres livres et 2 positions aux extrêmités.

   Notons qu'il y a $15\,!$ manières de positionner les 15 autres livres. Ensuite, on va étudier pour chaque valeur de k, toutes les possibilités.
   - Pour $Z = 1$:
     Tous les livres de Zola sont séparés. Il y a 16 emplacements pour le premier, 15 emplacements pour le second et ainsi de suite jusqu'à 12 emplacements pour le cinquième.
     Ainsi, $P(Z=1) = \dfrac{15! \times 16!}{20! \times 11!} \simeq 0,2817$.
   - Pour $Z = 2$:
     Il y a 2 configurations distinctes possibles :

— ou bien on a deux paires côte à côte et un dernier livre tout seul ;
— ou bien on a une paire côte à côte et les trois autres livres tous séparés.
Pour la première configuration, il faut choisir l'emplacement des deux paires ($\binom{2}{16}$) possibilités puis l'emplacement du dernier livre (14 possibilités) et enfin l'ordre des cinq livres de Zola. Cela donne donc en tout $\binom{2}{16} \times 14 \times 5!$ possibilités.
Pour la seconde configuration, il faut choisir l'emplacement de la paire puis l'emplacement des 3 livres séparés (donc $16 \times \binom{3}{15}$ possibilités) et enfin l'ordre des cinq livres de Zola (5! possibilités).
Finalement, $P(Z=2) = \dfrac{15! \times \left(\binom{2}{16} \times 14 \times 5! + 16 \times \binom{3}{15} \times 5!\right)}{20!} \simeq 0,5779$.

- Pour $Z = 3$:
  Il y a encore une fois 2 configurations distinctes possibles :
  — ou bien on a une paire côte à côte et un triplet côte à côte ;
  — ou bien on a un triplet côte à côte et deux livres séparés.
  En utilisant le même genre de technique que précédemment, on obtient
  $P(Z=3) = \dfrac{15! \times \left(16 \times 15 \times 5! + 16 \times \binom{2}{15} \times 5!\right)}{20!} \simeq 0,1238$.
- Pour $Z = 4$:
  Il n'y a qu'une configuration possible. On obtient $P(Z=4) = \dfrac{15! \times 16 \times 15 \times 5!}{20!} \simeq 0,0154$
- Pour $Z = 5$, la configuration est la plus simple. On obtient : $P(Z=5) = \dfrac{15! \times 16 \times 5!}{20!} \simeq 0,0010$

2. La probabilité qu'il y ait au moins quatre livres de Zola côte à côte vaut

$$P(Z=4) + P(Z=5) \simeq 0,0165$$

C'est donc effectivement probable à moins de 5%. On peut donc suspecter une intervention d'un bibliothécaire.

Planche n° 14: Compléments sur les fonctions

Exercice 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in I$ et $(l, l') \in \mathbb{R}^2$. Montrer, à l'aide de la définition d'une limite, les propositions suivantes :

1. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2$ alors $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$;
2. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2$ alors $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \ell_1\ell_2$;
3. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$;
4. si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = +\infty$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique. Montrer que f possède une limite en $+\infty$ si et seulement si f est constante.

Exercice 3

Étudier l'existence et donner la valeur éventuelle des limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sin(x^2)}{1+x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos(x^2)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x + \cos x)^2$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$
6. $\lim\limits_{x\to0} x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + \sin x}{1+x^2}$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$
11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
12. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos(e^x) + 2\sin(2e^{-x}) + x^2}{\sqrt{1+x^2}}$
13. $\lim\limits_{x\to1} \left|\dfrac{\sqrt{|x^3 - 3x + 2|}}{2x^2 - x - 1}\right|$
14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$
15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+4}}$
16. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$
17. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x-1}$
18. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$.

Exercice 4

Étudier les limites à gauche et à droite en 0 des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$
2. $x \mapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$
3. $x \mapsto x^2\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$

Exercice 5

Donner un équivalent simple des expressions suivantes.

1. $\lfloor x \rfloor$ en $+\infty$;
2. $\dfrac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x}$ en $+\infty$ et en 0 ;
3. $\ln(1+x^2)-\sin(x^2)+2\cos^2(x)$ en $+\infty$;
4. $\dfrac{e^{x^2}-\sqrt[5]{1+x}}{2+\ln(3x+1)-\sqrt{4+x}}$ en 0 ;
5. $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x+2}}$ en 1 ;
6. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2+x}$ en 0 et en $+\infty$;
7. $1+e^{e^{e^x}}-\arctan x$ en $-\infty$;
8. $\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$;
9. $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ en π.

Exercice 6

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{e^{2x}-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)-x}{\ln(1+x)}$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\ln(2x+1)-\ln(2x+3)\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(2x)}{x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x\ln x)}{x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(4x)}{\sin x}$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+1}$
9. $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(1+x^2)-\ln(x^2)$.

Exercice 7

Étudier la continuité de $x\mapsto \lfloor x\rfloor+(x-\lfloor x\rfloor)^2$.

Exercice 8

Déterminer le domaine de définition, étudier la continuité et les éventuels prolongements par continuité des fonctions suivantes.

1. $f : x\mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$;
2. $f : x\mapsto \dfrac{x\ln x}{x-1}$;
3. $f : x\mapsto \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$;
4. $f : x\mapsto \dfrac{(x^2-1)^2}{|x-1|}$. ;
5. $f : x\mapsto \sin(x)\sin(1/x)$;
6. $f : x\mapsto \cos(x)\cos(1/x)$;
7. $f : x\mapsto \sin(x+1)\ln|x+1|$.

Exercice 9

Soit P un polynôme de degré impair. Montrer que P possède une racine réelle.

Exercice 10

Montrer que l'équation $e^x=\pi^2\ln(x^2+1)$ possède au moins trois solutions réelles.

Exercice 11

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue.

1. Montrer que f possède un point fixe.
2. Montrer que si, de plus, f est décroissante, alors le point fixe est unique.

Exercice 12

Soient I un intervalle et $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ ne prenant qu'un nombre fini de valeur(s). Que peut-on dire de f ?

Exercice 13

Soient I un intervalle et $(f,g) \in (\mathcal{C}(I,\mathbb{R}))^2$ tel que pour tout $x \in I$, on a $f(x) \neq 0$ et $f(x)^2 = g(x)^2$.

1. Montrer que l'on a $f = g$ ou $f = -g$.
2. Montrer que ce résultat est faux dans chacun des cas suivants :
   (a) f n'est pas continue ;
   (b) f s'annule sur I ;
   (c) I n'est pas un intervalle.

Exercice 14

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f possède un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai ou faux (justifier).

1. L'image d'un intervalle par une fonction est un intervalle.
2. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
3. L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert.
4. L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est un intervalle fermé.
5. L'image d'un intervalle borné par une fonction continue est un intervalle borné.
6. L'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est un intervalle fermé borné.
7. L'image d'un intervalle ouvert borné par une fonction continue est un intervalle ouvert borné.

Exercice 16

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si f est une application dérivable en a alors $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ pour h suffisamment petit.
2. Une application f n'est pas dérivable en a si et seulement si $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \xrightarrow{x \to a} +\infty$.
3. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, et $c \in]a,b[$. L'application f est dérivable sur l'intervalle $[a,b]$ si et seulement si elle l'est sur les intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$.
4. Une application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée est nulle est constante.
5. Il existe une application $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ et dont la dérivée tend vers 0.
6. Il existe une application $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$, et dont la dérivée ne tend pas vers 0.

Exercice 17

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Montrer que si f est dérivable en a alors le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Calculer cette limite.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 18

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable en a. Montrer que le rapport $\dfrac{xf(a) - af(x)}{x - a}$ admet une limite lorsque x tend vers a et calculer cette limite.

Exercice 19

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que son application réciproque, f^{-1}, est dérivable, et déterminer la valeur de $(f^{-1})'(1)$.
3. Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable et donner la valeur de $(f^{-1})''(1)$.

Exercice 20

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée $n^{\text{ième}}$ des applications suivantes.

1. $f : x \mapsto \cos(3x)$;
2. $f : x \mapsto (x^3 + 2x - 7)e^x$;
3. $f : x \mapsto x^5 e^{3x}$;
4. $f : x \mapsto x^4 + 3x^3 + 10x - 4$;
5. $f : x \mapsto e^x \cos x$;
6. $f : x \mapsto x^{n-1} \ln(1 + x)$.

Exercice 21

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $]0,1[$ par $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) = xf_n'(x)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n de degré n et à coefficients entiers naturels tel que : $\forall x \in]0,1[,\ f_n(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1-x)^{(n+1)}}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est strictement positive sur $]0,1[$.

Exercice 22

Prolonger par continuité si besoin chacune des fonctions suivantes, puis étudier la classe de l'application obtenue.

1. $f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$;
2. $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x}\sin x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$;
3. $f : x \mapsto x|x|$;
4. $f : x \mapsto \begin{cases} x + a + be^x & \text{si } x \geq 0 \\ \cos x - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Exercice 23

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annulant $n+1$ fois sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ admettant une même limite finie en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ et que f' s'annule sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[0,a]$, dérivable sur $]0,a[$, et telle que $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(a)f'(a) < 0 \end{cases}$. Montrer qu'il existe $c \in]0,a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 26

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$. Montrer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

Exercice 27

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle en 0 et de dérivée croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{f(x)}{x} \leq f'(x)$.

Exercice 28

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan x + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Ce résultat est-il vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^*$?

Exercice 29

Déterminer le nombre de racines réelles des polynômes $X^5 - X^3 + 1$ et $4X^3 - 18X^2 + 24X - 9$.

Exercice 30

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$ et pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $|\tan x| \geq |x|$.

Exercice 31

Le but de cet exercice est de déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\ln n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n + 1$ et conclure.

Exercice 32

Soient f l'application définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n + 2}$.

1. Montrer que l'intervalle $]0,1[$ est stable par f.
2. Montrer que f possède un unique point fixe dans l'intervalle $]0,1[$, que l'on notera α.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{2e}{9}|u_n - \alpha|$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{2e}{9}\right)^n$.
6. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Exercice 33

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \alpha$ et que $\alpha \in [0,1]$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Exercice 34

Le but de cet exercice est de trouver une valeur approchée de l'unique racine réelle du polynôme X^3+X-1.

1. Montrer que le polynôme $X^3 + X - 1$ possède une unique racine réelle α et que l'on a $\alpha \in]0,1[$.
2. Montrer que α est le point fixe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n$ et en déduire que (u_n) converge vers α.
5. En déduire, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

Exercice 35

Soit une fonction f continue et définie sur un intervalle $[a\ :\ c]$ et dérivable deux fois sur $]a;\ c[$. Soit $b \in]a;\ c($.

Soit P la fonction polynômiale $P : x \mapsto f(a) \times \dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b) \times \dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c) \times \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-b)(c-a)}$.

Et soit $\varphi : x \mapsto f(x) - P(x)$.

1. Montrer que $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c)$.
2. En déduire qu'il existe θ tel que $\varphi''(\theta) = 0$. Déterminer alors l'expression de $f''(\theta)$.
3. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que $a = b - h$ et $c = b + h$. Exprimer alors $f''(\theta)$ en fonction de b et h.

Corrigé de la planche n° 14: Compléments sur les fonctions

Exercice 2

La réciproque est évidente. Montrons le sens direct.
On considère donc une fonction f périodique, qui possède une limite en $+\infty$. On va noter $T > 0$ la période de f.

Montrons que cette limite ne peut pas être $\pm\infty$ en utilisant les suites.
En effet, pour tout n, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(nT) = f(0)$, ce qui est contradictoire.

Soit ainsi ℓ la limite finie de f. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre A tel que, pour tout $x > A$, $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell - \varepsilon$. Soit alors n tel que $nT > A$.
n existe car $\mathbb{R}$ est archimédien. On en déduit, $\forall x \in [nT;\ (n+1)T[$, $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell - \varepsilon$. Mais en raison de la périodicité de f, cela entraîne :

$$\forall x \in [0;\ T[,\ \ell - \varepsilon < f(x) < \ell - \varepsilon$$

Et comme cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit

$$\forall x \in [0;\ T[,\ f(x) = l$$

Exercice 3

1. Pour tout $x > 0$, on a
$$\frac{x \sin(x^2)}{1 + x^2} = \frac{\sin(x^2)}{\frac{1}{x} + x}$$
Le théorème des Gendarmes permet de conclure, la limite est nulle.
2. Cette expression n'a pas de limite. En effet, la suite $u_n = \sqrt{n\pi}$ tend vers $+\infty$ et pourtant, $\cos\left((u_n)^2\right) = (-1)^n$ n'a pas de limite.
3. En utilisant le conjugué, on obtient, pour tout $x \geq 1$:
$$\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}$$
Ainsi, l'expression tend vers $\dfrac{1}{2}$.
4. On peut conclure par le théorème de minoration, la limite est $+\infty$.
5. Pour tout $x > 1$, $\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 0$. Ainsi, la limite est nulle.
6. On sait que pour $x > 0$, en raison des propriétés de partie entière :
$$1 \geq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor > x\left(\frac{1}{x} - 1\right) = 1 - x$$
La limite en 0^+ est donc de 1.
De même, en 0^- la limite est de 1.
7. Pour tout $x > 0$, on a
$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\ln(1+x)/x}$$
Par croissance comparée et composition de limite, la limite recherchée est donc $\mathrm{e}^0 = 1$.

8. Utilisons un développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 :

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{(x+x\varepsilon(x))/x} = \mathrm{e}^{1+\varepsilon(x)}$$

   On en déduit que la limite recherchée est e.
9. En factorisant par les termes dominants, on obtient une limite de 1.
10. Pour tout $x > 0$, on a, par utilisation du conjugué puis factorisation par le terme dominant :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} &= \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}+1}\end{aligned}$$

   La limite recherchée est donc $\frac{1}{2}$.
11. Un peu de calcul montre que, pour tout $x > 1$:

$$\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{(\ln(\ln x)-\ln(x))/x}$$

   On conclut ensuite par croissance comparée : la limite est 1. En effet, pour tout $x > \mathrm{e}$, $\ln(x) < x$ et donc $0 < \frac{\ln(\ln(x))}{x} < \frac{\ln(x)}{x}$.
12. Pour tout x, $\cos(e^x) + 2\sin(2e^{-x}) + x^2 \geq x^2 - 3$. En particulier, on a

$$\frac{\cos(e^x)+2\sin(2e^{-x})+x^2}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{x^2-3}{\sqrt{1+x^2}}$$

   Or, on peut avec les techniques de factorisation montrer facilement que cette dernière expression tend vers $+\infty$. La limite est donc $+\infty$.
13. Un peu de calcul montre que, pour tout $x \notin \left\{-\frac{1}{2};\ 1;\ -2\right\}$, on a :

$$\left|\frac{\sqrt{|x^3-3x+2|}}{2x^2-x-1}\right| = \left|\frac{|x-1|\times\sqrt{x+2}}{(2x+1)(x-1)}\right| = \left|\frac{\sqrt{x+2}}{(2x+1)}\right|$$

   Donc, quand $x \to 1$, la limite est $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
14. En posant $X = \frac{1}{x}$, on se ramène au cas n° 8, la limite est donc de e.
15. Un peu de travail sur le conjugué montre que, pour tout x du domaine de validité de cette expression :

$$\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}} = 3\times\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+\sqrt{2+\frac{4}{x}}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{4+\frac{3}{x}}}$$

   La limite est donc $1+\sqrt{2}$
16. Pour tout $x \notin \{1;\ -1\}$, on a, après calcul :

$$\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{-1}{x+1}$$

   La limite est donc de $\frac{-1}{2}$.

17. Encore une fois, pour $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, on a

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

La limite recherchée est donc $\dfrac{1}{2}$.

18. Toujours à l'aide du conjugué et avec une factorisation, on obtient pour $x > 0$:

$$\sqrt{x^2+2x} - x = \frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}$$

La limite est donc 1.

Exercice 4

Pour tout $x \neq 0$, on a un encadrement usuel de la partie entière :

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$$

En exploitant cet encadrement, on peut répondre aux questions.

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = -\infty$
2. Déjà fait dans l'exercice précédent.
3. Pour tout $x \neq 0$:

$$x - x^2 < x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq x$$

On conclut ensuite à l'aide du théorème des Gendarmes, la limite est nulle.

Exercice 5

1. Par encadrement et à l'aide du théorème des Gendarmes, on peut montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$. Par conséquent :

$$\lfloor x \rfloor \underset{+\infty}{\sim} x$$

2. Par des techniques de factorisation :
$\dfrac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x} \underset{0}{\sim} \dfrac{-2}{x}$ et $\dfrac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{2}$
3. On obtient :

$$\ln(1+x^2) - \sin(x^2) + 2\cos^2(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(1+x^2) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln(x)$$

4. Par des techniques de développements limités, on obtient :

$$\frac{e^{x^2} - \sqrt[5]{1+x}}{2+\ln(3x+1) - \sqrt{4+x}} \underset{0}{\sim} \frac{-4}{55}$$

5. Toujours avec des développements limités, on obtient :

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x+2}} \underset{0}{\sim} \frac{x-1}{\sqrt{3}}$$

6. Pour tout $x \notin \{-1;\ -2\}$, on a

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} = \frac{x^2+2x+2}{x^3+3x^2+2x}$$

À partir de cette écriture, on peut facilement trouver des équivalents en 0 et en $+\infty$:
$\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{2+x} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{2+x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

7. C'est une limite classique. On obtient $1 + \mathrm{e} + \dfrac{\pi}{2}$.
8. Avec des techniques de développement limité, on obtient :

$$\sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

9. Toujours avec des développements limités d'ordre 1, on obtient :

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \underset{\pi}{\sim} \frac{\pi - x}{\sqrt{\pi}}$$

Exercice 6

1. Les fonctions $x \mapsto \sin(3x)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ vérifient les conditions de la règle de l'Hospital : elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la dérivée du numérateur $x \mapsto \mathrm{e}^{2x}$ ne s'annule pas sur un voisinage de 0 et on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\cos(3x)}{2\mathrm{e}^{2x}} = \frac{3}{2}$$

On en déduit, par application de la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x) - \sin(3 \times 0)}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2 \times 0}} = \frac{3}{2}$$

2. Toujours la règle de l'Hospital appliquée aux fonctions $x \mapsto \sin(2x) - x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$. On a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\cos(2x) - 1}{\frac{1}{x+1}} = 1$$

On en déduit que la limite recherchée est 1.

3. Cette limite est plus compliquée à déterminer. Pour tout $x > \dfrac{-1}{2}$, on a :

$$x\left(\ln(2x+1) - \ln(2x+3)\right) = x \ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right) = x \ln\left(\frac{2x+3}{2x+3} - \frac{2}{2x+1}\right) = x \ln\left(1 - \frac{2}{2x+1}\right)$$

Maintenant, on pose la changement de variable $X = \dfrac{1}{2x+1}$, c'est à dire, après calcul, $x = \dfrac{2-X}{2X} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{2}$.
De plus, $x \to +\infty \iff X \to 0^+$. On cherche donc :

$$\lim_{X \to 0^+} \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{2}\right) \ln(1 - X)$$

Or, pour tout $X > 0$, en faisant un développement limité d'ordre 1 sur $\ln(1-X)$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{2}\right)\ln(1-X) &= \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{2}\right)[-X + X\varepsilon(X)] \\ &= -1 + \frac{X}{2} + \left(\varepsilon(X) - \frac{X}{2}\varepsilon(X)\right)\end{aligned}$$

Avec ε une fonction continue en 0 et nulle en 0.
La limite recherchée est donc -1

4. Pour changer, utilisons des techniques de trigonométrie. Pour tout $x \notin \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned}\frac{x\sin x}{1-\cos x} &= \frac{x\sin(x)}{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{2x\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{x\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

Un développement limité d'ordre 1 de $x \mapsto \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ en 0 donne :

$$\frac{x\sin x}{1-\cos x} = \frac{x\cos(x)}{\frac{x}{2} + x\varepsilon(x)} = \frac{\cos(x)}{\frac{1}{2} + \varepsilon(x)}$$

Avec ε une fonction continue en 0 telle que $\varepsilon(0) = 0$.
La limite recherchée est donc 2.

5. Ici, on va choisir d'appliquer la règle de l'Hospital aux fonctions $x \mapsto \sin x - \sin(2x)$ et $x \mapsto x^2$.
On doit donc déterminer la limite de

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 2\cos x}{2x}$$

En 0^+ la limite est donc $-\infty$ tandis qu'en 0^- elle est de $+\infty$.

6. Encore une fois, la règle de l'Hospital s'applique. On cherche donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+\ln(x))\cos(x\ln(x))}{1}$$

Or, on sait, par croissances comparées que $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$. On en déduit que la limite recherchée vaut $-\infty$.

7. Par la même technique, on obtient une limite de 4.

8. Pour tout $x > 0$, on a

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)$$

On procède au changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$.
On cherche donc la limite quand X tend vers 0^+ de $\dfrac{1}{X}\left(\sqrt{1+X^2} - \sqrt[3]{1+X^3}\right)$.
On peut utiliser des techniques de développement limités d'ordre 1 aux fonctions $x \mapsto \sqrt{1+X^2}$ et $x \mapsto \sqrt[3]{1+X^3}$. Ces deux fonctions ont des dérivées nulles en 0.
Ainsi, il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 continues en 0 telles que $\varepsilon_1(0) = \varepsilon_2(0) = 0$ et telles que :

$$\sqrt{1+X^2} - \sqrt[3]{1+X^3} = (1 + X\varepsilon_1(X)) - (1 + X\varepsilon_2(X)) = X\left(\varepsilon_1(X) - \varepsilon_2(X)\right)$$

On a donc

$$\frac{1}{X}\left(\sqrt{1+X^2} - \sqrt[3]{1+X^3}\right) = \left(\varepsilon_1(X) - \varepsilon_2(X)\right)$$

La limite recherchée est donc nulle.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) - \ln(x^2)$. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\ln(1+x^2) - \ln(x^2) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

La limite recherchée est donc nulle.

Exercice 7

Les lieux d'éventuelles discontinuités se situent autour des entiers. Soit ainsi $n \in \mathbb{Z}$.

Pour tout $x \in [n;\ n+1[$, $\lfloor x \rfloor = n$. On en déduit :

$$\lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 = n + (x-n)^2$$

On en déduit en particulier, $\lim\limits_{x \to (n+1)^-} \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 = n+1$

Or, pour $x = n+1$, on a

$$\lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2 = n+1$$

Ainsi, cette fonction est continue

Exercice 11

1. C'est une application du théorème des valeurs intermédiaires à la fonction
$$g : x \mapsto f(x) - x$$
Cette fonction change de signe et est continue sur $[a;\ b]$ donc elle s'annule sur $[a;\ b]$
2. Supposons qu'il y ait deux points fixes $x_1 < x_2$.
On a $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$, ce qui conduit à $f(x_1) < f(x_2)$, ce qui est absurde puisque f est décroissante.

Exercice 12

On peut dire que cette fonction est constante. Montrons-le par l'absurde.
Si f n'est pas constante sur I, $\exists x_1 < x_2 / f(x_1) \neq f(x_2)$. Mais, sur $[x_1;\ x_2]$, f prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$. En effet, $[x_1;\ x_2] \subset I$ et f est continue sur I.
Ainsi, dans ce cas, l'hypothèse que f ne prend qu'un nombre fini de valeurs devient absurde.

> Cet exercice permet de prouver que, sur un intervalle, une fonction continue ne prend qu'une valeur ou bien une infinité de valeurs !

Exercice 13

1. Remarquons que f ne change pas de signe. En effet, le cas échéant, par application de théorème des valeurs intermédiaires, f s'annulerait.
Comme on a $f(x)^2 = g(x)^2$ pour tout $x \in I$, g ne s'annule jamais et, par suite, ne change pas non plus de signe.
Supposons par exemple que f est positive.
Pour tout x, l'égalité $f(x)^2 = g(x)^2$ est équivalente à $f(x) = |g(x)|$. Mais comme g ne change pas non plus de signe, on en déduit que g est positive sur I ou bien négative sur I.

   On obtient ainsi, pour tout $x \in I$, $f(x) = g(x)$ (cas où g est positive) ou bien, pour tout $x \in I$, $f(x) = -g(x)$ (cas où g est négative).
2. Cf correction en TD.

Exercice 15

1. Faux ! Prendre la fonction partie entière. L'image de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{Z}$ qui n'est pas un intervalle.
2. Vrai. C'est du cours.
3. Faux ! Considérer pour cela une fonction constante. L'image d'un intervalle est un intervalle réduit à un point, qui est fermé.
4. Faux. Considérer l'image de $[0;\ +\infty[$ par arctan.
5. Faux ! Considérer l'image de $]0;\ 1]$ par la fonction inverse.
6. Vrai. C'est du cours.
7. Faux ! Considérer l'image de $]0;\ 1[$ par la fonction inverse.

Exercice 16

1. C'est faux. La dérivée est une limite qui peut ne jamais être atteinte.
2. C'est faux. Considérer par exemple la fonction valeur absolue qui n'est pas dérivable en 0 mais dont le taux d'accroissement ne tend pas vers $+\infty$.
3. C'est faux. Considérer valeur absolue qui est dérivable sur $[-1;\ 0]$ et sur $[0;\ 1]$ mais qui n'est pas dérivable sur $[-1;\ 1]$.
4. C'est faux ! La fonction $x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ n'est pas constante.
5. Oui ! Prendre par exemple $x \mapsto \ln(x)$
6. Oui ! Prendre par exemple $f : x \mapsto \frac{1}{x}\sin(x^2)$. On a, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{-1}{x^2}\sin(x^2) + 2\cos(2x)$. En particulier f' ne tend pas vers 0 en $+\infty$ même si f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 17

Pour tout $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} &= \frac{f(a+h)-f(a)}{2h} + \frac{f(a)-f(a-h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \times \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a)-f(a-h)}{h}\right]\end{aligned}$$

Sachant que f est dérivable en a, par passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a)$$

La réciproque est fausse. Considérer pour cela la fonction valeur absolue et $a = 0$. Pour tout $h \neq 0$, on a

$$\frac{|h| - |-h|}{2h} = 0$$

Or valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Exercice 18

Pour tout $x \neq a$, on a

$$\begin{aligned}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a} &= \frac{xf(a)-af(a)+af(a)-af(x)}{x-a} \\ &= \frac{xf(a)-af(a)}{x-a} + \frac{af(a)-af(x)}{x-a} \\ &= f(a) - a \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{aligned}$$

Lorsque x tend vers a, la limite de ce rapport est donc $f(a) - af'(a)$.
On aurait pu également s'en sortir en utilisant un développement limite de $f(x)$. Ainsi, il existe une fonction ε telle que $\varepsilon(a) = 0$ et ε continue en a et telle que :

$$\begin{aligned}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a} &= \frac{xf(a)-a[f(a)+f'(a)(x-a)+\varepsilon(x)(x-a)]}{x-a} \\ &= \frac{xf(a)-af(a)-af'(a)(x-a)-a\varepsilon(x)(x-a)}{x-a} \\ &= \frac{f(a)(x-a)-af'(a)(x-a)-a\varepsilon(x)(x-a)}{x-a} \\ &= f(a)-af'(a)-a\varepsilon(x)\end{aligned}$$

On obtient, bien sûr, avec cette technique, la même limite : $f(a) - af'(a)$.

Exercice 19

1. f est dérivable et, pour tout x, on a $f'(x) = \mathrm{e}^x + 1 > 0$. Donc f est strictement croissante.
   En outre, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.
   Ainsi, f établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. f' ne s'annule jamais. Ainsi, f^{-1} est dérivable et on a, pour tout x :
   $$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$$
   En particulier, $\left(f^{-1}\right)'(1) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(1)}$.
   Reste à trouver l'antécédent de 1 par f. Mais on vérifie très simplement que $f(0) = 1$. Ainsi :
   $$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$
3. $\left(f^{-1}\right)'$ est dérivable, comme inverse de fonction dérivable qui ne s'annule pas.

   Ainsi, pour tout x,
   $$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)''(x) &= \frac{-\left(f' \circ f^{-1}\right)'(x)}{\left(f' \circ f^{-1}(x)\right)^2} \\ &= \frac{-\left(f^{-1}\right)'(x) \times f'' \circ f^{-1}(x)}{\left(f' \circ f^{-1}(x)\right)^2} \\ &= \frac{-f'' \circ f^{-1}(x)}{\left(f' \circ f^{-1}(x)\right)^3}\end{aligned}$$
   On calcule donc $f''(x) = \mathrm{e}^x$ et on en déduit :
   $$\left(f^{-1}\right)''(1) = \frac{-\mathrm{e}^0}{2^3} = \frac{-1}{8}$$

Exercice 20

1. Soit la fonction complexe $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}$, de sorte que $f = \Re(\varphi)$.
   Pour tout n, $\varphi^{(n)} = (3\mathrm{i})^n \varphi$.
   On en déduit que, pour tout x, $f^{(n)}(x) = \Re\left((3\mathrm{i})^n \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}\right) = 3^n \times \Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n\pi/2+x)}\right) = 3^n \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.
2. On pose $t : x \mapsto x^3 + 2x - 7$ et $u : x \mapsto \mathrm{e}^x$. Ces deux fonctions sont $\mathcal{C}^\infty$ donc leur produit, f, l'est aussi.
   Pour tout x et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$.
   D'autre part, pour tout x, $t'(x) = 3x^2 + 2$, $t''(x) = 6x$, $t^{(3)}(x) = 6$ et, pour tout $k \geq 4$, $t^{(k)}(x) = 0$.
   L'application de la formule de Leibnitz donne donc, pour tout x et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\begin{aligned}f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} t^{(k)}(x) \times u^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{3} \binom{k}{n} t^{(k)}(x) \times u^{(n-k)}(x)\end{aligned}$$
   Un peu de calcul permet d'obtenir :
   $$f^{(n)}(x) = \left(x^3 + 3nx^2 + (3n^2 - 3n + 2)x + n^3 - 3n^2 + 4n - 7\right)\mathrm{e}^x$$
3. Même technique que précédemment.

4. On calcule « à la main » les quatre premières dérivées. À partir de la dérivée cinquième, les fonctions sont nulles.
5. On pose la fonction complexe $\phi : x \mapsto e^{(1+i)x}$, de sorte que $\Re(\phi) = f$.
   ϕ est très facile à dériver n-fois. Ainsi la dérivée n-ième de f est la fonction
   $$x \mapsto \Re\left((1+i)^n e^{(1+i)x}\right)$$
   On obtient la derivée n-ième de f en prenant la partie réelle de $\varphi^{(n)}$.
   On obtient, pour tout x :
   $$f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) e^x$$

Exercice 26

L'expression $\frac{f(x)}{x}$ représente presque un taux d'accroissement de f. Nous allons donc exploiter les accroissements finis pour aborder cet exercice.
Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe A tel que, pour tout $c > A$, $|f'(c) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.
En raison du théorème des accroissements finis, cela entraîne que pour tout $x > A$, $\left|\frac{f(x) - f(A)}{x - A} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Reste à prouver que $\frac{f(x) - f(A)}{x - A}$ n'est pas trop « éloigné » de $\frac{f(x)}{x}$.
On va donc travailler sur l'expression

$$\frac{f(x) - f(A)}{x - A} - \frac{f(x)}{x} = \frac{-f(A)}{x - A} + \frac{Af(x)}{x(x - A)}$$

Il est clair que $\frac{-f(a)}{x - A}$ tend vers 0 en $+\infty$ donc il existe $A' > A$ tel que, pour tout $x > A'$, $\left|\frac{-f(a)}{x - A}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$.
Intéressons-nous maintenant à l'expression $\frac{Af(x)}{x(x - A)}$ et montrons qu'elle tend aussi vers 0 en $+\infty$.
Comme f' converge en $+\infty$, $|f'|$ est majorée par un réel $M > 0$ sur un voisinage $]B;\ +\infty[$. On peut même choisir $B > A'$.
Mais alors, on a pour tout $x > B$, $|f(x) - f(B)| \leq M|x - B|$ et en particulier, $|f(x)| \leq |f(B)| + M|x - B|$.
Ainsi, on obtient :

$$\left|\frac{Af(x)}{x(x - A)}\right| \leq \left|\frac{f(B)}{x(x - A)}\right| + \left|\frac{M(x - B)}{x(x - A)}\right|$$

Cette dernière majoration nous confirme que $\frac{Af(x)}{x(x - A)}$ tend vers 0 en $+\infty$. Ainsi, il existe $B' > B > A' > A$ tel que, pour tout $x > B'$, $\left|\frac{Af(x)}{x(x - A)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}$.
Finalement, $\left|\frac{f(x) - f(A)}{x - A} - \frac{f(x)}{x}\right| \leq \left|\frac{-f(A)}{x - A}\right| + \left|\frac{Af(x)}{x(x - A)}\right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$.
On a donc bien, pour tout $x > B'$:

$$\left|\frac{f(x)}{x} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Autre option délirante : par le théorème de Césaro
On peut traiter cet exercice de la même manière que le théorème de Cesàro (vu en DM).
On va donc commencer par prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - \frac{f(\lfloor x \rfloor)}{\lfloor x \rfloor} = 0$ puis par démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(\lfloor x \rfloor)}{\lfloor x \rfloor} = \ell$.

On sait qu'il existe un nombre $A > 0$ tel que, pour tout $x > A$, $f'(x) \in [\ell - 1;\ \ell + 1]$. En particulier, f' est bornée sur $]A;\ +\infty[$. Notons M un majorant de $|f'|$ sur $]A;\ +\infty[$.

On en déduit, par application de l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x > A+1$:

$$|f(x) - f(\lfloor x \rfloor)| \leq M(x - \lfloor x \rfloor)$$

Ainsi,

$$\left|\frac{f(x) - f(\lfloor x \rfloor)}{x}\right| \leq M\frac{(x - \lfloor x \rfloor)}{x} \leq \frac{M}{x}$$

En particulier, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{M}{x} = 0$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - \frac{f(\lfloor x \rfloor)}{x} = 0$$

Or :

$$\frac{f(x)}{x} - \frac{f(\lfloor x \rfloor)}{\lfloor x \rfloor} = \frac{f(x)}{x} - \frac{f(\lfloor x \rfloor)}{x} + \frac{f(\lfloor x \rfloor)}{x} - \frac{f(\lfloor x \rfloor)}{\lfloor x \rfloor}$$

Mais, pour tout $x > A+1$:

$$\left|\frac{f(\lfloor x \rfloor)}{x} - \frac{f(\lfloor x \rfloor)}{\lfloor x \rfloor}\right| = \left|f(\lfloor x \rfloor) \times \frac{\lfloor x \rfloor - x}{x\lfloor x \rfloor}\right| \leq |f(x)| \times \frac{1}{(x-1)^2}$$

Or, en raison de l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(x)| \leq |f(A)| + M|x - A|$$

Ce qui donne :

$$\left|\frac{f(\lfloor x \rfloor)}{x} - \frac{f(\lfloor x \rfloor)}{\lfloor x \rfloor}\right| \leq \frac{|f(A)| + M|x-A|}{(x-1)^2}$$

Cette dernière expression tend vers 0.
On en déduit finalement que

$$\lim_{x \to +\infty} \left|\frac{f(x)}{x} - \frac{f(\lfloor x \rfloor)}{\lfloor x \rfloor}\right| = 0$$

Pour achever cette démonstration, nous allons prouver que la suite $\frac{f(n)}{n}$ tend vers 0 en utilisant le théorème de Césaro.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) - f(0) = \sum\limits_{0 \leq k \leq n-1} f(n+1) - f(n)$.
Soit la suite $u_n = f(n+1) - f(n) = \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n}$. En raison de l'égalité des accroissements finis, cette suite tend vers l.
On en déduit, par le théorème de Cesàro que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{0 \leq k \leq n-1} u_k = l$.
Or, par construction, $\frac{1}{n} \sum\limits_{0 \leq k \leq n-1} u_k = \frac{f(n)}{n} - \frac{f(0)}{n}$, ce qui permet de conclure quant à la limite de $\frac{f(n)}{n}$.

Exercice 31

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln(k+1) - \ln(k) = \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{k+1-k}$. On reconnaît que cette dernière expression est un taux d'accroissement.
   Or la fonction logarithme est dérivable sur son domaine de définition et sa dérivée est la fonction inverse.
   Ainsi, $\exists t \in]k;\ k+1[/ \ln(k+1) - \ln(k) = \frac{1}{t}$. Or, $t \in]k;\ k+1[\Longrightarrow \frac{1}{k+1} < \frac{1}{t} < \frac{1}{k}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$.
   On en déduit :
   $$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) < \frac{1}{k}$$
   Ici, on a même prouvé l'inégalité stricte !

2. On somme les inégalités précédentes pour $k \in [\![1;\ n-1]\!]$. Les termes centraux sont télescopiques. On obtient :
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \ln(n) - \ln(1) < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$
En faisant un changement d'indice sur la première somme, on obtient :
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \ln(n) < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

3. Notons que $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1$. La première inégalité prouvée à la question précédente donne donc :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 < \ln(n)$$
C'est à dire :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \ln(n) + 1$$
La seconde inégalité que l'on a prouvé à la question précédente s'écrit :
$$\ln(n) < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$
Or, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Ainsi, on a
$$\ln(n) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
On a donc bien l'encadrement recherché :
$$\ln(n) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \ln(n) + 1$$
En particulier, on en déduit que, pour $n > 1$, en divisant par $\ln(n)$ la série d'inégalités précédente :
$$1 < \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} < 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$
Cela nous prouve, par le théorème des Gendarmes, que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1$, c'est à dire que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Exercice 32

Soient f l'application définie par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n + 2}$.

1. Montrer que l'intervalle $]0,1[$ est stable par f.
2. Montrer que f possède un unique point fixe dans l'intervalle $]0,1[$, que l'on notera α.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2e}{9}|u_n - \alpha|$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n$.
6. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Exercice 33

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1} = \alpha$ et que $\alpha \in [0,1]$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Exercice 34

Le but de cet exercice est de trouver une valeur approchée de l'unique racine réelle du polynôme X^3+X-1.

1. Montrer que le polynôme $X^3 + X - 1$ possède une unique racine réelle α et que l'on a $\alpha \in]0,1[$.
2. Montrer que α est le point fixe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n$ et en déduire que (u_n) converge vers α.
5. En déduire, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

Planche n° 15: Polynômes

Exercice 1

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

1. $P = P'P''$.
2. $(P')^2 = 4P$.
3. $P(X^2) = (X^2+1)P$
4. $P \circ P = P$.

Exercice 2

Effectuer la division euclidienne :

1. de $8X^7 - 7X^3 + 1$ par $X^2 - X + 1$;
2. de $3X^4 - X^3 + X^2 + 4$ par $X - 5$;
3. de $2X^5 + 1$ par $X^3 + 2X + 2$.

Exercice 3

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ pour que X^2+2 divise $X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2$.

Exercice 4

Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B dans chacun des cas suivants :

1. $A = X^n$ et $B = X^2 - 3X + 2$;
2. $A = X^n$ et $B = (X-1)^2$;
3. $A = (X\sin t + \cos t)^n$ et $B = X^2 + 1$, où t est un réel.

Exercice 5

Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels possède (au moins) une racine réelle.

Exercice 6

Montrer par deux méthodes différentes que X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

1. Déterminer l'ordre de multiplicité de 2 en tant que racine de $X^5 - 8X^4 + 23X^3 - 28X^2 + 12X$.
2. Déterminer l'ordre de multiplicité de -1 en tant que racine de $X^5 + 3X^4 - X^3 - 11X^2 - 12X - 4$.
3. Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine de $X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$.

Exercice 8

Soit $P = X^4 + 6X^3 + 10X^2 + 3X - 6$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par $X^2 + 3X$.
2. En déduire l'ensemble des racines de P.

Exercice 9

Déterminer dans $\mathbb{K}[X]$ tous les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé.

Exercice 10

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $P(a) > 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^k(a) \geq 0$. Montrer que P ne possède pas de racines dans $[a, +\infty[$.

Exercice 11

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose qu'il existe une infinité de réels α tels que $P(\alpha)$ est réel. Montrer que P est à coefficients réels.
(*Indication* : considérer le polynôme Q dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P).

Exercice 12

Déterminer tous les polynômes P in $\mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

1. $P(k) = k^3$;
2. $P(k) = \sqrt{k^2 - 1}$;
3. $P(k) = 2^k$.

Exercice 13

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3, possédant deux racines réelles. Montrer que la troisième racine est également réelle.

Exercice 14

Pour chacun des polynômes suivants, donner la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

1. $P_1 = X^4 - 4$;
2. $P_2 = X^4 + 1$;
3. $P_3 = X^6 + 27$;
4. $P_4 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$;
5. $P_5 = X^5 - 10X^4 + 25X^3 - 25X^2 + 10X - 1$;
6. $P_6 = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$ sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième ;
7. $P_7 = X^4 + 12X - 5$ en sachant qu'il y a deux racines dont la somme vaut 2.

Exercice 15

On considère le polynôme $P = (1 - X^2)^3 + 8X^3$.

1. Donner les solutions complexes de l'équation $z^3 = -1$.
2. En déduire les solutions complexes de l'équation $\left(\frac{1 - z^2}{2z}\right)^3 = -1$.
3. En déduire la factorisation du polynôme P dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$.

Exercice 16

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme de degré 3 à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que P est scindé sur $\mathbb{K}$ et on note x, y et z ses racines.

1. Exprimer en fonction de a, b, c et d les quantités $x + y + z$, $xy + xz + yz$, et xyz.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système $(S) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xyz = -4 \end{cases}$.

3. Exprimer les quantités $x^2+y^2+z^2$ et $x^3+y^3+z^3$ en fonction de $x+y+z, xy+xz+yz$ et xyz.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système $(S):\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=20 \end{cases}$.

Exercice 17

Polynômes interpolateurs de Lagrange.
Soient $n+1$ nombres réels $x_0,\dots,x_n$ tels que $x_0<x_1<\dots<x_n$.

1. Soit deux polynômes P et Q de degré au plus n.
   Montrer que si, pour tout $0\le i\le n$, $P(x_i)=Q(x_i)$ alors $P=Q$.
   Indication: On pourra examiner les racines de $P-Q$.
2. Pour tout $0\le i\le n$, on pose L_i le polynôme défini par

$$L_i[X]=\frac{\displaystyle\prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne i}}(X-x_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\ne i}}(x_i-x_j)}$$

   (a) Quel est le degré de L_i ?
   (b) Déterminer pour tout $(i;\ j)\in[\![0;\ n]\!]^2$, $L_i(x_j)$.
3. En utilisant tout ce qui précède, montrer que, pour tous nombres $(y_i)_{0\le i\le n}\in\mathbb{R}^n$, il existe un unique polynôme P de degré au plus n tel que, pour tout $0\le i\le n$, $P(x_i)=y_i$.
   Indication: On pourra exprimer P comme une combinaison linéaire des L_i.

Corrigé de la planche n° 15: Polynômes

Exercice 1

1. Une analyse de degré donne

$$\deg(P) = \deg(P) - 1 + \deg(P) - 2 \iff \deg(P) = 3$$

Ainsi, la solution, si elle existe, doit être un polynôme de degré 3. On cherche donc a, b, c et d tel que $P[X] = aX^3 + bX^2 + cX + d$ soit solution.
L'équation $P = P'P''$ donne un système d'équations sur les coefficients de P :

$$\begin{cases} a = 18a^2 \\ b = 18ab \\ c = 6ac + 4b^2 \\ d = 2bc \end{cases}$$

La première équation donne $a = 0$ ou $a = \dfrac{1}{18}$.

- Si $a = 0$, on en déduit, par cascade, que tous les autres coefficients sont nuls.
On vérifie que le polynôme nul est bien solution de l'équation proposée.
- Si $a = \dfrac{1}{18}$, b peut prendre n'importe quelle valeur et on a ensuite $c = 6b^2$ et $d = 12b^3$.
Pour tout nombre b, le polynôme $P[X] = 12b^3 + 6b^2X + bX^2 + \dfrac{1}{18}X^3$ est donc solution du problème.

2. Une petite analyse de degré montre que le degré de P vérifie

$$\deg(P) = 2$$

On cherche donc a, b et c tels que $P[X] = aX^2 + bX + c$ soit solution.
Encore une fois, une identification donne le système :

$$\begin{cases} 4a = 4a^2 \\ 4b = 4ab \\ 4c = b^2 \end{cases}$$

On obtient comme solution le polynôme nul ou bien l'ensemble des polynômes qui s'écrivent, pour $b \in \mathbb{K}$:

$$P(X) = X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$$

3. Une petite analyse de degré montre que P est forcément de degré 2 ou bien nul.
On cherche donc a, b et c tels que $P[X] = aX^2 + bX + c$ soit solution.
L'équation donne alors :

$$aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (c + a)X^2 + bX + c$$

Une identification donne le système :

$$\begin{cases} a = a \\ 0 = b \\ b = c + a \\ 0 = b \\ c = c \end{cases}$$

Ainsi, pour tout a, le polynôme $P[X] = aX^2 - a$ est solution.

4. L'analyse des degrés donne $n = 1$ ou $n = 0$.
   On vérifie facilement que tout polynôme constant fonctionne.
   Examinons maintenant les polynômes de degré 1.
   On cherche a et b tel que $P[X] = aX + b$ soit solution.
   Or, $P \circ P[X] = a(aX + b) + b = a^2X + ab + b$. On obtient ainsi un système équivalent sur a et b par identification :
   $$\begin{cases} a = a^2 \\ b = ab + b \end{cases}$$
   Le cas $a = 0$ donne un polynôme constant. Le cas $a = 1$ donne $b = 0$.
   Ainsi, le polynôme X est solution.

Exercice 2

1. quotient : $8X^5 + 8X^4 - 8X^2 - 15X - 7$.
   reste : $8X + 8$
2. quotient : $3X^3 + 14X^2 + 71X + 355$.
   reste : 1779
3. quotient : $2X^2 - 4$.
   reste : $-4X^2 + 8X + 9$

Exercice 4

1. Le calcul des racines de B donne $B = (X - 2)(X - 1)$.
   Le reste est de degré au plus 1 donc affine. On cherche deux nombres m et p et un polynôme Q tels que
   $$A[X] = (X - 1)(X - 2)Q[X] + mX + p$$
   L'évaluation de cette égalité en $X = 1$ et $X = 2$ donne le système :
   $$\begin{cases} 1 = m + p2^n = 2m + p \end{cases}$$
   On obtient facilement m et p et donc l'expression du reste :
   $$R[X] = (2^n - 1)X + (2^n - 2)$$
2. 1 est racine double de P.
   Le reste est de degré au plus 1 donc affine. On cherche deux nombres m et p et un polynôme Q tels que
   $$A[X] = (X - 1)^2Q[X] + mX + p$$
   L'évaluation de cette relation en $X = 1$ donne :
   $$1 = m + p$$
   Pour prendre en compte le fait que 1 est racine double, on dérive la relation. On obtient
   $$A'[X] = 2(X - 1)Q[X] + (X - 1)^2Q'[X] + m$$
   En évaluant cette relation en $X = 1$, on obtient :
   $$A'[1] = m$$
   Ainsi, $m = n$ et $p = 1 - n$. Le reste est donc
   $$R[X] = nX + 1 - n$$

3. i et −i sont les racines de X^2+1. On évalue donc la relation en i et −i, ce qui permet de déterminer le coefficient directeur m et l'ordonnée à l'origine du reste p qui est de degré au plus 1.
On obtient le système
$$\begin{cases}(\cos(t)+\mathrm{i}\sin(t))^n = m\mathrm{i}+p\\(\cos(t)-\mathrm{i}\sin(t))^n = -m\mathrm{i}+p\end{cases}$$
À l'aide de la formule de Moivre, on obtient le reste :
$$R[X] = \sin(nt)X+\cos(nt)$$

Exercice 5

C'est une application du théorème des valeurs intermédiaires.
On suppose qu'un tel polynôme P, de degré $2n+1$ s'écrit
$$P[X] = a_0+a_1X+\cdots+a_{2n+1}X^{2n+1}$$
On considère alors la fonction polynômiale associée. On a ainsi pour tout réel x non nul :
$$P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1}\left(1+\frac{a_{2n}}{x}+\frac{a_{2n-1}}{x^2}+\cdots+\frac{a_0}{x^{2n+1}}\right)$$
Si $a_{2n+1}>0$, on en déduit $\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} P = -\infty$.
Dans le cas contraire, on aura $\lim\limits_{+\infty} P = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} P = +\infty$.
Dans les deux cas, comme P est une fonction continue, on en déduit, par application du théorème des valeurs intermédiaires que P s'annule.

Exercice 6

- Le binôme de Newton donne :
$$\begin{aligned}(X+1)^n-nX-1 &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k-nX-1\\ &= \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}X^k\\ &= X^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{(k+2)}X^k\end{aligned}$$
Ainsi X^2 divise bien $(X+1)^n-nX-1$.
- Posons $P[X]=(X+1)^n-nX-1$.
Il s'agit de prouver que 0 est au moins racine double de P.
On vérifie que 0 est racine de $P[X]$. On calcule ensuite $P'[X]=n(1+X)^{n-1}-n$ et on vérifie que 0 est aussi racine de P'.

Exercice 8

1. On obtient $P[X]=(X^2+3X+1)(X^2+3X)-6$.
2. On pose $Y=X^2+3X$. On obtient $P[X]=Y^2+Y-6$, ce qui se factorise en $P[X]=(Y-2)(Y+3)=(X^2+3X-2)(X^2+3X+3)$.
On peut ainsi calculer les quatre racines :
$$\left\{\frac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2};\ \frac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2};\ \frac{-3-\sqrt{17}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right\}$$

Exercice 9

Supposons que P soit divisible par son polynôme dérivé. Il existe donc un polynôme Q tel que

$$P[X] = Q[X]P'[X]$$

Le polynôme nul est divisible par son polynôme dérivé. Notons également qu'aucun polynôme constant ne convient.
Analysons maintenant les racines de P.
Si α est racine de P de multiplicité m, il est racine de P' de multiplicité $m-1$.
Cette petite remarque permet de prouver que, toute racine α de P divise Q. Or, une petite analyse de degré nous montre que le degré de Q est 1.
On en déduit que P ne possède qu'une seule racine !
P est donc nécessairement de la forme $P[X] = (X-\alpha)^n$. Réciproquement, on vérifie qu'un tel polynôme convient. En effet, $P'[X] = n(X-\alpha)^{n-1}$ divise P.

Exercice 10

C'est une application de la formule de Taylor.
Pour tout $x \in [a;\ +\infty[$, $P(x) = P(a) + \sum\limits_{1\leq k\leq n} \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.
Or, par hypothèse, pour tout $x \geq a$ et pour tout $k \geq 1$, $\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \geq 0$ car $(x-a)^k \geq 0$ et $P^{(k)}(a) \geq 0$.
On en déduit que

$$P(x) \geq P(a) > 0$$

Ainsi, $P(x)$ ne peut pas être nul.

Exercice 11

Plaçons nous dans les hypothèse de l'énoncé.
Soit α un nombre tel que $P(\alpha) \in \mathbb{R}$. Notons $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ les coefficients de P.
On a donc :

$$P(\alpha) = \overline{P(\alpha)}$$

Cette relation donne, en raison des propriétés de conjugué :

$$\begin{aligned}
P(\alpha) = \overline{P(\alpha)} &\iff \sum_{0\leq k\leq n} a_k\alpha^k = \overline{\sum_{0\leq k\leq n} a_k\alpha^k} \\
&\iff \sum_{0\leq k\leq n} a_k\alpha^k = \sum_{0\leq k\leq n} \overline{a_k\alpha^k} \\
&\iff \sum_{0\leq k\leq n} a_k\alpha^k = \sum_{0\leq k\leq n} \overline{a_k}\alpha^k \\
&\iff \sum_{0\leq k\leq n} \left(a_k - \overline{a_k}\right)\alpha^k = 0
\end{aligned}$$

On en déduit que le polynôme $P - \overline{P}$ dont les coefficients sont $(a_k - \overline{a_k})_{0\leq k\leq n}$ possède une infinité de racines ! Ainsi, ce polynôme est nul.
En particulier, cela prouve que, pour tout $0 \leq k \leq n$, $a_k = \overline{a_k}$, c'est à dire que P a des coefficients réels.

Exercice 14

1. $$P_1 = \left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)\left(X-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(X+\mathrm{i}\sqrt{2}\right) = \left(X-\sqrt{2}\right)\left(X+\sqrt{2}\right)(X^2+2)$$

2. $$P_2 = \prod_{k=0}^{3}\left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4+k\pi/2)}\right) = (X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1)$$

3.
$$P_3 = \prod_{k=0}^{5}\left(X - \sqrt{3}e^{i(\pi/6+k\pi/3)}\right) = (X^2+\sqrt{3})(X^2-3X+3)(X^2+3X+3)$$

4.
$$P_4 = (X-i)(X-1+i)(X+i)(X-1-i) = (X^2+1)(X^2-2X+2)$$

5.
$$P_5 = \left(X - \frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)(X-1)^3$$

Exercice 17

Polynômes interpolateurs de Lagrange.
Soient $n+1$ nombres réels $x_0,\dots,x_n$ tels que $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.

1. Supposons que pour tout $0 \le i \le n$, $P(x_i) = Q(x_i)$.
   Dans ce cas, $P-Q$ possède $n+1$ racines distinctes (les x_i). Or le degré de $P-Q$ est inférieur ou égal à n.
   Ainsi, nécessairement, $P-Q=0$.
2. (a) Le numérateur est un produit de n polynômes de degré 1, le dénominateur est constant. Ainsi, le degré de L_i est n.

   (b) Un petit raisonnement permet de prouver que $L_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$
3. Le polynôme $P[X] = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i[X]$ vérifie, pour tout $0 \le j \le n$:
$$P(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x_j) = y_j$$
   De plus, P est unique. En effet, s'il existe un autre polynôme Q de degré au plus n qui vérifie ces hypothèses alors, d'après la question 1, $P=Q$.

Planche n° 16: Matrices

Exercice 1

Calculer AB et BA dans chacun des cas suivants lorsque c'est possible :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Déterminer deux matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que :

1. $AB = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ et $BA \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.
2. $AB = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, $BA = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ et $A \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$ et $B \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

Exercice 3

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

Exercice 4

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer JMJ.

Exercice 5

Calculer les puissances successives des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

1. Pour $n \geq 2$ déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente la valeur de A^n.

Exercice 7

On dit qu'une matrice carrée est *nilpotente* si l'une de ses puissances est nulle. Montrer que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes de même taille qui commutent est une matrice nilpotente. Ceci est-il encore vraie si on enlève l'hypothèse de commutativité ?

Exercice 8

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *trace* de M et on note $\mathrm{tr}(M)$ la somme des éléments diagonaux de M. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

1. Montrer que l'on a $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.
2. A-t-on $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$?
3. Montrer que l'on a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Exercice 9

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB, AC. La matrice A est-elle inversible ?
2. Déterminer les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 11

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$. En étudiant $\sum_{k=0}^{p-1} M^k$, montrer que $I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.
2. En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 12

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, vérifiant $P(0) \neq 0$, tel que $P(M) = 0$. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.
2. Pour $n \geq 2$, la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et dont tous les autres coefficients valent 1 est-elle inversible ?

Exercice 13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Montrer que A est inversible.

Exercice 14

Déterminer, suivant la valeur du réel a, le rang de la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16

Déterminer les matrices associées canoniquement aux applications linéaires suivantes, puis déterminer des équations de leurs images et noyaux.

1. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (3x-y,-x+y,-2y) \end{array}$
2. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z,-2x+3y) \end{array}$
3. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y,-2x-4y) \end{array}$
4. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x,2x-z,x-y+z) \end{array}$
5. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y,x+2z) \end{array}$
6. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-2y,x+2y) \end{array}$

Exercice 17

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f:(x,y,z) \mapsto (x-z,y,y)$.

1. Déterminer A, la matrice canoniquement associée à f.
2. Calculer A^2, A^3 et A^4. En déduire une formule probable pour A^n, puis la démontrer, par récurrence.
3. En déduire l'expression de f^n.

Exercice 18

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. A est inversible
2. $\ker A = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$
3. $\mathrm{i}A = \mathbb{K}^n$.

Corrigé de la planche n$^{\text{o}}$ 16: Matrices

Exercice 1

1. AB seulement peut se calculer :
$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 7 \\ 18 & 11 \end{pmatrix}$$

2. On calcule :
$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
et
$$BA = 7$$

3. On calcule :
$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$$
et
$$BA = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. On calcule :
$$AB = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & 11 & 9 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$
et
$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 12 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

On note $(m_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$.

La matrice MJ a pour coefficients $\left(\sum_{1\le k\le n} m_{ik}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$. C'est à dire que chaque ligne L_i de cette matrice contient n coefficients identiques égaux à la somme des coefficients de la i-ème ligne de M.
Multiplions maintenant à gauche cette matrice par J.
On obtient la matrice dont les coefficients sont $\left(\sum_{1\le l\le n}\sum_{1\le k\le n} m_{lk}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$. Tous les coefficients de cette matrice sont égaux et valent la somme de tous les coefficients de M.

Exercice 6

1. On a, après calcul, $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$.
   Le reste est de degré 1. On le note $R[X] = mX + p$. Il existe donc un polynôme Q tel que
$$X^n = (X-1)(X-2)Q[X] + mX + p$$

En évaluant cette relation en 1 et 2, on obtient le système :

$$\begin{cases} 1 = m + p \\ 2^n = 2m + p \end{cases}$$

Ce qui donne $m = 2^n - 1$ et $p = 1 - m = 2 - 2^n$. Ainsi, le reste est $R[X] = (2 - 2^n)X + 2^n - 1$.

2. Un peu de calcul montre que $A^2 = 3A$ donc $A^3 = 3A^2 = 9A$.
   De même, $A^4 = 3A^3 = 27A$
   Par une récurrence assez immédiate, on a donc $A^n = 3^{n-1}A$.

Exercice 9

1. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ Si A était inversible, on aurait $AB = AC \Longrightarrow A^{-1}AB = A^{-1}AC \Longrightarrow B = C$, ce qui est absurde.
   Ainsi A n'est pas inversible !
2. Soient $(C_i)_{1\leq i\leq 3}$ les trois colonnes de F.
   $AF = 0 \iff \forall 1 \leq i \leq 3,\ AC_i = 0$. Les matrices F qui vérifient $AF = 0$ sont donc constituées de vecteurs colonnes appartenant au noyau de A. Il s'agit donc de calculer $\mathrm{Ker}(A)$.
   $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} x_3 \in \mathrm{Ker}(A) \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$. On obtient donc

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} x_3 \in \mathrm{Ker}(A) \iff x_3 = -x_2 \text{ et } x_1 = 0$$

   Ainsi, $\mathrm{Ker}(A)$ est engendré par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On en déduit que F est nécessairement une matrice qui s'écrit

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \end{pmatrix}$$

   Avec $(\lambda_1;\ \lambda_2;\ \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 10

Après calcul, on obtient $A^2 - A = 2I$, ce qui donne $A(A - I) = 2I$, ou encore :

$$A \times \left(\frac{1}{2}(A - I)\right) = I$$

On en déduit :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I)$$

Exercice 12

1. On suppose que P est de degré n, que ses coefficients sont $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ avec $a_0 \neq 0$ et que $P(M) = 0$. Ainsi :

$$\sum_{0\leq k\leq n} a_k M^k = 0$$

   Or $M^0 = I$. On en déduit donc, puisque $a_0 \neq 0$:

$$I = \frac{-1}{a_0} \sum_{1\leq k\leq n} a_k M^k$$

C'est à dire :

$$I = A \times \left(\frac{-1}{a_0} \sum_{1 \le k \le n} a_k M^{k-1} \right)$$

En particulier, A est inversible et $A^{-1} = \left(\frac{-1}{a_0} \sum_{1 \le k \le n} a_k M^{k-1} \right)$

2. Soit A cette matrice. On va calculer A^2, pour voir...
Notons s_{ij} les coefficients de A^2. Pour tout $(i;\ j) \in [\![1;\ n]\!]^2$:

$$s_{ij} = \sum_{1 \le k \le n} a_{ik} a_{kj}$$

- Dans le cas où $i \ne j$, cette somme est composée de $n-2$ termes égaux à 1.
- Dans le cas contraire, cette somme est composée de $n-1$ termes égaux à 1.

On a donc $s_{ij} = \begin{cases} n-2 \text{ si } i \ne j \\ n-1 \text{ si } i = j \end{cases}$

On en déduit que $A^2 = (n-2)A + (n-1)I$, c'est à dire que

$$I = \frac{1}{n-1}\left(A^2 - (n-2)A\right) = A \times \left(\frac{1}{n-1}\left(A - (n-2)I\right) \right)$$

Exercice 13

On va montrer que le noyau de A est réduit à 0.
Soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$. On note $(x_i)_{1 \le i \le n}$ les coordonnées de X.
Soit $i_0 \in [\![1;\ n]\!]$ tel que $|x_{i_0}|$ est la plus grande coordonnée de X en module.
La i_0-ème coordonnée de AX vaut $\sum_{1 \le j \le n} a_{i_0 j} x_j = 0$. On obtient donc

$$a_{i_0 i_0} x_{i_0} = - \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i_0}} a_{i_0 j} x_j$$

Par passage au module et application de l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$|a_{i_0 i_0}|\,|x_{i_0}| \le \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i_0}} |a_{i_0 j}|\,|x_j|$$

Or, on sait que $|a_{i_0 i_0}| > \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i_0}} |a_{i_0 j}|$ donc, si $x_{i_0} \ne 0$, on obtient :

$$\sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i_0}} |a_{i_0 j}|\,|x_{i_0}| < |a_{i_0 i_0}|\,|x_{i_0}| \le \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i_0}} |a_{i_0 j}|\,|x_j|$$

Cette série d'inégalité est absurde ! En effet, par hypothèse, $|x_{i_0}|$ est la plus grande coordonnée en module !

Exercice 14

On utilise le premier pivot. On obtient donc

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & -a^4+1 \\ 0 & 0 & -a^4+1 & -a^5+a \\ 0 & -a^4+1 & -a^5+a & -a^6+a^2 \end{pmatrix}$$

En permutant des lignes, on obtient la matrice suivante qui est triangulaire supérieure :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1-a^4 & a(1-a^4) & a^2(1-a^4) \\ 0 & 0 & 1-a^4 & a(1-a^4) \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 \end{pmatrix}$$

Si $1 - a^4 = 0$, c'est à dire $a \in \{1;\ -1\}$, cette matrice est de rang 1.
Si $1 - a^4 \neq 0$, cette matrice est de rang 4.

Exercice 16

1.
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Le noyau de A est $\{0\}$. L'image de A est le plan engendré par les vecteurs libres

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Le noyau de A est la droite de $\mathbb{R}^3$ dont le système d'équations cartésienne est

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases}$$

L'image de A est $\mathbb{R}^2$ car les trois vecteurs colonnes de la matrice engendrent $\mathbb{R}^2$.

3.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

L'image de A est la droite engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Le noyau de A est la droite d'équation $y + 2x = 0$.

4.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les trois vecteurs de la matrice sont libres donc l'image de A est $\mathbb{R}^3$ et le noyau de A est $\{0\}$.

5.
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

L'image de A est $\mathbb{R}^2$. Le noyau de A est la droite de $\mathbb{R}^3$ dont un système d'équations est

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

6.
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

L'image est $\mathbb{R}^2$, le noyau est réduit à 0.

Exercice 17

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f : (x, y, z) \mapsto (x - z, y, y)$.

1. Déterminer A, la matrice canoniquement associée à f.
2. Calculer A^2, A^3 et A^4. En déduire une formule probable pour A^n, puis la démontrer, par récurrence.
3. En déduire l'expression de f^n.

Exercice 18

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. A est inversible
2. $\ker A = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$
3. $\mathrm{i}A = \mathbb{K}^n$.

Planche n$^{\text{o}}$ 17: Développements limités

Exercice 1

Déterminer les développements limités suivants au voisinage de 0 :

1. $e^x\sqrt[3]{1+x}$ à l'ordre 3 ;
2. $\sin(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 3 ;
3. $\sqrt{1+\sin x}$ à l'ordre 3 ;
4. $(e^x-1)\sin x$ à l'ordre 3 ;
5. $\dfrac{x}{e^x-1}$ à l'ordre 2 ;
6. $e^{\cos x}-(1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2 ;
7. $(\sin x)^4$ à l'ordre 8 ;
8. $\tan x$ à l'ordre 4 ;
9. $\dfrac{xe^{-x}}{2x+1}$ à l'ordre 4 ;
10. $(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 2

Déterminer les développements limités suivants :

1. $\sin(x)\cos(3x)$ à l'ordre 2 au voisinage de $\dfrac{\pi}{3}$;
2. $\sqrt{x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 1 ;
3. $\dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 1 ;
4. e^x à l'ordre 3 au voisinage de 1 ;
5. $\sqrt{\tan x}$ à l'ordre 3 au voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$;
6. $\dfrac{x\ln x}{x^2-1}$ à l'ordre 3 au voisinage de 1.

Exercice 3

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f: x \mapsto \arctan\dfrac{\sqrt{3}+x}{1+x\sqrt{3}}$.
Indication : on commencera par déterminer un développement limité de f' à un ordre bien choisi.

Exercice 4

Étudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\sin(x)}{\tan x - x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{\sin^3 x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{\sin^3 x}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\ln|x|}$;
6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+7x^2-8}{x^4+x^3-2}$.

Exercice 5

Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $f: x\mapsto x^{\sin x}-(\sin x)^x$.

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang.
   (*Indication :* on pourra étudier le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$).

Exercice 7

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - e^{-x}}$ si $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f possède un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le calculer.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Que vaut $f'(0)$?
3. Préciser la position relative de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$. En effectuant le changement de variable $u = \frac{1}{x}$, montrer que le graphe de f possède une asymptote au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$ et déterminer la position relative du graphe de f et de son asymptote.

Exercice 9

Soit f la fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f possède un développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 3 et le calculer. Qu'en déduit-on sur le graphe de f ?

Exercice 10

Étudier au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\arcsin x}$.
(prolongeable par continuité ? dérivable ? position de la courbe par rapport à la tangente ?)

Exercice 11

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$.

Étudier au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto \left(\dfrac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$.
(prolongeable par continuité ? dérivable ? position de la courbe par rapport à la tangente ?)

Exercice 12

Soit $n \geq 1$. Soit $f : x \mapsto \dfrac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
3. En interprétant $f(x)$ comme une somme, en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Corrigé de la planche n$^{\text{o}}$ 17: Développements limités

Exercice 1

1. Un peu de calcul permet de prouver que :
   $e^x \sqrt[3]{1+x} = \frac{23}{81}x^3 + \frac{13}{18}x^2 + \frac{4}{3}x + 1 + o(x^3)$
2. $\sin(x)\ln(1+x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + o(x^3)$
3. $\sqrt{1+\sin x} = -\frac{1}{48}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 + o(x^3)$
4. $(e^x - 1)\sin x = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + o(x^3)$
5. Détaillons un peu les calculs :
   Pour tout x :

$$\begin{aligned}\frac{x}{e^x-1} &= \frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-1}\\ &= \frac{x}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}\\ &= \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}\end{aligned}$$

   En posant $u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$, il vient :

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

   Or $u \sim \dfrac{x}{2}$ en 0 donc, $o(u^2) = o(x^2)$.
   Finalement :

$$\begin{aligned}\frac{x}{e^x-1} &= 1 - u + u^2 + o(u^2)\\ &= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2 + o(x^2)\\ &= 1 - \frac{x}{2} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)x^2 + o(x^2)\\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\end{aligned}$$

6. $e^{\cos x} - (1+x)^{\frac{1}{x}} = -\frac{23}{24}x^2 e + \frac{1}{2}xe + o(x^2)$
7. $(\sin x)^4 = \frac{1}{5}x^8 - \frac{2}{3}x^6 + x^4 + o(x^8)$
8. $\tan x = \frac{1}{3}x^3 + x + o(x^4)$
9. $\dfrac{xe^{-x}}{2x+1} = -\frac{79}{6}x^4 + \frac{13}{2}x^3 - 3x^2 + x + o(x^4)$
10. $(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \frac{17}{384}x^4 - \frac{5}{48}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 + o(x^4)$

Exercice 4

1. On utilise les développements limités. Ainsi, en 0, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{\tan x - x} &= \frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-x}\\
&= \frac{\frac{-x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\\
&= \frac{1}{x}\times\frac{\frac{-1}{2}+\frac{x}{6}+o(x)}{\frac{1}{3}+o(1)}
\end{aligned}$$

On en déduit que la limite recherchée est $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en 0^-.

2. On pose $u = x-1$, c'est à dire $x = u+1$. On cherche donc la limite, en 0 de

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\left(2(u+1)^2-1\right)}{\tan(u)} &= \frac{\ln(1+4u+2u^2)}{\tan(u)}\\
&= \frac{4u-6u^2+o(u^2)}{u+o(u^2)}\\
&= \frac{4+o(1)}{1+o(1)}
\end{aligned}$$

La limite recherchée est donc 4.

3. On raisonne toujours en terme de développements limités en 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin^3 x} &= \frac{1}{x^3}\times\left[1-\frac{x^3}{\sin(x)^3}\right]\\
&= \frac{1}{x^3}\times\left[1-\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^3\right]\\
&= \frac{1}{x^3}\times\left[1-\left(\frac{x}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)}\right)^3\right]\\
&= \frac{1}{x^3}\times\left[1-\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}\right)^3\right]\\
&= \frac{1}{x^3}\times\left[1-\left(1+\left(\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)+\left(\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)^2\right)^3\right]\\
&= \frac{1}{x^3}\times\left[1-\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)^3\right]\\
&= \frac{1}{x^3}\times\left[1-\left(1+\frac{3x^2}{6}+o(x^3)\right)\right]\\
&= \frac{1}{x^3}\times\left[\frac{-x^2}{2}+o(x^3)\right]\\
&= \frac{-1}{2x}+o(1)
\end{aligned}$$

On en déduit que la limite recherchée est $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en 0^-.

4.

5. Pour $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}(\cos x)^{\ln|x|} &= \mathrm{e}^{\ln(x)\times\ln(\cos(x))} \\ &= \mathrm{e}^{\ln|x|\times\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} \\ &= \mathrm{e}^{\ln|x|\times\left[-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{x^2\ln|x|}{2}+o(x^2\ln|x|)}\end{aligned}$$

La limite recherchée vaut donc 1.

6. On remarque que 1 est racine du numérateur et du dénominateur. On peut donc factoriser le numérateur et le dénominateur par $x-1$. On obtient ainsi :

$$\frac{x^3+7x^2-8}{x^4+x^3-2} = \frac{x^2+8x+8}{x^3+2x^2+2x+2}$$

La limite recherchée est donc $\frac{17}{7}$.

Exercice 6

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Posons $\alpha = \frac{1}{n}$ de sorte que $n \to +\infty \iff \alpha \to 0^+$.
On peut donc faire un développement limité de l'expression :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} &= \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}} \\ &= \mathrm{e}^{1+o(1)}\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim u_n = \mathrm{e}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\ &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\times\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^n \\ &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\times\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\end{aligned}$$

Posons maintenant $\beta = \frac{1}{n+1}$, de sorte que $n = \frac{1}{\beta} - 1$.
Un peu de calcul montre que :

$$\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{\beta}-1} = \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\ln\left(1-\beta^2\right)} = 1 + \frac{\beta^2}{2} + o\left(\beta^2\right)$$

On en déduit que l'expression $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieure ou égale à 1 pour β suffisamment proche de 0, c'est à dire pour n suffisamment grand.

Exercice 7

1. On écrit les développements limités en 0 :

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{e^x - e^{-x}} &= \frac{x^2}{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)} \\
&= \frac{x^2}{2x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + o(x^5)} \\
&= \frac{x}{2 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{60} + o(x^4)} \\
&= \frac{x}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{120} + o(x^4)} \\
&= \frac{x}{2} \times \left[1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right] \\
&= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^4)
\end{aligned}$$

   Ainsi, la fonction possède bien un développement limité d'ordre 3 en 0 (ici, on est même monté jusqu'à un ordre 4).

2. La fonction f est prolongeable en 0 en posant $f(0) = 0$. Dans ce cas, par lecture du développement limité d'ordre 1, sa dérivée vaut $\frac{1}{2}$.

3. L'équation de la tangente en 0 est $y = \frac{x}{2}$. La position relative est donnée par le signe de

$$f(x) - \frac{x}{2} = -\frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

   On en déduit que la courbe est sous la tangente en 0^+ et au dessus de la tangente en 0^-.

Exercice 8

1. On va directement répondre aux deux premières questions en faisant le développement limité de f d'ordre 3 en 0. Sa lecture nous donnera la limite de f en 0. Ainsi, pour tout $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1 + (n+1)x + \frac{(n+1)^2x^2}{2} + \frac{(n+1)^3x^3}{6} + \frac{(n+1)^4x^4}{24} + o(x^4) - 1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - 1} \\
&= \frac{(n+1)x + \frac{(n+1)^2x^2}{2} + \frac{(n+1)^3x^3}{6} + \frac{(n+1)^4x^4}{24} + o(x^4)}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\
&= \frac{(n+1) + \frac{(n+1)^2x}{2} + \frac{(n+1)^3x^2}{6} + \frac{(n+1)^4x^3}{24} + o(x^3)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)} \\
&= \left((n+1) + \frac{(n+1)^2x}{2} + \frac{(n+1)^3x^2}{6} + \frac{(n+1)^4x^3}{24} + o(x^3)\right) \times \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right) + \frac{\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)\right.}{2}\right. \\
&= \cdots \\
&= (n+1) + \frac{n(n+1)}{2}x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}x^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{24}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

   On en déduit que f se prolonge en 0 en posant $f(0) = n + 1$ (on aurait pu aussi utiliser le fait que f correspond à la somme des termes d'une suite géométrique pour trouver la limite en 0).

2. Fait au dessus !

3. Pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \mathrm{e}^{kx}$$

Or, pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $\mathrm{e}^{kx} = 1 + kx + \dfrac{k^2x^2}{2} + \dfrac{k^3x^3}{6} + o(x^3)$.
En identifiant le terme de degré 3 du développement limité de cette somme avec le terme de degré 3 du développement limité de f, il vient :

$$\frac{1}{6} \sum_{1 \leq k \leq n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{24}$$

On obtient donc :

$$\sum_{1 \leq k \leq n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Planche n° 18: Intégration

Exercice 1

Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $a<b<c$ et $f:[a,c]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,c]$. Montrer :

$$\frac{1}{c-a}\int_{[a,c]}f\leq\max\left(\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]}f,\frac{1}{c-b}\int_{[b,c]}f\right).$$

Exercice 2

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a\leq b$ et $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer :

$$\left|\int_{[a,b]}f\right|=\int_{[a,b]}|f|\iff f\text{ est de signe constant sur }[a,b].$$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1=\int_{-2}^{3}4\,\mathrm{d}x;\quad I_2=\int_0^4 x\,\mathrm{d}x;\quad I_3=\int_a^b\cos t\,\mathrm{d}t;\quad I_4=\int_1^3\frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u;\quad I_5=\int_0^{\pi}\cos(2u)\,\mathrm{d}u;$$

$$I_6=\int_0^{\pi/2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x;\quad I_7=\int_1^3(x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x;\quad I_8=\int_0^1\max\left(e^t,2\right)\,\mathrm{d}t;$$

$$I_9=\int_0^1|3t-1|\,\mathrm{d}t;\quad I_{10}=\int_0^5 x\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4

En reconnaissant une forme dont on connaît une primitive, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1=\int_0^{\pi/4}\tan^2(t)\,\mathrm{d}t;\quad I_2=\int_1^3\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t;\quad I_3=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t;\quad I_4=\int_1^e\frac{\cos(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t;$$

$$I_5=\int_0^{\pi/4}\frac{\tan t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t;\quad I_6=\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t;\quad I_7=\int_0^{\pi}\cos(t)\sin^5(t)\,\mathrm{d}t;\quad I_8=\int_0^{\pi}\sin^5(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 5

En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1=\int_0^1 t^2e^t\,\mathrm{d}t;\quad I_2=\int_1^e t^2\ln t\,\mathrm{d}t;\quad I_3=\int_0^{\pi}t\sin(3t)\,\mathrm{d}t;\quad I_4=\int_0^1\frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t;$$

$$I_5=\int_1^2\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\ \left(\textit{Indication : }\text{trouver } a \text{ et } b \text{ tels que } \frac{1}{t(t+1)}=\frac{a}{t}-\frac{b}{t+1}\right).$$

Exercice 6

En utilisant un changement de variables, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1=\int_0^1\frac{t}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t;\quad I_2=\int_0^1 xe^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x;\quad I_3=\int_2^3\frac{t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t;\quad I_4=\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x;$$

$$I_5=\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x\ (\text{poser } u=\sqrt{e^x-1});\quad I_6=\int_0^2\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt[3]{2+x}}\,\mathrm{d}x\ \left(\text{poser } u=\sqrt[3]{2+x}\right);$$

$$I_7=\int_{1/3}^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x}};\quad I_8=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}};\quad I_9=\int_1^2(\ln x)^2\,\mathrm{d}x;\quad I_{10}=\int_0^1\frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{d}x\ (\text{poser } u=x^3).$$

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n(1-nx) & \text{si } 0 \leq x < \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Pour tout $x \in [0,1]$, montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ; on note $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
5. Que vaut la fonction f ? En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Que remarque-t-on ?

Exercice 8

Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad I_{p,q} = \dfrac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$.
2. En déduire : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}, \quad I_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.
3. Montrer : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Exercice 9

Soit f une fonction définie et continue au voisinage de 0.
Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Interpréter ce résultat géométriquement.

Exercice 10

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a,b]$. Montrer :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f(t)^n\,\mathrm{d}t \right)^{1/n} = \sup_{[a,b]} f.$$

Exercice 11

Inégalité de Taylor-Lagrange
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Soit $(a,b) \in I^2$. On note $M_{n+1} = \displaystyle\sup_{[a,b]\text{ou}[b,a]} |f^{(n+1)}|$.

1. Justifier l'existence de M_{n+1}.
2. À l'aide de la formule de Taylor-reste intégral, montrer l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}.$$

   (Distinguer les cas $a \leq b$ et $a > b$.)
3. À quoi correspond cette inégalité dans le cas $n = 0$?
4. (a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

(b) En déduire que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et donner sa limite.

(c) Comment approcherait-on $\ln(1/2)$ et $\ln 4$?

5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{et} \quad \cos x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$.
Soit g définie par $g(x) = f(x)/x$.

1. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.
2. Calculer la dérivée n-ième de g sur $\mathbb{R}^*$ puis, en reconnaissant une formule de Taylor, l'exprimer sous la forme d'une intégrale.
3. À l'aide d'une intégration par partie, calculer $\lim_{x\to 0} g^{(n)}(x)$.
4. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, telle que f et f'' sont bornées. On note $M_0 = \sup_{\mathbb{R}} |f|$ et $M_2 = \sup_{\mathbb{R}} |f''|$.

1. Justifier l'existence de M_0 et M_2.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x_0 et $x_0 + h$, montrer que pour tout $h > 0$, on a $|f'(x_0)| \leq \frac{2M_0}{h} + h\frac{M_2}{2}$.
3. En déduire que f' est aussi bornée et que $\sup_{\mathbb{R}} |f'| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Exercice 14

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
2. Montrer : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Exercice 15

Déterminer les limites des suites de terme général :

1. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k e^{-k/n}$;
2. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left(\ln k^k - \ln n^k\right)$;
3. $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$;
4. $u_n = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$;
5. $u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$;
6. $u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}$.

Exercice 16

En utilisant des sommes de Riemann, déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$ et $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$.