Notes du cours de Mathématiques de TSI

Pierre-Alexandre Fournié

2018

Introduction

Utilisation de l'informatique

Il est recommandé aux élèves de télécharger et d'installer les logiciels suivants sur un ordinateur à la maison.

1. `Python` et l'éditeur `IDLE`, un langage de programmation :
   https ://www.python.org/downloads/
2. `Geogebra`, un logiciel de géométrie :
   http ://www.geogebra.org/cms/
3. `XCas`, un logiciel de calcul formel :
   http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/install_fr
4. `Anki` [1], un outil d'aide à la mémorisation basé sur le système des flash cards :
   http ://ankisrs.net/

Par ailleurs, les élèves qui auraient des questions peuvent m'envoyer un mail à l'adresse :

`pierrealexandre.fournie.prof@gmail.com`

Liste des principaux symboles utilisés

Indices et lettres prime

Il arrive que l'on écrive un symbole formé de deux caractères, l'un étant de taille inférieure placé en bas à droite. On parle alors d'indice.
Par exemple, lorsqu'on écrit x_a, il faut lire « x indice a ».
On peut également placer une apostrophe à côté d'un caractère. Ainsi, lorsqu'on écrit x', il faut lire « x prime ».

Lettres grecques

On utilisera parfois en cours les lettres grecques suivantes :

Minuscule	Majuscule	Nom de la lettre
α	A	alpha
β	B	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ϵ	E	epsilon
λ	Λ	lambda
μ	M	mu
π	Π	pi
σ	Σ	sigma
θ	Θ	theta
ω	Ω	omega

1. Ce logiciel peut également s'installer sur un smartphone `Apple` ou `Android`.

Logique et ensemble

Une implication sera notée $\Longrightarrow$, et une équivalence $\Longleftrightarrow$.
Le contraire d'un énoncé A sera noté $\neg A$ ou $\overline{A}$.
$\vee$ correspond au « et » logique tandis que $\wedge$ correspond au « ou » logique.
$x \in A$ signifie x appartient à A.
$\forall x \in A$ signifie « pour tout x appartenant à A. » $\exists x \in A$ signifie « il existe x appartenant à A. »
$A \subset B$ signifie que A est inclus dans B.
$A \cap B$ désigne l'intersection de A et B.
$A \cup B$ désigne la réunion de A et B.
Enfin, $\complement_E A$ ou $E \backslash A$ désigneront le complémentaire de A dans E. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E, on notera simplement $\overline{A}$.

Chapitre 1

Logique, ensembles et applications

If there's hell below, we're all gonna go.
Curtis Mayfield.

1.1 Logique

1.1.1 Différents énoncés mathématiques

Un énoncé, ou une proposition, est une phrase mathématique. Il y a trois types d'énoncé :

- ceux que l'on se donne comme vrai ;
- ceux que l'on prouve ;
- ceux que l'on pense être vrais, que l'on pense pouvoir prouver mais qui ne le sont pas encore.

Les éléments de bases que l'on se donne comme vrais sont les axiomes et les définitions. Une définition présente un objet mathématique tandis qu'un axiome est une loi fondamentale.
Exemples : définition d'un triangle équilatéral, axiome de la droite parallèle à une droite passant par un point.
En occident, le premier ouvrage connu qui établit clairement la distinction entre ce que l'on se donne comme vrai et ce que l'on peut prouver a été écrit par Euclide.
Parmi éléments que l'on prouve, on trouve

- des propositions : ce sont des résultats a priori pas trop compliqués à prouver ;
- des théorèmes : ce sont des résultats plus fondamentaux, à plus forte portée et souvent plus complexes ;
- des corollaires : ce sont des propositions que l'on déduit directement des théorèmes ;
- des lemmes : ce sont des propositions utiles pour prouver des théorèmes.

Les dénominations de lemmes, théorèmes, corollaires, lemmes peuvent varier en fonction des auteurs, des époques et surtout du choix des axiomes. Ainsi, si on change les axiomes et les définitions, ce qui apparaissait comme un axiome auparavant peut se prouver. C'est le cas par exemple de certains axiomes de la géométrie euclidienne.
L'un des enjeux de la fabrication des axiomes est la simplicité. Avec un minimum de mots et de symboles, on veut pouvoir construire une théorie qui soit la plus étendue possible et qui ne présente aucune ambiguïté ou contradiction.

✎ ***Exercice 0***

Donner des exemples de définitions, de théorèmes, de corollaires étudiés au collège et au lycée.

1.1.2 Les quantificateurs

Dans un énoncé mathématique, les quantificateurs sont semblables à aux articles dans un texte en langage courant.
Il existe deux types de quantificateurs : l'universel qui s'écrit « $\forall$ » , « pour tout » ,« quel que soit » ou « soit » , et l'existentiel qui s'écrit « $\exists$ » ou « il existe ».

Le quantificateur universel introduit un élément quelconque d'un ensemble. Un énoncé comprenant un quantificateur universel a donc une portée universelle.
Exemples : Tous les hommes naissent libres et égaux en droit. Tous les chemins mènent à Rome.
Dans un énoncé le quantificateur existentiel garantit simplement l'existence d'un élément vérifiant la propriété. Il a donc une portée plus réduite que le quantificateur universel.
Exemples : Il existe un chat qui aime les haricots verts. Il existe une licorne par delà les nuages. Il existe quelqu'un qui sait prouver le grand théorème de Fermat. Il existe un pays sans armée.

✎ ***Exercice 1***

Dans les phrases suivantes, préciser l'ensemble d'appartenance des objets, le ou les quantificateurs utilisés ainsi que la validité de la phrase.

a) *Pour tout nombre réel* x, $x^2 \geq 0$.
b) *Pour tout nombre entier* n, $n^2 + n$ *est pair.*
c) *Il existe un nombre* x *tel que* $x^2 = -1$.
d) *Pour tout réel* x, $x^2 \geq x$.
e) *Il existe un rectangle qui n'est pas un parallélogramme.*
f) *Il existe un chat qui est gris la nuit.*
g) *Dans toutes les villes, il existe un poète qui chante toutes les nuits.*

✎ ***Exercice 2***

1. *On considère les deux énoncés « il existe une paire de chaussures qui convient à tous les élèves de cette classe » et « pour n'importe quel élève de cette classe, il existe une paire de chaussure qui lui convient. »*
   Lequel de ces deux énoncés est le plus fort ?
2. *On considère une fonction réelle* f *qui vérifie l'énoncé suivant :*
   « il existe deux nombres a *et* b *tels que pour tout* x, $f(x) = ax + b$. *»*
   a) *Comment appelle-t-on une telle fonction ?*
   b) *Que peut-on dire d'une fonction qui vérifie « pour tout* x, *il existe* a *et* b *tels que* $f(x) = ax+b$ *».*

⚠ Dans un énoncé mathématique, l'ordre des objets et des quantificateurs est important. En général, après un quantificateur existentiel, on insère le mot « tel que » pour bien préciser que ce qui suit fait référence à l'objet en question.

1.1.3 Opérateurs logiques

1.1.3.1 Connecteurs logiques : et, ou, négation

Si A et B sont deux énoncés, on peut construire l'énoncé « A et B ». Cet énoncé ne sera vrai que si A et B le sont. On le note également $A \wedge B$.
Exemples : Soit n un entier, $n^2 + n$ est un multiple de 2 et $n(n+1)(2n+1)$ est multiple de 6. Système d'équations ou d'inéquations.
On peut également construire l'énoncé « A ou B ». Cet énoncé sera vrai lorsqu'au moins l'une des propositions l'est. On le note $A \vee B$.
Exemples : Soit x un nombre réel, $x > -1$ ou $x \leq 1$.
Enfin, le contraire d'un énoncé A, noté $\neg A$ ou non(A), n'est vrai que si A est faux.
Pour faire du calcul sur les connecteurs logiques, on dispose d'un outil : la table de vérité.
Son principe est simple : pour chacune des combinaisons des valeurs logiques de A et B, la table de vérité donne le résultat du connecteur. Ainsi, on peut déterminer les tables de vérités des opérateurs introduits jusqu'à présent.

A	**B**	**A** et **B**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	**B**	**A** ou **B**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	**textnon(A)**
V	F
F	V

Les opérateurs possèdent les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
A \text{ et } B &= B \text{ et } A && \text{commutativité de et}\\
A \text{ ou } B &= B \text{ ou } A && \text{commutativité de ou}\\
(A \text{ et } B) \text{ et } C &= A \text{ et } (B \text{ et } C) && \text{associativité de et}\\
(A \text{ ou } B) \text{ ou } C &= A \text{ ou } (B \text{ ou } C) && \text{associativité de ou}\\
A \text{ ou } (B \text{ et } C) &= (A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ ou } C) && \text{distributivité de ou sur et}\\
A \text{ et } (B \text{ ou } C) &= (A \text{ et } B) \text{ ou } (A \text{ et } C) && \text{distributivité de et sur ou}\\
\text{non}(\text{non}(A)) &= A\\
\text{non}(A \text{ et } B) &= \text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(B) && \text{Loi de Morgan}\\
\text{non}(A \text{ ou } B) &= \text{non}(A) \text{ et } \text{non}(B) && \text{Loi de Morgan}\\
\text{non}(A) \text{ et } A &= F\\
\text{non}(A) \text{ ou } A &= V
\end{aligned}$$

✎ ***Exercice 3***

En utilisant des tables de vérité prouver les trois derniers résultats.
Montrer également que non(A) ou $A = V$ et que non(A) et $A = F$.

À ce stade, on sait comment combiner des propositions à l'aide de connecteurs. Il est également important d'étudier l'effet du contraire sur les quantificateurs. On va examiner en pratique la phrase « tous les oiseaux volent. »
Comment décrire tout ce qui contredit cette phrase ? Bien sûr, « aucun oiseau ne vole » est contradictoire mais cet énoncé est trop restrictif car il ne représente pas tout ce qui contredit la phrase de départ. Il suffit en effet de trouver au moins un oiseau qui ne vole pas pour contredire la phrase. Ainsi, le contraire de « tous les oiseaux volent » sera « il existe un oiseau qui ne vole pas. »
De même, le contraire de « il existe un enfant qui n'aime pas les frites » sera « tous les enfants aiment les frites. »
En pratique, pour construire le contraire logique d'une proposition, on doit remplacer tous les quantificateurs universels en existentiels et réciproquement, sans changer les ensembles d'appartenance des objets.

✎ ***Exercice 4***

Écrire les contraires logiques des énoncés de l'exercice 1.

1.1.3.2 Implication et équivalence

On a vu au collège le théorème de Pythagore :
« Si ABC est un triangle rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$. »
ainsi que la *réciproque* du théorème de Pythagore :
« Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors ABC est un triangle rectangle en A. »
On appelle *implication* la phrase :
« Si ABC est un triangle rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$ » . On peut aussi l'écrire :
« ABC est un triangle rectangle en A *implique* $AB^2 + AC^2 = BC^2$. »
Avant d'aller plus loin, un petit exercice.

Exercice 5

Nous allons supposer vraie la phrase suivante :
« Si mon chat a faim alors il miaule. »

a) *Vous constatez que votre chat miaule, que pouvez-vous en déduire ?*
b) *Vous constatez que votre chat ne miaule pas, que pouvez-vous en déduire ?*
c) *Écrire la proposition réciproque.*

On définit ainsi l'implication, par sa table de vérité :

A	**B**	**A $\Longrightarrow$ B**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Dans la phrase $A \Longrightarrow B$, on dit que B est une *condition nécessaire* à A et on dit que A est une *condition suffisante* à B.
La *contraposée* d'une proposition $A \Longrightarrow B$ s'écrit non$(B) \Longrightarrow$ non(A).

Exercice 6

a) *Montrer que la table de vérité de non$(B) \Longrightarrow$ non(A) est identique à celle de $A \Longrightarrow B$.*
b) *Montrer également que la table de vérité de non(A) ou B est aussi équivalente à celle de $A \Longrightarrow B$.*
c) *Déterminer uniquement à l'aide des opérateurs simples (et, ou, non) une expression du contraire de $A \Longrightarrow B$.*

Exercice 7

Montrer, à l'aide d'une table de vérité, que $((A \Longleftrightarrow B)$ et $(B \Longleftrightarrow C)) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)$ est toujours vraie.

Enfin, on parle d'*équivalence* lorsqu'une implication et sa réciproque sont vraies.
Ainsi, $A \Longleftrightarrow B$ lorsque $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$ sont vraies simultanément.

Exercice 8

Rappeler les tables de vérité de $A \Longrightarrow B$ et de $B \Longrightarrow A$.
En déduire la table de vérité de $A \Longleftrightarrow B$.

1.1.4 Les différents raisonnements

1.1.4.1 Pour montrer une implication dans le sens direct

On veut montrer que, pour tout nombre x, si $x \in [0;\ 1]$ alors $x^2 \leq x$.
Pour cela, on considère $x \in [0;\ 1]$ quelconque. Dans ce cas $x - 1$ est négatif ou nul (car $x \leq 1$) et comme x est positif ou nul, on en déduit, par la loi des signes, que $x(x-1) \leq 0$, ce qui revient à dire $x^2 - x \leq 0$, c'est à dire $x^2 \leq x$.
Dans ce cas, le raisonnement est *direct*, c'est à dire que partant de l'hypothèse $x \in [0;\ 1]$, on aboutit à la conclusion $x^2 \leq x$.
Prenons un second exemple pour illustrer la notion de disjonction de cas.
On veut montrer « $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \times b = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$ » en utilisant le fait que tout réel non nul possède un inverse.

Pour cela, on fait une disjonction de cas sur la valeur de a. Si $a = 0$ la conclusion est vraie (on a bien $a = 0$ ou $b = 0$).
Si $a \neq 0$, a possède un inverse. On peut donc multiplier l'égalité $ab = 0$ par $\frac{1}{a}$. Et on obtient $\frac{1}{a} \times ab = \frac{1}{a} \times 0$, c'est à dire $b = 0$.
Enfin, considérons un troisième exemple. On veut prouver que pour tout x, $\sqrt{x^2+1} \geq x$.
Notons que $x^2 + 1 > 0$ entraîne l'existence de la racine carrée. On considère ensuite deux cas, selon le signe de x.
Si $x < 0$, on sait que $\sqrt{x^2+1} \geq 0$ et donc $\sqrt{x^2+1} \geq 0 > x$, ce qui prouve l'inégalité.
Si $x \geq 0$, on peut élever l'inégalité au carré car la fonction carré est croissante sur $[0;\ +\infty[$. On obtient ainsi $x^2 + 1 \geq x^2$, ce qui est vrai également.

1.1.4.2 Pour montrer une équivalence

Une équivalence est en fait composée d'une implication et de sa réciproque. En règle général, pour montrer une équivalence, il faut en théorie prouver les deux implications séparément.
Il arrive cependant que l'on puisse raisonner par équivalences successives. C'est le cas notamment lors de la résolution d'équations. Prenons un exemple. On cherche les nombres x qui vérifient $2x+3 = -x+2$. Pour tout x, on a les équivalences successives :

$$\begin{aligned} 2x+3 = -x+2 &\iff 2x+3+x-3 = -x+2+x-3 \\ &\iff 3x = -1 \\ &\iff \frac{3x}{3} = \frac{-1}{3} \\ &\iff x = \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

> Il est parfois délicat de raisonner par équivalences successives. Il faut être certain à chaque étape que l'équivalence est bien fondée.

1.1.4.3 Raisonnement par contraposée et par l'absurde

Ces raisonnements concernent les implications. Ainsi montrer $A \Longrightarrow B$ est identique à montrer $\neg B \Longrightarrow \neg A$. Dans certains cas, cette seconde formulation est plus facile à prouver.
Revenons sur la formulation du contraire.

Exercice 9

Écrire les contraposées des propositions suivantes :

a) *S'il pleut alors je suis mouillé.*
b) *Si je mange de la soupe alors je grandis.*
c) *S'il l'enfer existe alors nous irons tous en enfer.*
d) *S'il y a des frites à la cantine et que j'ai de l'argent sur mon compte alors je réserve mon repas.*
e) *Si un quadrilatère est un carré alors tous ses côtés sont de même longueur et ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.*

Le mot absurde est un synonyme de faux. En langage courant, il désigne quelque chose qui présente des contradictions. Ainsi, pour montrer qu'une proposition est vraie, il suffit de prouver que son contraire est faux.
Prenons deux exemples de raisonnement par l'absurde.
On considère l'ensemble des nombres réels et on souhaite prouver que 0 ne possède pas d'inverse.
On suppose qu'il existe un nombre m qui est l'inverse de 0. On en déduit que $m \times 0 = 1$. Mais on sait que $0 \times m = 0$. On aboutit à l'égalité $1 = 0$ qui est fausse.
Autre exemple : on considère un triangle ABC dont les côtés ont pour longueur $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 6$. On souhaite déterminer si ce triangle est rectangle. Pour cela, on le suppose rectangle. Dans ce cas, $[BC]$

est forcément l'hypoténuse car c'est le plus long côté. Par application du théorème de Pythagore, on devrait avoir $AB^2 + BC^2 = AC^2$, ce qui est faux. Le triangle n'est donc pas rectangle.
En pratique, pour prouver une implication $A \Longrightarrow B$ par l'absurde, on suppose que A et le contraire de B son simultanément vrais et l'on montre que l'on aboutit à une contradiction.
En effet, on a vu plus haut que l'énoncé $A \Longrightarrow B$ est identique à $\neg A \vee B$. Or le contraire de $\neg A \vee B$ est, d'après la loi de Morgan $\neg(\neg A) \wedge B$, c'est à dire $A \wedge \neg B$
On va reprendre un dernier exemple que l'on doit à Nabila Benattia. Lorsque Nabilla dit « Non mais allo ? T'es une fille et t'as pas de shampooing ? », elle veut signifier qu'il est absurde d'être une fille et de ne pas avoir de shampooing, autrement dit qu'être une fille implique d'avoir un shampooing.

1.2 Ensembles, applications, et dénombrement

1.2.1 Notations

Quand on écrit $x \in A$, cela signifie que x appartient à A. x est un élément et A est un ensemble.
Cet énoncé est différent de $B \subset A$ qui veut dire que B est inclus dans A. Dans ce cas A et B sont tous les deux des ensembles.

1.2.2 Opérations sur les ensembles

1.2.2.1 Union, intersection, complémentaire, ensemble vide

Définition : Intersection, union, complémentaire d'ensembles, ensemble vide, parties de E
Considérons deux ensembles E et F.
L'ensemble $E \cup F$ est formé des éléments appartenant à E ou à F.
L'ensemble $E \cap F$ est formé des éléments appartenant à E et F simultanément.
On dit que $E \subset F$ lorsque tous les éléments de E appartiennent aussi à F. Dans ce cas, $\complement_F E$ désigne l'ensemble des éléments de F n'appartenant par à E. On note aussi parfois cet ensemble $E \backslash F$.
L'ensemble qui ne contient aucun élément est noté $\varnothing$.
Enfin, l'ensemble qui contient tous les sous-ensembles de E s'appelle l'ensemble des parties de E. On le note $\mathcal{P}(E)$.

Proposition : Propriétés de l'inclusion
On considère trois ensembles A, B et C quelconques.

$$A \subset B \text{ et } B \subset C \Longrightarrow A \subset C \qquad \text{(Transitivité)}$$
$$A \subset A \qquad \text{(Réflexivité)}$$
$$A \subset B \text{ et } B \subset A \iff A = B \qquad \text{(Antisymétrie)}$$

Pour montrer que $A \subset B$, on prend un élément de A quelconque et on montre qu'il appartient nécessairement à B.
Pour montrer $A = B$, il faut montrer la double inclusion.

Proposition : Propriétés élémentaires des opérations sur les ensembles

On dispose en outre des résultats suivants, très similaires à ceux des opérateurs logiques pour deux sous-ensembles A et B d'un ensemble Ω :

$$\begin{aligned}
A \cap B &= B \cap A \\
A \cup B &= B \cup A \\
(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\
(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
\complement_{\Omega}(\complement_{\Omega}(A)) &= A \\
\complement_{\Omega}(A \cap B) &= \complement_{\Omega}(A) \cup \complement_{\Omega}(B) \qquad \textit{Loi de Morgan} \\
\complement_{\Omega}(A \cup B) &= \complement_{\Omega}(A) \cap \complement_{\Omega}(B) \qquad \textit{Loi de Morgan} \\
\complement_{\Omega} A \cap A &= \varnothing \\
\complement_{\Omega} A \cup A &= \Omega
\end{aligned}$$

Si x_1, x_2, $\cdots$, x_n sont n éléments, l'ensemble $\{x_1;\ x_2;\ \cdots;\ x_n\}$ est l'ensemble qui contient uniquement ces n éléments. En particulier, les deux ensembles $\{x_n;\ x_{n-1};\ \cdots;\ x_1\}$ et $\{x_1;\ x_2;\ \cdots;\ x_n\}$ sont identiques, c'est à dire que l'ordre dans lequel on écrit les éléments importe peu.
Exemples : avec des élèves de la classe.

Définition : Partitionnement d'un ensemble

Soit E_1, E_2, $\cdots$, E_k des sous-ensembles d'un ensemble E.
On dit que ces sous-ensembles forment un partitionnement de E lorsque pour tout $1 \leq i < j \leq k$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ et $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$.

Exercice 10

Pour traiter cet exercice, on pourra exploiter les résultats de logique présentés dans le paragraphe précédent.

1. *Montrer que $A \subset B \iff \complement_{\Omega} B \subset \complement_{\Omega} A$.*
2. *Montrer que $A \cap B \subset A$, puis $A \subset A \cup B$.*
3. *Déduire de la question précédente que $A \cup B = A \cap B \iff A = B$.*

On remarque que les relations et les opérations entre les ensembles possèdent leurs « images dans un miroir »logique. On appelle *dualité* ce principe. Le tableau plus bas liste de manière non exhaustive les correspondances entre la logique et les ensembles.

A et B deux sous-ensembles de Ω

Ensembles	$\forall x \in \Omega$: Logique
$x \in A \cap B$	$(x \in A) \wedge (x \in B)$
$x \in A \cup B$	$(x \in A) \vee (x \in B)$
$x \in \complement_{\Omega} A$	$\neg(x \in A)$
$A \subset B$	$(x \in A) \Longrightarrow (x \in B)$

1.2.2.2 Produit cartésien

Définition : Produit cartésien de deux ensembles

Le produit cartésien de deux ensembles E et F est constitué de l'ensemble des couples formés par un élément de E et un élément de F. On le note $E \times F$.
Quand on écrit $(x;\ y) \in E \times F$, cela signifie que x appartient à E et $y \in F$. On parle alors du couple $(x;\ y)$.

Dans ce cas l'ordre est important. En particulier, on n'a pas $(x;\ y) = (y;\ x)$ (sauf si $x = y$).

⚠ Il faut bien distinguer {Curtis Mayfield; la reine d'angleterre} et (Curtis Mayfield; la reine d'angleterre).
Dans le premier cas, c'est l'ensemble formé par ces deux personnes donc l'ordre importe peu. On parlera de la paire {Curtis Mayfield; la reine d'angleterre}. Dans l'autre écriture, on désigne le couple (Curtis Mayfield; la reine d'angleterre) appartenant par exemple au produit cartésien Chanteurs × Femmes portant une couronne.

✎ ***Exercice 11***

On considère l'ensemble E des élèves de cette classe et l'ensemble L des lettres de l'alphabet.
Déterminer des sous-ensembles de E constitués de trois éléments, des sous-ensembles de L constitués de deux éléments, des éléments de $E \times F$, des éléments de $E \times E$, des éléments de $L \times L$.
Donner un exemple d'élément de L^5. Combien d'éléments comporte L^5 ?

Le produit cartésien de E par lui-même est noté E^2. Le produit cartésien de E par lui-même n-fois de suite est noté E^n. Un élément de cet ensemble est constitué de n éléments de E (non nécessairement distincts) et sera appelé n-uplet.

✎ ***Exercice 12***

Dire si les expressions suivantes sont vraies. On sera attentif aux éventuelles erreurs de syntaxe.

a)

$$\{\textit{Curtis Mayfield};\ \textit{Marvin Gaye}; \textit{Edith Piaf}\} = \{\textit{Edith Piaf}; \textit{Curtis Mayfield};\ \textit{Marvin Gaye}\}$$

b)

$$\{\textit{Aretha Franklin};\ \textit{Curtis Mayfield};\ \textit{Le commandant Cousteau}; \textit{Aretha Franklin}\} = \{\textit{Aretha Franklin};\ \textit{Curtis Mayfield};\ \textit{Le commandant Cousteau}\}$$

c)

$$\{\textit{Aretha Franklin};\ \textit{Curtis Mayfield};\ \textit{Le commandant Cousteau}; \textit{Aretha Franklin}\} = \{\textit{Aretha Franklin};\ \textit{Curtis Mayfield};\ \textit{Le commandant Cousteau}\}$$

d)

$$(\textit{Aretha Franklin};\ \textit{Curtis Mayfield};\ \textit{Le commandant Cousteau}; \textit{Aretha Franklin}) = (\textit{Aretha Franklin};\ \textit{Curtis Mayfield};\ \textit{Le commandant Cousteau})$$

e)

$$(\textit{Aretha Franklin};\ \textit{Curtis Mayfield};\ \textit{Le commandant Cousteau}) \cap (\textit{Curtis Mayfield};\ \textit{Le commandant Cousteau};\ \textit{David Guetta}) = (\textit{Curtis Mayfield};\ \textit{Le commandant Cousteau})$$

f)

$$\{\textit{Aretha Franklin};\ \textit{Curtis Mayfield};\ \textit{Le commandant Cousteau}\} \cap \{\textit{Curtis Mayfield};\ \textit{Le commandant Cousteau};\ \textit{David Guetta}\} = \{\textit{Curtis Mayfield};\ \textit{Le commandant Cousteau}\}$$

1.2.3 Applications entre deux ensembles

Définition : Application, image, antécédent, injection, surjection, bijection

Soient E et F deux ensembles.
Définir une application f de E dans F, c'est associer à chaque élément x de E un unique élément $f(x)$ de F.
On note $f : E \to F$. On dit que E est l'ensemble de départ de f, F l'ensemble d'arrivée de f. $f(x)$ s'appelle l'image de x.
Enfin, pour tout élément y de F, un antécédent de y est, lorsqu'il existe, un élément x de E tel que $f(x) = y$.
On dit que f est injective lorsque deux éléments distincts de E possèdent nécessairement deux images distinctes.
On dit que f est surjective lorsque tout élément de F possède au moins un antécédent.
Une application à la fois surjective et injective sera qualifiée de bijective.

Proposition : Application bijective

Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si chaque élément de F possède un unique antécédent par f.

Illustrations d'applications injectives et surjectives à l'aide de patates.

✎ ***Exercice 13***

1. *On considère l'application*

$$\textit{Auteur} : \begin{array}{ccc} \{\textit{Romans}\} & \to & \left\{\textit{Êtres humains vivants ou morts}\right\} \\ \textit{roman} & \mapsto & \textit{auteur de ce roman} \end{array}$$

   a) *Déterminer l'image des Misérables.*
   b) *Déterminer un ou plusieurs antécédents de Virginie Despentes.*
   c) *Prouver que cette application n'est pas surjective.*

2. *Dans les cas suivants, dire si les applications sont injectives, surjectives ou bjectives.*

   a)

$$A : \begin{array}{ccc} \left\{\textit{Élèves de la classe}\right\} & \to & \{\textit{Nombres entiers}\} \\ \textit{élève} & \mapsto & \textit{année de naissance} \end{array}$$

   b)

$$\sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rccc} \sin : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rccc} k_1 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{rccc} k_2 : & \mathbb{R} & \to & [0;\ +\infty[\\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{rccc} l : & [0;\ +\infty[& \to & [0;\ +\infty[\\ & x & \mapsto & |x| \end{array}$$

g)

$$\begin{array}{rccc} m : & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Définition : Image, image réciproque d'un ensemble, restriction d'une application
Soit une application $g : E \to F$. Soit $A \subset E$ un sous-ensemble de E et $B \subset F$ un sous-ensemble de F.
L'ensemble image $g(A)$ de A est formé des images des éléments de A, ce que l'on peut écrire
$g(A) = \{g(x),\ x \in A\}$.
L'image réciproque de B notée $g^{-1} < B >$ est formée de l'ensemble des antécédents des éléments de B.
$g^{-1} < B >= \{x \in E / g(x) \in B\}$.
Enfin, la restriction de g à A notée $g_{|A}$ est l'application $g_{|A} : A \to F$ qui à tout x de A associe $g(x)$.

✎ **Exercice 14**

Mêmes notations. Montrer que g est surjective si et seulement si $g(E) = F$.
En déduire que g est injective si et seulement si l'application $\tilde{g} : E \to g(E)$ qui, à tout x de E associe $g(x)$, est bijective.

✎ **Exercice 15**

Mêmes hypothèses. A et B désignent cette fois des sous-ensembles de E.
Montrer que $g(A \cup B) = g(A) \cup g(B)$.
Montrer que $g(A \cap B) \subset g(A) \cap g(B)$. Montrer que l'on a en général pas d'égalité. On pourra pour cela considérer la fonction carré, $A = [-2;\ 0]$ et $B = [0;\ 2]$.

Définition : Application composée
Partant de deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$, on peut fabriquer une application composée notée $g \circ f$ qui à tout élément x de E associe un unique élément $g\left(f(x)\right)$, que l'on note $g \circ f(x)$.

On dispose alors de la proposition suivante concernant les compositions d'applications et les propriétés de surjectivité et injectivité définies plus haut.

Proposition :
La composée de deux applications surjectives est surjective.
La composée de deux applications injectives est injective.
La composée de deux applications bijectives est bijective.

✎ **Exercice 16**

À l'aide de patates, faire un schéma de deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$ telles que f est injective, g est surjective mais $g \circ f$ n'est pas surjective, ni injective.
De même, faire un schéma de deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$ telles que f est surjective, g est injective mais $g \circ f$ n'est pas surjective, ni injective.

Définition : Application réciproque d'une application bijective, application identité

Soit $f : E \to F$ une application bijective. On peut construire une application $g : F \to E$ telle que :

- *pour tout x de E, $g \circ f(x) = x$*
- *pour tout y de F, $f \circ g(y) = y$*

On dit que g est l'application réciproque de f.
L'application identité de E noté id_E est l'application qui à tout x de E lui associe lui-même.
Ainsi, g vérifie

$$f \circ g = id_F \text{ et } g \circ f = id_E$$

Démonstration. On construit g en associant à chaque élément y de F l'unique antécédent de y par f. □

1.2.4 Dénombrement

1.2.4.1 Cardinal d'un ensemble fini

On dit qu'un ensemble E est de cardinal fini lorsque l'on peut numéroter ses éléments à l'aide de nombres entiers par un procédé non infini. En pratique, faire une numérotation de E, c'est établir une bijection entre E et un ensemble du type $\{1;\ 2;\ \cdots;\ n\}$. On note $[\![1;\ n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n.

Définition : Cardinal fini d'un ensemble

Soit n un nombre entier et E un ensemble.
On dit que E est de cardinal n lorsqu'il existe une bijection entre l'ensemble des n premiers entiers et E.
Dans ce cas, on note $\mathrm{card}(E) = n$ ou $\#E = n$

Exemples : élèves de cette classe, ensembles finis d'entiers, produit cartésien de deux ensembles finis.

Proposition : Ensembles de même cardinal fini

Soient E et F deux ensembles de cardinaux fini.
E et F sont de même cardinal lorsqu'il existe une bijection entre E et F.

Proposition : Formule de l'union, du complémentaire

Soit X un ensemble de cardinal fini qui contient un sous-ensemble A. Alors A et $\complement_X A$ sont de cardinaux fini et on a la formule

$$\mathrm{card}(\complement_X A) + \mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(X)$$

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ et $E \cap F$ sont également de cardinaux finis et on a la formule

$$\mathrm{card}(E \cup F) + \mathrm{card}(E \cap F) = \mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(F)$$

Proposition : Cardinal et partitionnement
Si les E_1, E_2, $\cdots$, E_k forment un partitionnement d'un ensemble de cardinal fini E alors

$$\mathrm{card}(E_1) + \mathrm{card}(E_2) + \cdots + \mathrm{card}(E_k) = \mathrm{card}(E)$$

Proposition : Cardinal et produit cartésien
Soient E et F deux ensembles de cardinaux finis n et p.
Alors $E \times F$ est également de cardinal fini et on a

$$\mathrm{card}(E \times F) = \mathrm{card}(E) \times \mathrm{card}(F)$$

1.2.4.2 Cardinal d'applications

Un petit exercice en entraînement.

✎ ***Exercice 17***

1. *Chaque élève de cette classe (qui en compte 38) répond sans justifier à un vrai faux qui comprend deux questions.*
   a) *De combien de manières différentes peut répondre un élève fixé ?*
   b) *Sans tenir compte de l'ordre des copies, de combien de paquets de copies différentes peut disposer le professeur ?*
2. *Un écran en noir et blanc comprend 240 000 pixels pouvant chacun prendre 256 valeurs de gris différents. Combien d'images en noir et blanc différentes peut-on afficher ?*

Proposition : Nombre d'applications entre deux ensembles finis
Soient E et F deux ensembles de cardinaux n et p.
Alors, il existe p^n applications de E vers F.

On peut d'ailleurs utiliser la notation F^E pour désigner l'ensemble des applications de E dans F.

Proposition : Nombre d'injections entre deux ensembles finis
Soient E et F deux ensembles de cardinaux n et p.
Si $n > p$, il n'existe pas d'injections de E dans F.
Dans le cas contraire, il existe $p \times (p-1) \times \cdots \times (p-n+1)$ injections de E dans F.

Proposition : Nombre de bijections entre deux ensembles, factorielle
Soient E et F deux ensembles de même cardinal n.
Alors il existe $n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ bijections de E vers F.
On appelle factorielle de n le nombre $n \times (n-1) \times \cdots \times 1$. On le note $n!$. Par convention, on pose $0! = 1$.

1.2.4.3 Nombre de combinaisons

Définition : Combinaisons de k éléments parmi n
Soient k et n deux entiers.
On appelle nombre de combinaisons de k éléments parmi n le nombre de sous-ensembles à k éléments dans un ensemble à n éléments.
Ce nombre vaut $\binom{n}{k} = n!(n-k)!k!$ si $k \in [\![0;\ n]\!]$ et 0 sinon.
On l'appelle aussi coefficient binomial.

Démonstration. Soit E un ensemble à n éléments.
Choisir k éléments numérotés de 1 à k, c'est réaliser une injection de $[\![1;\ k]\!]$ vers E. Il y a $n \times (n-1) \times (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ manières de faire ce choix.
On sait également qu'il y a $k!$ manières de numéroter k éléments.
Ainsi il y a $k!$ fois plus d'ensembles à k éléments ordonnés que d'ensembles à k éléments non ordonnés. Or, nous nous intéressons au nombre de sous-ensembles à k éléments sans prendre en compte l'ordre.
On obtient donc bien la formule $\dfrac{n \times (n-1) \times (n-k+1)}{k!}$. □

Lien avec les arbres et les schémas de Bernoulli.

Proposition : Cas particulier : coefficient $\binom{n}{2}$
On a

$$\binom{n}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)$$

Démonstration. Pour plus de simplicité, on considère l'ensemble $[\![1;\ n]\!]$ et on cherche le nombre de sous-ensembles à deux éléments de cet ensemble.
Si on choisit le 1, on peut choisir le second élément parmi les n-1 restants. Cela fait n-1 combinaisons à deux éléments contenant le 1.
Puis on choisit le 2, et on peut alors désigner le second élément parmi les n-2 suivants. En effet, on a déjà constitué le sous-ensemble $\{1;\ 2\}$.
Et ainsi de suite...
On obtient donc en tout $(n-1) + (n-2) + \cdots + 1$ sous-ensembles à deux éléments. □

Proposition : Propriétés des coefficients binomiaux
Soit n un entier et $k \in [\![0;\ n]\!]$.
Alors on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{(n-k)}$.
Si $k \geq 1$, on a également une formule de récurrence sur les coefficients binomiaux $\binom{n}{k} = \binom{(n-1)}{(k-1)} + \binom{(n-1)}{k}$ qualifiée de triangle de Pascal.
Enfin, on dénombre 2^n sous-ensembles dans un ensemble à n éléments et ce nombre correspond à

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

Démonstration. Choisir k éléments revient à ne pas choisir $n-k$ éléments. Ainsi, à chaque sous-ensemble à k élément correspond un unique sous-ensemble à $n-k$ éléments. Ce qui prouve la première formule.
Pour prouver le triangle de Pascal, supposons que l'ensemble considéré est $[\![1;\ n]\!]$. Parmi les sous-ensembles contenant k éléments, il y a

- ceux contenant le 1, ce qui revient à choisir $k-1$ éléments parmi les $(n-1)$ restants ;
- ceux ne contenant pas le 1, ce qui revient à choisir k éléments parmi les $(n-1)$ restants.

Finalement, par partitionnement, on obtient $\binom{n}{k} = \binom{(n-1)}{(k-1)} + \binom{(n-1)}{k}$.
Pour montrer la seconde formule, il faut noter qu'à chaque sous-ensemble F d'un ensemble E à n élément on peut associer une unique application $\tau : E \to \{V;\ F\}$ telle que $\tau(x) = V$ si $x \in F$ et $\tau(x) = F$ si $x \notin F$.
Ainsi, compter le nombre de sous-ensembles de E revient à compter le nombre d'applications de E vers $\{V;\ F\}$. Or il y en a 2^n car $\text{card}\left(\{V;\ F\}\right) = 2$ et $\text{card}(E) = n$.
Mais de la même manière, on peut partitionner ces sous-ensembles en sous-ensembles de 0 éléments, de 1 éléments et ainsi de suite...
On retrouve donc bien la dernière formule. $\square$

Chapitre 2

Géométrie du plan

« Tristan vint sous l'arbre et jeta dans l'eau les copeaux et les branchages. Mais, comme il s'était penché sur la fontaine en les jetant, il vit, réfléchie dans l'eau, l'image du roi. Ah ! s'il pouvait arrêter les copeaux qui fuient ! Mais non, ils courent, rapides, par le verger. Là-bas, dans les chambres des femmes, Iseut épie leur venue ; déjà, sans doute, elle les voit, elle accourt. Que Dieu protège les amants !»

Joseph Bédier (à partir de sources multiples), Le roman de Tristan et Iseut

2.1 Vecteurs, bases et angles

2.1.1 La colinéarité, famille libre, famille liée

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires* lorsqu'il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.
En pratique, on identifie des vecteurs colinéaires en vérifiant si leurs coordonnées sont proportionnelles. Lorsqu'on trace des représentants de deux vecteurs colinéaires, on remarque qu'ils partagent la même direction.

On suppose que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\boxed{xy' = yx'}$.

Définition : Famille libre, famille liée, base

Soit $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs.
On dit que ces deux vecteurs forment une famille libre *lorsque, pour tous nombres λ_1 et λ_2, $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 = 0$.*
Dans le cas contraire, on dit que ces deux vecteurs forment une famille liée.

✎ ***Exercice 0***

1. *Écrire la définition formelle de « $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ forment une famille liée. »*
2. *En déduire que deux vecteurs sont liés si et seulement si ils sont colinéaires.*

Définition : Base du plan

Lorsque deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ forment une famille libre, on dit que $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_2)$ est une base du plan.
Dans ce cas, pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple $(x;\ y) \in R^2$ tel que

$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

On dit que $(x;\ y)$ sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_2)$.

✎ ***Exercice 1***

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

Soient les vecteurs $\vec{e_1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{e_2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

1. *Prouver que* $(\vec{e_1};\ \vec{e_2})$ *forment une base.*
2. *Soit le vecteur* $\vec{u}$ *de coordonnées* $\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ *dans* $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

   Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$ *dans* $(\vec{e_1};\ \vec{e_2})$.

2.1.2 Deux façons de représenter les points

2.1.2.1 Coordonnées cartésiennes

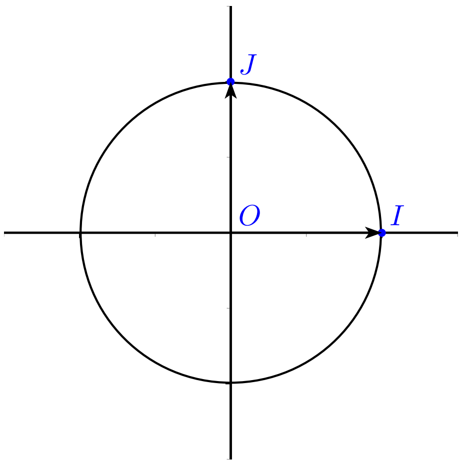
Définition : Repère du plan, repère orthonormé

Un repère du pan est donné par un point O *et deux vecteurs libres* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.
On le désigne par $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Dans ce cas, pour tout point M *il existe un unique couple* $(x;\ y)\in\mathbb{R}^2$ *tel que*

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

On dit que $(O;\vec{u};\vec{v})$ *est un repère orthonormé lorsque* $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ *et* $(\vec{u};\ \vec{v}) = \pm\frac{\pi}{2}$.
On dira que le repère orthonormé est direct lorsque $(\vec{u};\ \vec{v}) = +\frac{\pi}{2}$.

2.1.2.2 Rappels sur la trigonométrie



Soit $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ un repère orthonormé. On définit Γ le cercle de centre O et de rayon 1. On dit que Γ est le *cercle trigonométrique* du repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
On définit le sens positif de déplacement sur le cercle comme étant de I vers J par le plus court chemin.

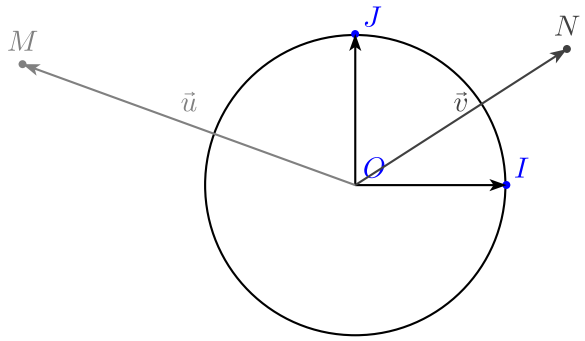
Soient M et N deux points de Γ.
On définit une *mesure* de l'angle $\widehat{MON}$ en *radians* comme étant le déplacement de M vers N, c'est à dire la longueur d'un arc de Γ reliant M à N munie d'un signe + si le chemin est parcouru dans le sens positif ou bien d'un signe − dans le cas contraire.

La mesure principale de l'angle $\widehat{MON}$ est l'unique mesure de cet angle appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u}\neq 0$ et $\vec{v}\neq 0$.

Il existe deux uniques points M et N tels que $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \vec{u} \\ \overrightarrow{ON} = \vec{v} \end{cases}$

M' et N' désignent les intersections respectives des demi-droites $[OM)$ et $[ON)$ avec le cercle trigonométrique.
On appelle angle de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'angle $\widehat{M'ON'}$. On note cet angle $(\vec{u};\vec{v})$.



Proposition : Relation de Chasles

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs tous non nuls.
On a :

$$\boxed{(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w})}$$

Proposition : Angles et colinéarités

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs tous non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(\vec{u},\vec{v})$ a pour mesure 0 ou bien π aux multiples de 2π près.

Proposition : Autres propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs tous non nuls.
On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (\vec{u},\vec{u}) &= 0 \\ (\vec{u},-\vec{u}) &= \pi \\ (\vec{u},\vec{v}) &= -(\vec{v},\vec{u}) \\ (\vec{u},-\vec{v}) &= (\vec{u},\vec{v}) + \pi \end{aligned}$$

Soit un réel x.
Il existe un unique point M sur le cercle trigonométrique tel que $\widehat{IOM}$ a pour mesure x en radian.
On définit les réels $\cos(x)$ et $\sin(x)$ comme étant les coordonnées de ce point M.
Plus généralement, les sinus et cosinus d'un angle seront les sinus et cosinus d'une mesure de cet angle.

2.1.2.3 Coordonnées polaires

Définition : Coordonnées polaires

Soit $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ *un repère orthonormé direct. Soit* M *un point du plan distinct de l'origine.*

On définit les coordonnées polaires de M *par l'unique couple* $(\rho;\ \theta) \in \mathbb{R}^{+}\times]-\pi;\ \pi]$ *tel que* $\begin{cases} OM = \rho \\ \left(\vec{\imath};\ \overrightarrow{OM}\right) = \theta \end{cases}$.

Par convention, on dira que $(0;\ 0)$ *sont les coordonnées polaires de* O*.*

Proposition : Lien entre coordonnées polaires et cartésiennes

On reprend les mêmes hypothèses. Dans ce cas, les coordonnées cartésiennes de M *dans le repère* $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ *sont données par*

$$M\begin{pmatrix}\rho\cos(\theta)\\ \rho\sin(\theta)\end{pmatrix}$$

Réciproquement, connaissant les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ *de* M *dans le repère* $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ *, on peut déterminer les valeurs de* ρ *et de* θ *en calculant*

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

et en trouvant la mesure principale de θ*, solution de :*

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

2.2 Produit scalaire et déterminant

2.2.1 Produit scalaire

2.2.1.1 Norme

Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. La *norme* de $\vec{u}$ est la longueur AB. Elle ne dépend pas du représentant $\overrightarrow{AB}$ choisi.

Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé alors la norme de $\vec{u}$ vaut $\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}}$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et λ un nombre. La norme vérifie les propriétés suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \|\vec{u}+\vec{v}\| & \leq \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\| & \text{(inégalité triangulaire)} \\ \|\lambda\vec{u}\| & = |\lambda|\|\vec{u}\| & \text{(multiplication par un réel)} \\ \|\vec{u}\| = 0 & \Longleftrightarrow \vec{u} = 0 & \end{array}}$$

2.2.1.2 Produit scalaire

On appelle *produit scalaire de deux vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

On suppose que $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé. Alors $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'}$.

Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tous les deux non nuls, on a $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u},\ \vec{v}\right)}$.

Établissons quelques propriétés importantes du produit scalaire :
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et λ un réel. Le produit scalaire vérifie :

$\vec{u}\cdot\vec{v}$	$=\vec{v}\cdot\vec{u}$	(commutativité)
$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$	$=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$	(distributivité)
$(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}$	$=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$	(associativité)
$\vec{u}\cdot\vec{u}$	$=\\|\vec{u}\\|^2$	(lien avec la norme)

En pratique cela signifie que le produit scalaire vérifie sensiblement les même propriétés que le produit de deux nombres. On pourra donc utiliser les identités remarquables, développer et factoriser des expressions.

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* lorsque $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
Toujours dans le cas où $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* si et seulement si $xx'+yy'=0$.

Théorème : Al Kashi
Soit ABC un triangle quelconque.
Alors
$$BC^2=BA^2+AC^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$$
Ce qui s'écrit également
$$BC^2=BA^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

✎ ***Exercice 2***

Démontrer le théorème d'Al Kashi.

✎ ***Exercice 3***

Soient A et B deux points distincts. On note I le milieu de $[AB]$
Enfin M désigne un quatrième point.
Montrer l'équivalence $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0 \iff IM^2=AI^2$

✎ ***Exercice 4***

$ABCD$ est un parallélogramme.
Prouver que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.
En utilisant la première forme du théorème d'Al Kashi, en déduire que $AC^2+BD^2=2\left(AB^2+AD^2\right)$.

2.2.2 Déterminant

Nous avons vu précédemment un critère permettant de déterminer si deux vecteurs forment une famille libre.
Il s'agit du « produit en croix » déjà étudié au collège pour repérer des situations de proportionnalité.
La notion de déterminant précise ce critère et lui donne d'autres applications pratiques.

Définition : Déterminant de deux vecteurs du plan
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan orienté.
On définit le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $[\vec{u};\ \vec{v}]$ par :
- $[\vec{u};\ \vec{v}]=0$ *lorsque* $\vec{u}=0$ *ou* $\vec{v}=0$ *;*
- $[\vec{u};\ \vec{v}]=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\sin(\vec{u};\ \vec{v})$ *dans les autres cas.*

Proposition : Le déterminant est antisymétrique

Mêmes hypothèses :

$$[\vec{u};\ \vec{v}] = -[\vec{v};\ \vec{u}]$$

Cela se prouve directement, à partir de la définition.

Proposition : Déterminant et famille

Mêmes hypothèses :

$$[\vec{u};\ \vec{v}] = 0 \iff \{\vec{u};\ \vec{v}\}\ \text{est une famille liée}$$

De plus, on a l'implication

$$(\vec{u};\ \vec{v})\ \text{est une base orthonormée directe} \Longrightarrow [\vec{u};\ \vec{v}] = 1$$

Proposition : Interprétation géométrique du déterminant

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tous les deux non nuls. Soit $OUO'V$ un parallélogramme tel que

- *O est un point quelconque*
- *U est tel que $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$*
- *V est tel que $\overrightarrow{OV} = \vec{v}$*

Alors $[\vec{u};\ \vec{v}]$ correspond à l'aire du parallélogramme $OUO'V$ affecté d'un signe + si la mesure principale de $(\vec{u};\ \vec{v})$ est dans $[0;\ \pi]$ et d'un signe - dans les autres cas.
On dit aussi que $OuO'V$ est un parallélogramme délimité par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Proposition : Lien entre déterminant et produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} \neq 0$. Soit $\vec{u'}$ le vecteur de même norme que $\vec{u}$ tel que $\left(\vec{u};\ \vec{u'}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Alors $[\vec{u};\ \vec{v}] = \vec{v} \cdot \vec{u'}$.

Démonstration. Dans le cas où $\vec{v}$ est nul, cette égalité est vraie.
Dans le cas contraire, on vérifie facilement que $\left(\vec{v};\ \vec{u'}\right) = -(\vec{u};\ v) + \dfrac{\pi}{2}$ et on a ainsi $\cos\left(\vec{v};\ \vec{u'}\right) = \sin(\vec{u};\ \vec{v})$.
On obtient donc $\vec{v} \cdot \vec{u'} = \|v\| \times \|u'\| \times \cos\left(\vec{v};\ \vec{u'}\right) = \|u\| \times \|v\| \times \sin(\vec{u};\ \vec{v}) = [\vec{u};\ \vec{v}]$. □

L'une des conséquences de cette formule est que le déterminant est linéaire par rapport à la seconde variable. La linéarité par rapport à la première variable se prouve en utilisant l'antisymétrie. On dit alors que le déterminant est bilinéaire.

Proposition : Le déterminant est bilinéaire

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. Soit λ un réel.

$$[\vec{u} + \lambda\vec{w};\ \vec{v}] = [\vec{u};\ \vec{v}] + \lambda[\vec{w};\ \vec{v}]$$
$$[\vec{u};\ \vec{v} + \lambda\vec{w}] = [\vec{u};\ \vec{v}] + \lambda[\vec{u};\ \vec{w}]$$

Proposition : Calcul du déterminant à partir des coordonnées

On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe.
Alors

$$[\vec{u};\ \vec{v}] = xy' - yx'$$

On note

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

Exercice 5

Proposition : Formule du changement de base pour le déterminant

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{e}_1;\ \vec{e}_2)$.
Alors

$$[\vec{u};\ \vec{v}] = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \times [\vec{e}_1;\ \vec{e}_2]$$

Exercice 6

Prouver cette formule et utilisant les égalités $\begin{cases} \vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \\ \vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 \end{cases}$, l'antisymétrie, et la bilinéarité du déterminant.

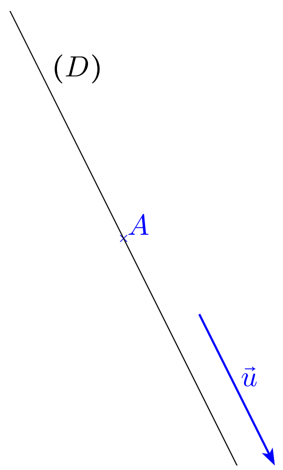
Exercice 7

On se place toujours dans un repère orthonormé.
Soient les points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Déterminer l'aire du triangle ABC.

2.3 Droites et cercles

2.3.1 Deux équations de droites

2.3.1.1 À partir de la colinéarité



Soit un vecteur $\vec{u}$ non nul et un point A. Alors, l'ensemble des points M tels que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires forment une droite. On dira que $\vec{u}$ est un *vecteur directeur* de cette droite.
Partant de cette propriété, il est possible de définir de deux manières l'équation de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Notons (D) cette droite. On pose $\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{u}$ et $\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ les coordonnées de A et on considère un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan. Avant d'aller plus loin, calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_a \\ y-y_a \end{pmatrix}$ car nous en aurons besoin.

(Équation paramétrique) M appartient à (D) si et seulement si il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$. Cela se traduit en coordonnées par :

$$\begin{cases} x - x_a &= \lambda x_u \\ y - y_a &= \lambda y_u \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x_a + \lambda x_u \\ y &= y_a + \lambda y_u \end{cases}$$

On dit que le système précédent est une *équation paramétrique* de la droite (D), le paramètre étant ici λ.

(Équation cartésienne) On peut également utiliser le critère de colinéarité pour déterminer une condition nécessaire et suffisante d'appartenance à D. Ainsi M appartient à (D) si et seulement si

$$x_u(y-y_a) = y_u(x-x_a) \iff y_u x - x_u y = y_u x_a - x_u y_a$$

On dit que l'équation précédente est une *équation cartésienne* de la droite (D).

Réciproquement, on peut par lecture d'une équation cartésienne ou paramétrique déterminer les coordonnées de $\vec{e}$ et, dans le cas paramétrique, de A en s'inspirant de ce qui vient juste d'être fait.

Ainsi, lorsqu'une équation cartésienne d'une droite s'écrit $ax + by = c$, le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

Entraînons-nous à manipuler ces équations.

✎ *Exercice 8*

On munit le plan d'un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
Soit (D) *la droite définie par :*
$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D) \iff$ *il existe* $t \in \mathbb{R}/ \begin{cases} x &= 3+3t \\ y &= -1+2t \end{cases}$

1. *Montrer que cette équivalence peut se réécrire :*
   $M \in (D) \iff$ *il existe* $t \in \mathbb{R}/\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. *On précisera les coordonnées de* A *et* $\vec{u}$.
2. *Tracer la droite* (D) *sur votre feuille.*
3. *Déterminer également une équation cartésienne de* (D).

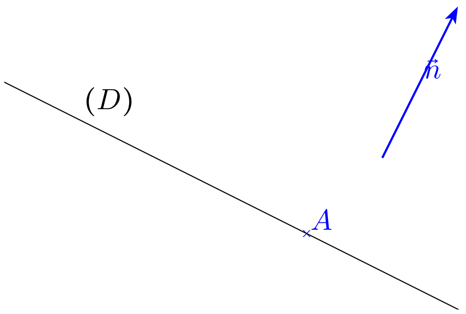
✎ *Exercice 9*

On munit le plan d'un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
Soit (D) *la droite définie par :*
$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D) \iff 2x + 3y = 4$

1. *Déterminer un vecteur directeur de* (D) *ainsi qu'un point de* (D).
2. *Tracer la droite* (D) *sur votre feuille.*
3. *Déterminer également une équation paramétrique de* (D).

> ⚠ Pour une droite donnée, il existe une infinité d'équations paramétriques possibles car il existe une infinité de choix pour le point et le vecteur directeur.

2.3.1.2 À partir de l'orthogonalité



Soit un vecteur $\vec{n}$ non nul et un point A. Alors, l'ensemble des points M tels que $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux forment une droite. On dira que $\vec{n}$ est un *vecteur normal* de cette droite.

Connaissant les coordonnées de $A\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ et du vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, il est très facile de déterminer une équation cartésienne d'une telle droite (D) en utilisant le critère d'orthogonalité sur les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$. En effet, on alors $x_n(x - x_a) + y_n(y - y_a) = 0$, ce que l'on peut éventuellement réécrire $x_n x + y_n y = x_n x_a + y_n y_a$.

De la même manière que pour le vecteur directeur, on peut déduire d'une équation cartésienne les coordonnées d'un vecteur normal.
Ainsi, lorsqu'une équation cartésienne d'une droite s'écrit $ax + by = c$, le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

Entraînez-vous à résoudre les exercices suivants :

✎ *Exercice 10*

Soient la droite (D) définie par l'équation cartésienne $2x + 3y = 5$ et la droite (D') définie par l'équation réduite $y = \frac{3}{2}x$.

1. *Déterminer un vecteur normal de (D) et un vecteur normal de (D').*
2. *En déduire que (D) et (D') sont perpendiculaires.*

✎ *Exercice 11*

On munit le plan d'un repère orthonormé.
Soient les points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. *Faire un dessin.*
2. *Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de A.*
3. *Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[BC]$.*
4. *Déterminer une équation paramétrique de la médiane issue de A.*

Pour finir, on dispose du petit résultat pour caractériser les positions relatives de droites.

Proposition : Positions relatives de droites

Deux droites sont parallèles lorsque l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiée :
- *leurs vecteurs directeurs sont colinéaires ;*
- *leurs vecteurs normaux sont colinéaires ;*
- *le vecteur normal de l'une est orthogonal au vecteur directeur de l'autre.*

Deux droites sont perpendiculaires lorsque l'une des propositions équivalentes suivantes est vérifiée :
- *leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux ;*
- *leurs vecteurs normaux sont orthogonaux ;*
- *le vecteur normal de l'une est colinéaire au vecteur directeur de l'autre.*

2.3.2 Changement de repère

Plutôt que d'écrire une théorie fastidieuse au sujet des changements de repère, on va établir une méthode à travers la résolution d'un exercice.

✎ ***Exercice 12***

On considère un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ *quelconque.*

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Soit le point $A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

1. *Prouver que* $(\vec{u};\ \vec{v})$ *forme une base.*

   Soit un point M *dont les coordonnées sont* $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *dans le repère* $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ *et* $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *dans le repère* $(A;\ \vec{u};\ \vec{v})$.

   L'objectif de l'exercice est de déterminer permettant de passer des coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *aux coordonnées* $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *et réciproquement.*
2. (a) *Déterminer les coordonnées du vecteur* $\vec{A}M$ *dans la base* $(\imath;\ \vec{\jmath})$ *en fonction de* x *et* y.
   (b) *Déterminer les coordonnées des vecteurs* $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$ *dans la base* $(\vec{u};\ \vec{v})$.
   (c) *En déduire la relation donnant* x' *et* y' *en fonction de* x *et* y.
3. (a) *Déterminer les coordonnées du vecteur* $\vec{O}M$ *en fonction de* x' *et* y' *dans la base* $(\vec{u};\ \vec{v})$.
   (b) *En déduire la relation donnant* x *et* y *en fonction de* x' *et* y'.

Un second exercice pour s'exercer à cette problématique de changement de base.

✎ ***Exercice 13***

On considère un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ *quelconque.*

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.

Soit le point $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

1. *Prouver que* $(\vec{u};\ \vec{v})$ *forme une base.*
2. *Soit un point* M *dont les coordonnées sont* $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ *dans le repère* $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ *et* $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *dans le repère* $(A;\ \vec{u};\ \vec{v})$.
3. *Déterminer la relation permettant d'obtenir* x *et* y *connaissant* x' *et* y'.
4. *De même, déterminer la relation permettant d'obtenir* x' *et* y' *connaissant* x *et* y.

2.3.3 Deux équations de cercle

Dans toute la suite on munit le plan d'un repère *orthonormé* $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
On rappelle alors la définition du cercle étudiée au collège.

Définition : Cercle

Soit C un point et $r > 0$ un nombre.
Le cercle Ω de centre C et de rayon r est l'ensemble des points M situés à une distance r de C.
Dit autrement :

$$M \in \Omega \iff CM = r$$

2.3.3.1 Équation cartésienne

Proposition : Équation cartésienne du cercle

Soit $C\begin{pmatrix}x_c\\y_c\end{pmatrix}$ un point et $r > 0$ un nombre.

Alors un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ appartient au cercle de centre C et de rayon r si et seulement si

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

La réciproque est vraie, c'est à dire qu'un ensemble de points définis par une telle équation cartésienne forme un cercle.

Démonstration. C'est la traduction de la définition du cercle en utilisant la formule de la distance. □

✎ ***Exercice 14***

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
Soit l'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 + x - 4y + \frac{1}{4} = 0$$

Montrer qu'il s'agit de l'équation d'un cercle dont on déterminera les coordonnées du centre et le rayon.
Soit le point $A\begin{pmatrix}-1/2\\2\end{pmatrix}$.
Quelle serait l'équation de ce cercle dans le repère $(A; \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$?

✎ ***Exercice 15***

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
On considère l'ensemble des points M dont les coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ vérifient l'équation cartésienne

$$2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + \frac{25}{2} = 0$$

On pose $\vec{u} = \frac{3\vec{\imath}}{2}$, $\vec{v} = \frac{3\vec{\jmath}}{2}$ et $A\begin{pmatrix}3/2\\-5/2\end{pmatrix}$.
Déterminer l'équation vérifiée par ces mêmes points dans le repère $(A;\ \vec{u};\ \vec{v})$
Finalement, quel lieu décrivent les points M ?

2.3.3.2 Équation paramétrique

Proposition : Équation paramétrique du cercle

Même hypothèses que précédemment.

Un point M appartient au cercle de centre C et de rayon r si et seulement si il existe un angle θ tel que

$$\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Ce qui s'écrit de manière équivalente :

$$M \begin{pmatrix} x_c + r\cos(\theta) \\ y_c + r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

On dit que $\begin{cases} x = x_c + r\cos(\theta) \\ y = y_c + r\sin(\theta) \end{cases}$ $\quad t \in]-\pi;\ \pi]$ *est une équation paramétrique du cercle.*

La réciproque est vraie, c'est à dire qu'un ensemble de points définis par une telle équation paramétrique forme un cercle.

✎ ***Exercice 16***

On munit le plan d'un repère orthonormé.

On considère l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dont les coordonnées vérifient

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y = 0$$

Montrer que cet ensemble forme un cercle dont on précisera le centre, le rayon, ainsi qu'une équation paramétrique.

2.4 Transformations géométriques

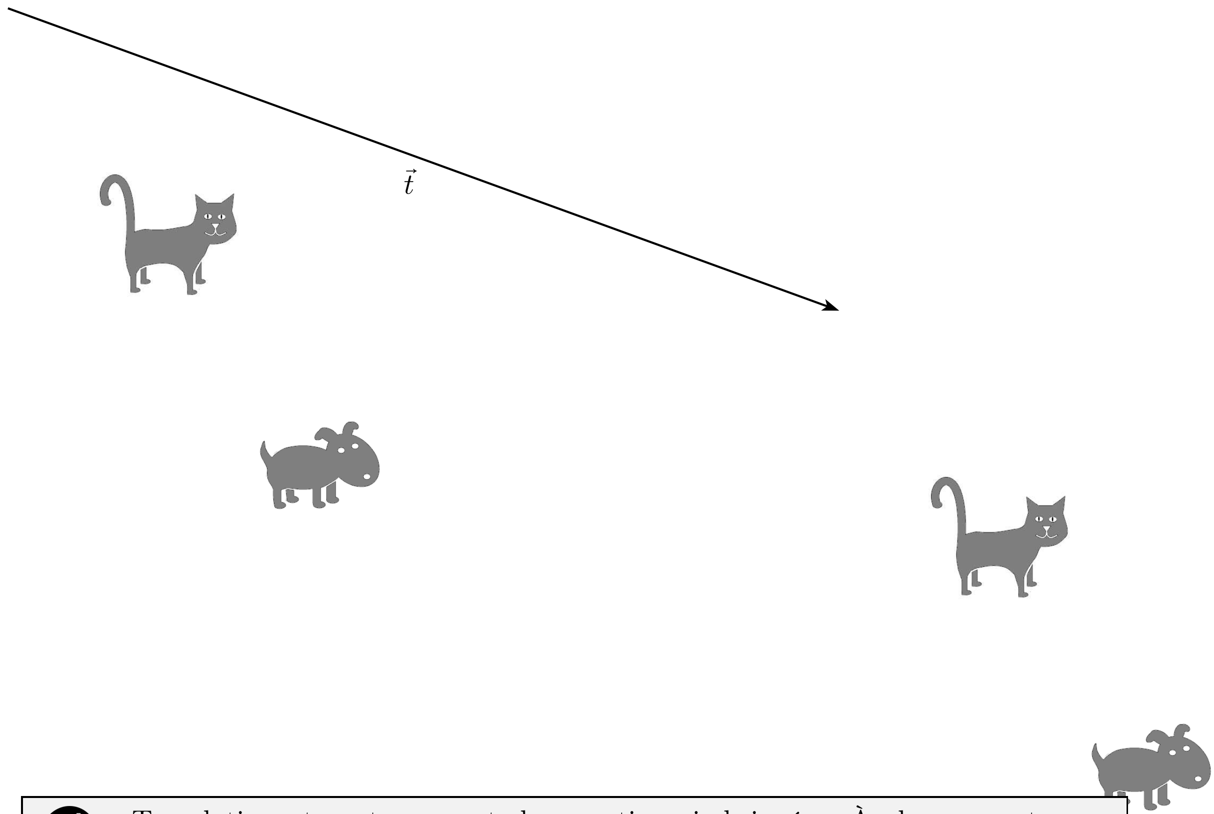
2.4.1 Translations, homothéties

2.4.1.1 Translation

Une translation est une manière de transformer les objets dans le plan sans modifier leur orientation ni leur dimension.

Définition : Translation

Soit $\vec{t}$ une vecteur.
La translation de vecteur $\vec{t}$ est une application géométrique qui à chaque point M associe un point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{t}$.



Translation et vecteurs sont deux notions imbriquées. À chaque vecteur sa translation et réciproquement.
En fait, au lycée, on a même défini les vecteurs à partir de la translation, elle même définie grâce au parallélogramme.

Proposition : Caractérisation de la translation

On considère une application géométrique du plan f.
Alors f est une translation si et seulement pour tous points A et B du plan $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{AB}$.

Démonstration. On montre, grâce à la relation de Chasles l'équivalence :

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{Bf(B)}$$

□

Proposition : Image d'une droite, d'un cercle par une translation

Soit une droite D définie par un point A et un vecteur directeur (resp. normal) $\vec{d}$ (resp. $\vec{n}$).
Alors l'image de la droite D par une translation de vecteur $\vec{t}$ est une droite D' de même vecteur directeur $\vec{d}$ (resp. vecteur normal $\vec{n}$) et passant par le point A' image de A par cette translation.

Soit un cercle Γ défini par son centre O et son rayon R.
Alors l'image du cercle Γ par une translation de vecteur $\vec{t}$ est un cercle de même rayon et de centre O' l'image de O par cette translation.

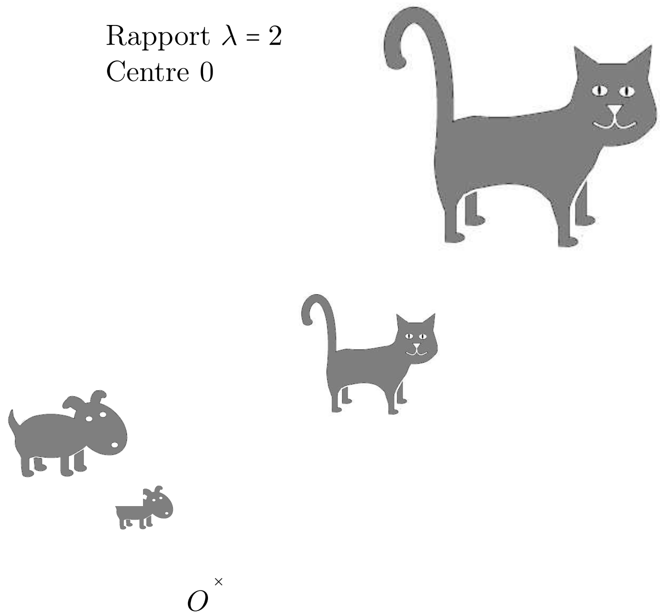
Proposition : Application réciproque d'une translation

Soit $\vec{t}$ un vecteur.
Alors la translation de vecteur $\vec{t}$ admet une réciproque qui est la translation de vecteur $-\vec{t}$.

2.4.1.2 Homothétie

L'homothétie est l'application géométrique associée au théorème de Thalès. Au collège, vous l'avez évoquée sous le nom de dilatation ou réduction.

Définition : Homothétie
Soient O un point et λ un nombre.
L'homothétie de centre O et de rapport λ est une application géométrique qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$.



Proposition : Image de deux points par une homothétie
Soient O un point et λ un nombre et soit f l'homothétie de rapport λ et de centre O.
Alors, pour tous points A et B, $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Cette proposition a deux conséquences. D'une part, l'homothétie conserve les directions.
D'autre part, l'homothétie dilate ou contracte les longueurs.

Proposition : Image d'une droite, d'un cercle par une homothétie
Soit une droite D définie par un point A et un vecteur directeur (resp. normal) $\vec{d}$ (resp. $\vec{n}$).
Alors l'image de la droite D par une homothétie de centre A et de rapport $\lambda \neq 0$ est une droite D' de même vecteur directeur $\vec{d}$ (resp. vecteur normal $\vec{n}$) et passant par le point A' image de A par cette homothétie.

Soit un cercle Γ défini par son centre O et son rayon R.
Alors l'image du cercle Γ par une homothétie de centre A et de rapport $\lambda \neq 0$ est un cercle de rayon $|\lambda| R$ et de centre O' l'image de O par cette homothétie.

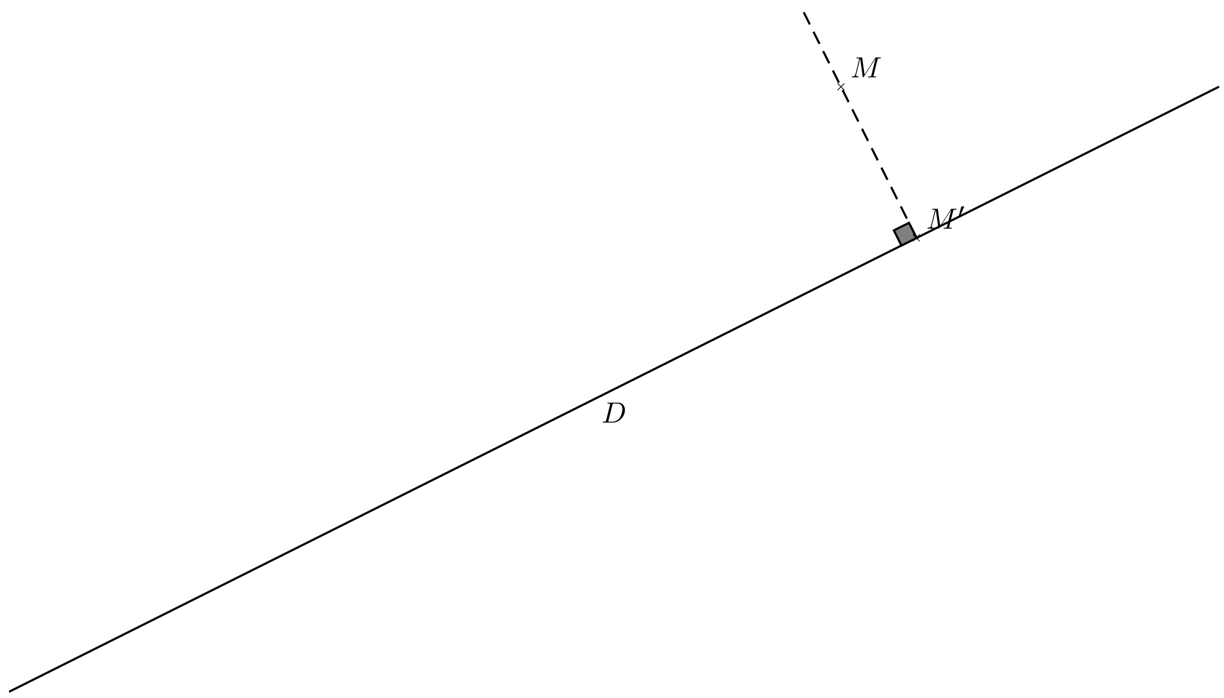
Proposition : Application réciproque d'une homothétie

Soient O un point et $\lambda \neq 0$ un nombre.
Alors l'homothétie de centre O et de rapport λ admet une réciproque qui est l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$.

2.4.2 Projections orthogonales

Définition : Projection orthogonale d'un point sur une droite

Soit D une droite. Alors la projection orthogonale sur la droite D est une application géométrique qui a tout point M associe le point M' de D tel que $\overrightarrow{MM'}$ et D soient orthogonaux.
On dit alors que M' est le projeté orthogonal de M sur D.



Proposition : Projection orthogonale et distance

Soient D une droite et M un point.
Alors le projeté orthogonal M' de M sur la droite D est le point de la droite D le plus proche de M.
On dit que MM' est la distance de M à D.

✎ ***Exercice 17***

On considère la droite D d'équation cartésienne $2x + 3y = 5$.

Soit d'autre part le point A de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Déterminer la distance du point A à la droite D.

2.4.3 Rotations, symétries

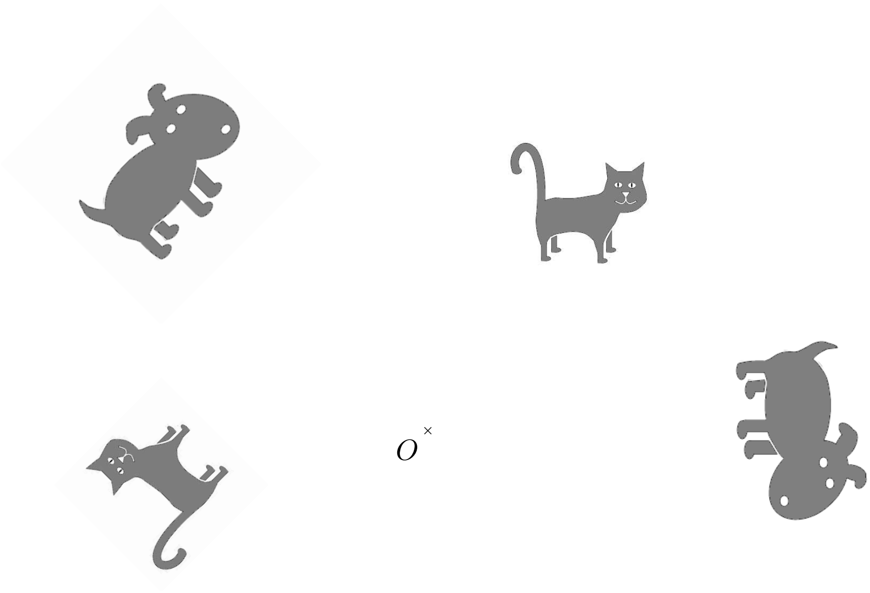
2.4.3.1 Rotation

Définition : Rotation

Soit O un point et θ un angle.
La rotation de centre O et d'angle θ a l'application géométrique qui à tout point M associe le point M' tel que

- $OM = OM'$;
- $\left(\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{OM'}\right) = \theta$ *(dans le cas où $M \neq O$).*

Angle $\frac{3\pi}{4}$
Centre 0



✎ *Exercice 18*

On se place dans le repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$. Soit le point $A\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et le point $M\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$.
Déterminer les coordonnées de l'image M' de M par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
On pourra commencer par déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM'}$ dans une base orthonormé directe dont le premier vecteur est $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM}$

2.4.3.2 Réflexion

Définition : Réflexion par rapport à une droite

Soit D une droite du plan.
La réflexion par rapport à la droite D est l'application géométrique qui à un point M associe
- *M si $M \in D$*
- *le point M' tel que D est la médiatrice de $[MM']$ dans le cas contraire.*

✎ ***Exercice 19***

Soit la droite D d'équation cartésienne $x - 5y = 2$ dans un repère orthonormé.
Soit le point A de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. On souhaite déterminer les coordonnées du point A' image de A par la réflexion par rapport à la droite D.

1. *Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur D noté H.*
2. *Pourquoi a-t-on $\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{AH}$?*
3. *En déduire les coordonnées de A'.*

Proposition : Réciproque d'une réflexion

Soit D une droite.
Alors la réflexion par rapport à D admet une réciproque : elle-même.

Chapitre 3

Étude de fonctions

« Ô mathématiques sévères, je ne vous ai pas oubliées, depuis que vos vivantes leçons, plus douces que le miel, filtrèrent dans mon cœur, comme une onde rafraîchissante. J'aspirais instinctivement, dès le berceau, à boire à votre source, plus ancienne que le soleil, et je continue encore de fouler le parvis sacré de votre temple solennel, moi, le plus fidèle de vos initiés. Il y avait du vague dans mon esprit, un je ne sais quoi épais comme de la fumée ; mais, je sus franchir religieusement les degrés qui mènent à votre autel, et vous avez chassé ce voile obscur, comme le vent chasse le damier. Vous avez mis, à la place, une froideur excessive, une prudence consommée et une logique implacable. A l'aide de votre lait fortifiant, mon intelligence s'est rapidement développée, et a pris des proportions immenses, au milieu de cette clarté ravissante dont vous faites présent, avec prodigalité, à ceux qui vous aiment d'un sincère amour.»

LAUTRÉAMONT, Les chants de Maldoror, II.10

Ce cours introduit des outils pour les études de fonctions.
Il fera référence aux notions d'injection, de surjection, de bijection introduites au premier chapitre. On exploitera également les transformations géométriques du plan introduites au chapitre précédent.

3.1 Représentation graphique, variations et limites

3.1.1 Variations

Définition : Fonction croissante, strictement croissante, décroissante, strictement décroissante sur un intervalle

Soit une fonction f et soit I un intervalle inclus dans le domaine de définition de f.
On dit que f est croissante *sur I lorsque* $\forall u, v \in I, u \leq v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$.
On dit que f est strictement croissante *sur I lorsque*
$\forall u, v \in I, u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$.
On dit que f est décroissante *sur I lorsque* $\forall u, v \in I, u \leq v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$.
On dit que f est strictement décroissante *sur I lorsque*
$\forall u, v \in I, u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$.
On dit que f est (strictement) monotone lorsque f est (strictement) croissante ou bien (strictement) décroissante.

Les exercices suivants permettent de manipuler ces notions et de rappeler quelques résultats.

Exercice 0

Prouver, en se ramenant aux définitions, qu'une fonction affine de coefficient directeur strictement négatif est strictement décroissante.

Exercice 1

Prouver, en se ramenant aux définitions, que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Exercice 2

Prouver qu'une fonction strictement monotone est injective. On pourra se limiter au cas strictement croissant.

Exercice 3

Prouver que si f *est strictement croissante sur un intervalle* I *si et seulement si pour tout* a *et* b *de* I*, on a*

$$a < b \iff f(a) < f(b)$$

Indication: On pourra raisonner par contraposée sur l'une des implications.

Exercice 4

Prouver qu'une fonction f *est strictement décroissante si et seulement si* $-f$ *est strictement croissante.*

Définition : Majorant, minorant, maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle

Soit une fonction f *et soit* I *un intervalle inclus dans l'ensemble* D_f *de définition de* f. M *et* N *désignent deux nombres. Enfin,* x_0 *est un nombre de* D_f.
On dit que M *est un majorant de* f *sur* I *lorsque* $\forall\, x \in I,\ f(x) \leq M$.
On dit que N *est un minorant de* f *sur* I *lorsque* $\forall\, x \in I,\ f(x) \geq N$.
On dit que f *est bornée sur* I *lorsque* f *admet à la fois un majorant et un minorant.*
On dit que f *admet un maximum en* x_0 *lorsque* $\forall\, x \in D_f,\ f(x) \leq f(x_0)$.
On dit que f *admet un minimum en* x_0 *lorsque* $\forall\, x \in D_f,\ f(x) \geq f(x_0)$.

Exercice 5

Pour chacune des fonctions suivantes définies sur l'intervalle I*, préciser et justifier l'existence éventuelle d'un majorant, d'un minorant, d'un maximum, d'un minimum.*
On pourra facultativement justifier également l'absence de majorant, de minorant, de maximum, de minimum.

a) $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $I =]0;+\infty[$
b) $f_2 : x \mapsto -x^2 + 3x - 5$, $I = \mathbb{R}$
c) $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $I = \mathbb{R}$
d) $f_4 : x \mapsto -|2x-4| + 5$, $I = \mathbb{R}$

Proposition : Caractérisation d'une fonction bornée.

Une fonction est bornée sur I *lorsque* $|f|$ *est majorée.*

Exercice 6

Prouver cette proposition.

3.1.2 Limites

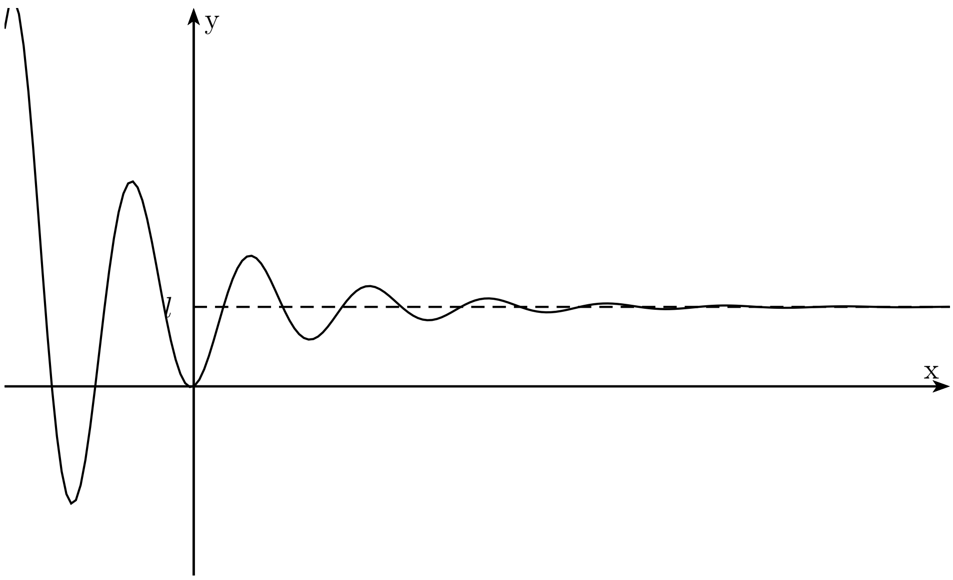
3.1.2.1 Définitions intuitives

> ⚠ À ce stade, on ne définira pas les limites à l'aide de quantificateurs. On exploitera seulement une idée intuitive de de la limite.

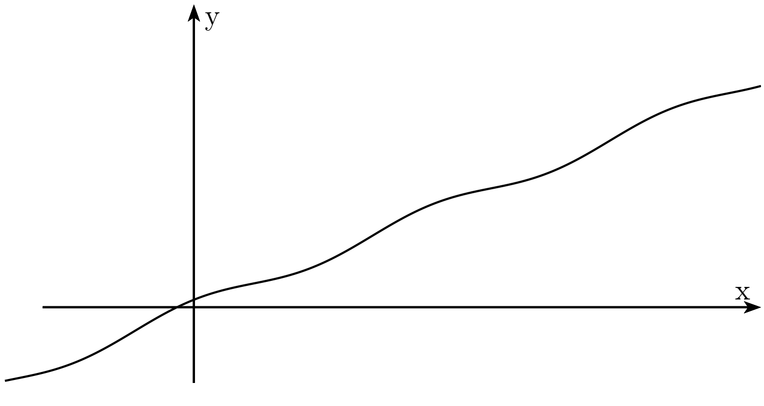
α et β désignent $+\infty$, $-\infty$ ou bien un nombre.
On dit que la fonction f a pour limite β en α lorsque $f(x)$ se rapproche de β pour x se rapprochant de α.
On dit aussi que $f(x)$ tend vers β lorsque x tend vers α.
On pourra noter ainsi cette limite :

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta \qquad \lim_{\alpha} f = \beta \qquad f(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} \beta$$

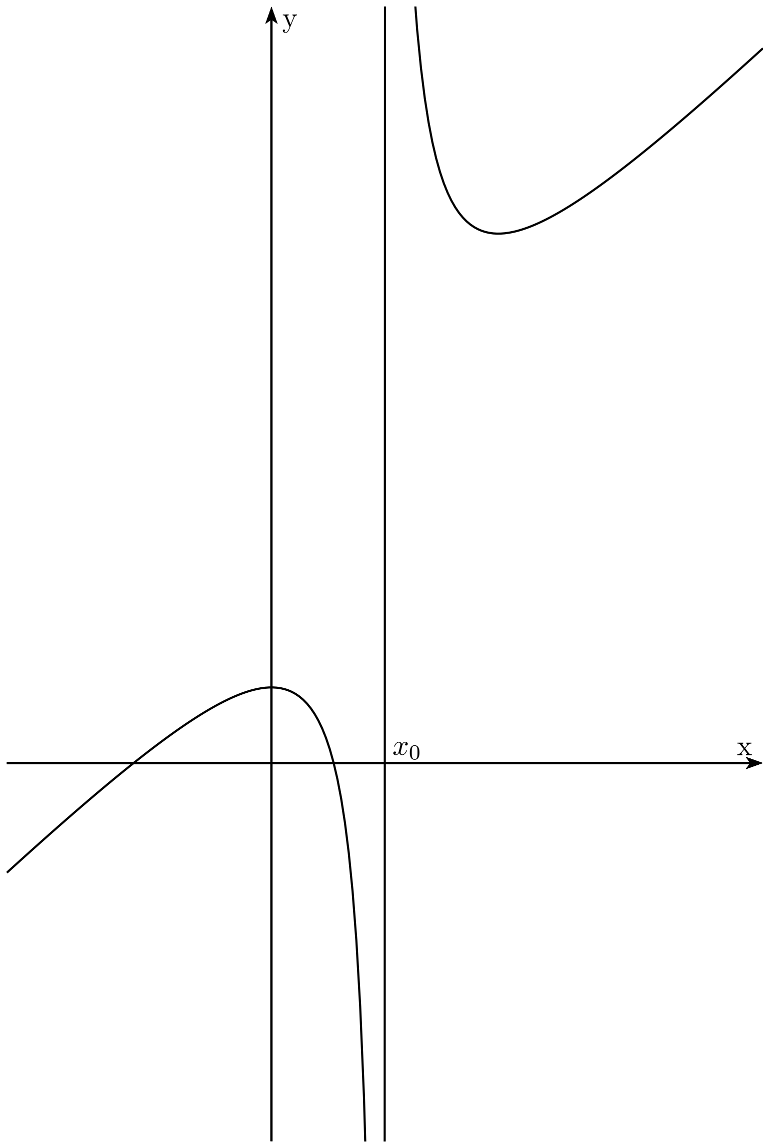
Par exemple, dire que f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ signifie que les valeurs de $f(x)$ deviennent infiniment grandes lorsque les valeurs de x deviennent infiniment petites. Graphiquement, avec les orientations habituelles pour les repères, cela signifie que la courbe de f « monte » infiniment à mesure que l'on se déplace « vers la gauche. »
Dans le cas d'une limite de $f(x)$ quand x tend vers un nombre, on précise souvent si l'on s'approche de ce nombre par valeur supérieure ou inférieure. Dans ce cas, on écrit a^+ ou a^-
Ainsi, quand on écrit $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ signifie que $f(x)$ s'approche de l'infini quand x s'approche de -1 par valeurs supérieures (on dit aussi par la droite). On pourra également écrire $f(x) \underset{\substack{> \\ x\to -1}}{\longrightarrow} +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}} f(x) = +\infty$.
Lorsque la limite est nulle, on précise lorsque c'est possible si la fonction tend vers 0 par valeurs strictement positives ou strictement négatives. Dans ce cas, on utilise la notation 0^+ et 0^- pour désigner la limite.
Graphiquement, voilà à quoi ressemble une fonction ayant une limite finie l en $+\infty$.



On illustre le cas d'une fonction tendant vers $+\infty$ en $+\infty$.



Voici la représentation d'une fonction qui tend vers $+\infty$ à droite de x_0 et vers $-\infty$ à gauche de x_0.



3.1.2.2 Opérations sur les limites

Les résultats suivants vont permettre de déterminer des limites de fonctions composées à partir de fonctions élémentaires dont on sait déterminer aisément la limite.

Proposition : Limite d'une somme de deux fonctions.

Soient f et g deux fonctions. Soient l et m deux nombres réels.
Le tableau suivant donne la limite de la fonction $f+g$ connaissant les limites de f et g en un nombre, la gauche ou la droite d'un nombre, $-\infty$ ou bien $+\infty$.

g tend vers / *f tend vers*	m	$-\infty$	$+\infty$
l	$l+m$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	*Indéterminé.*
$+\infty$	$+\infty$	*Indéterminé.*	$+\infty$

Proposition : Limite d'un produit de deux fonctions.

Soient f et g deux fonctions. Soient l et m deux nombres réels non nuls.
Le tableau suivant donne la limite de la fonction $f \times g$ connaissant les limites de f et g en un nombre, la gauche ou la droite d'un nombre, $-\infty$ ou bien $+\infty$.

$\lim f$ \ $\lim g$	0	m	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	*Indéterminé.*	*Indéterminé.*
l	0	lm	$\begin{cases} -\infty & si\ l > 0 \\ +\infty & si\ l < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} +\infty & si\ l > 0 \\ -\infty & si\ l < 0 \end{cases}$
$-\infty$	*Indéterminé.*	$\begin{cases} -\infty & si\ m > 0 \\ +\infty & si\ m < 0 \end{cases}$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	*Indéterminé.*	$\begin{cases} +\infty & si\ m > 0 \\ -\infty & si\ m < 0 \end{cases}$	$-\infty$	$+\infty$

Proposition : Limite de l'inverse d'une fonction.

Soit f une fonction. Soit l un nombre réel non nul.
Le tableau suivant donne la limite de la fonction $\frac{1}{f}$ connaissant la limite de f en un nombre, la gauche ou la droite d'un nombre, $-\infty$ ou bien $+\infty$, à condition que f ne s'annule pas sur un voisinage du lieu considéré.

$f(x)$ *tend vers*	$\dfrac{1}{f(x)}$ *tend vers*
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$
0	*indéterminé*
l	$\dfrac{1}{l}$
$-\infty$	0^-
$+\infty$	0^+

✎ ***Exercice 7***

Soit x_0 un réel. Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \to x_0} x^2$

b) $\lim_{x \to x_0} -2x$

c) $\lim_{x \to +\infty} -2x$

d) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$

e) $\lim_{x \to +\infty} 4 + \dfrac{1}{x^2}$

f) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x}{1 + \frac{1}{x}}$

g) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 2}{x^3 + x}$

On pourra retenir les règles d'opération suivantes pour les limites en supposant que l est un nombre non nul.

$l + 0 = l$
$l + (+\infty) = +\infty$
$l + (-\infty) = -\infty$
$0 + (+\infty) = +\infty$
$0 + (-\infty) = -\infty$
$(+\infty) + (-\infty) =$ Indéterminé.
$l \times (+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ si l>0} \\ -\infty \text{ si l<0} \end{cases}$
$l \times (-\infty) = \begin{cases} -\infty \text{ si l>0} \\ +\infty \text{ si l<0} \end{cases}$
$l \times 0 = 0$
$0 \times (+\infty) =$ Indéterminé.

$0 \times (-\infty) =$ Indéterminé.
$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
$(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$
$(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
$\dfrac{1}{+\infty} = 0^+$
$\dfrac{1}{-\infty} = 0^-$
$\dfrac{1}{0^+} = +\infty$
$\dfrac{1}{0^-} = -\infty$
$\dfrac{1}{0} =$ Indéterminé.

On peut composer des limites comme l'expose le résultat suivant.

Proposition : Limite et composition de fonctions
Soient f et g deux fonctions. α, β et γ désignent chacun un nombre, la gauche ou la droite d'un nombre, $-\infty$ ou bien $+\infty$.
On suppose que g est définie sur un voisinage de α, que f est définie sur un voisinage de β.
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \beta$ et $\lim\limits_{x\to\beta} f(x) = \gamma$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(g(x)) = \gamma$.

3.1.2.3 Encadrement de limites

Théorème : Convergence monotone
Soit une fonction f. On suppose qu'il existe un nombre α tel que $]\alpha; +\infty[$ est inclus dans l'ensemble de définition de f.
Si f est croissante et est majorée sur $]\alpha; +\infty[$ alors $f(x)$ possède une limite finie pour x tendant vers $+\infty$.

Théorème : Théorème des gendarmes
Soient f, g et h trois fonctions. Soit l un nombre. δ désigne soit un nombre, la gauche ou la droite d'un nombre, $-\infty$ ou bien $+\infty$.
On suppose qu'il existe un intervalle ouvert I inclus dans les trois domaines de définition de f, g et h, tel que I est un voisinage de δ et tel que
pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to\delta} f(x) = \lim\limits_{x\to\delta} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to\delta} g(x) = l$.

Théorème : Minoration par une fonction tendant vers $+\infty$
Soient f et g deux fonctions. δ désigne soit un nombre, la gauche ou la droite d'un nombre, $-\infty$ ou bien $+\infty$.
On suppose qu'il existe un intervalle ouvert I inclus dans les domaines de définition de f et g, tel que I est un voisinage de δ et tel que
pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to\delta} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\delta} g(x) = +\infty$.

(Remarque 0) Il existe une autre version de ce théorème avec $g(x)$ tendant vers $-\infty$.

✎ ***Exercice 8***

Soit la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x + 2\cos(x)$.

1. *Montrer que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.*
2. *La fonction f est-elle croissante ? Justifier.*

✎ ***Exercice 9***

Déterminer

$$\lim_{x\to 0^+} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

✎ ***Exercice 10***

Soit la fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

1. *Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.*
2. *La fonction f tend-elle vers $+\infty$ en $+\infty$? Justifier.*

⚠ Les deux exercices précédents fournissent des contre exemples à des idées reçues qu'ont parfois les étudiants concernant des éventuels liens logiques entre sens de variation et limite !

3.1.3 Continuité

Il existe de nombreuses manières de définir la continuité.
On gardera en tête l'interprétation graphique : « Une fonction est continue sur un intervalle I si on peut tracer sa courbe avec les abscisses parcourant l'intervalle I sans lever le crayon. »

3.1.3.1 Définition

Définition : Continuité d'une fonction en un nombre, sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. Soit $x_0 \in I$.
On dit que f est continue en x_0 lorsque
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
On dit que f est continue sur I lorsque, pour tout $x_0 \in I$, f est continue en x_0.

(Remarque 1) Dire qu'une fonction est continue, c'est dire que, pour tout a, $f(x)$ tend vers $f(a)$ pour x tendant vers a.

(Remarque 2) La plupart des fonctions vues jusqu'à présent sont continues.

On examine un exemple très simple de fonction non continue sur son ensemble de définition :

✎ ***Exercice 11***

Soit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. *Que vaut $f(0)$?*
2. *Montrer que $f(x)$ ne tend pas vers $f(0)$ pour x tendant vers 0. Conclure quant à la continuité de f en 0.*

3.1.3.2 Comment reconnaître une fonction continue

Définition : Continuité et opérations sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I.
Soit x_0 appartenant à I. Si f et g sont continues en x_0 alors $f+g$, fg sont également continues en x_0.
Si $f(x_0) \neq 0$ et si f est continue en x_0 alors $\frac{1}{f}$ est également continue en x_0.

Proposition : Continuité et composition de fonctions

Soient f et g deux fonctions et x_0 est un nombre.
On suppose que g est définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 et que f est définie sur un intervalle ouvert contenant $g(x_0)$.
Si f est continue en $g(x_0)$ et g est continue en x_0 alors $f \circ g$ est continue en x_0.

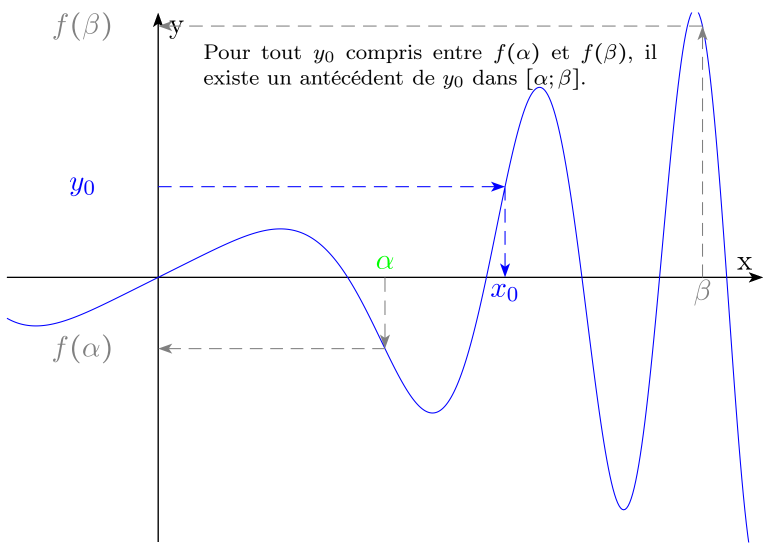
3.1.3.3 Théorème des valeurs intermédiaires

L'une des conséquences importantes de la continuité s'appelle le théorème des valeurs intermédiaires. Il peut se traduire par l'image suivante très simple : « Si l'on se déplace de Paris à Johannesburg sans utiliser de télé-transportation alors à un moment ou un autre on traverse l'équateur. »

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction. Soient α et β deux nombres tels que $\alpha < \beta$.
Si l'intervalle fermé $[\alpha;\beta]$ est inclus dans le domaine de définition et si f est continue alors, pour tout nombre y_0 compris entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$, il existe un nombre x_0 appartenant à $[\alpha;\beta]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

On illustre ce théorème.



Corollaire : Cas où f est continue et strictement monotone

Mêmes hypothèses que pour le théorème précédent.
Si on suppose de plus que f est strictement monotone, alors f établit une bijection de $[\alpha;\ \beta]$ sur $[f(\alpha);\ f(\beta)]$ ou $[f(\beta);\ f(\alpha)]$.

3.1.4 Dérivation

3.1.4.1 Définition et propriétés principales du nombre dérivé ainsi que de la fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. Soient a et b deux nombres distincts de I.
Le taux d'accroissement de f entre a et b est le nombre :

$$\boxed{\tau_f(a;b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Lorsqu'il existe, le nombre dérivé en a correspond à la limite de ce taux d'accroissement pour b se rapprochant de a :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{\substack{b \to a \\ b \neq a}} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Si on note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f, A et B les points d'abscisses respectives a et b, le taux d'accroissement de f entre a et b correspond au coefficient directeur de la droite (AB).
Lorsqu'il existe, le nombre dérivé de f en a correspond au coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a. Dans ce cas, l'équation réduite de cette droite s'écrit :

$$\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

D'autre part, on dira qu'une fonction f est dérivable sur l'intervalle I lorsque, pour tout x de I, $f'(x)$ existe.
On pourra alors définir la fonction dérivée de f, notée f', qui à tout x de I associe $f'(x)$.
Toujours sous cette hypothèse, le signe de la fonction f' sera lié au sens de variation de f par les équivalences :

$$\begin{aligned}
\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0 &\iff f \text{ est croissante sur } I.\\
\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0 &\iff f \text{ est décroissante sur } I.\\
\forall x \in I,\ f'(x) = 0 &\iff f \text{ est constante sur } I.
\end{aligned}$$

On dispose également d'un résultat dans le cas où la dérivée est de signe constant mais s'annule un nombre fini de fois.

- Si f' s'annule un nombre fini de fois et est strictement positive ailleurs alors f est strictement croissante.
- Si f' s'annule un nombre fini de fois et est strictement négative ailleurs alors f est strictement décroissante.

On dispose également de formules permettant de calculer la dérivée de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions.
Ainsi, dans les formules suivantes, u, v et w désignent trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I et dérivables en un nombre t de I. D'autre part, α désigne un nombre fixé et on supposera que $w(t) \neq 0$.
On a alors les égalités :

$$\begin{aligned}
(u + v)'(t) &= u'(t) + v'(t)\\
(\alpha u)'(t) &= \alpha u'(t)\\
(uv)'(t) &= u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\\
\left(\frac{1}{w}\right)'(t) &= \frac{-w'(t)}{w(t)^2}\\
\left(\frac{u}{w}\right)'(t) &= \frac{u'(t)w(t) - u(t)w'(t)}{w(t)^2}
\end{aligned}$$

3.1.4.2 Dérivée et continuité

Le théorème énoncé plus bas précise qu'une fonction dérivable en a est continue en a

Théorème : Continuité d'une fonction dérivable
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.
Si f est dérivable en un nombre a de I alors f est continue en a.
A fortiori, si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

3.2 Étude de fonctions

3.2.1 Parité

On définit deux nouvelles propriétés des fonctions : la parité et l'imparité.

Définition : Fonction paire, impaire
Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f possédant 0 comme centre de symétrie.
On dit que f est impaire lorsque pour tout x de D_f, $f(-x) = -f(x)$.
On dit que f est paire lorsque pour tout x de D_f, $f(-x) = f(x)$.

Comme l'explique la prochaine proposition, dire qu'une fonction est paire ou impaire entraîne que l'on peut se borner à l'étudier sur une « moitié » de son ensemble de définition. En effet, le comportement de la fonction sur son ensemble de définition se déduit par symétrie.

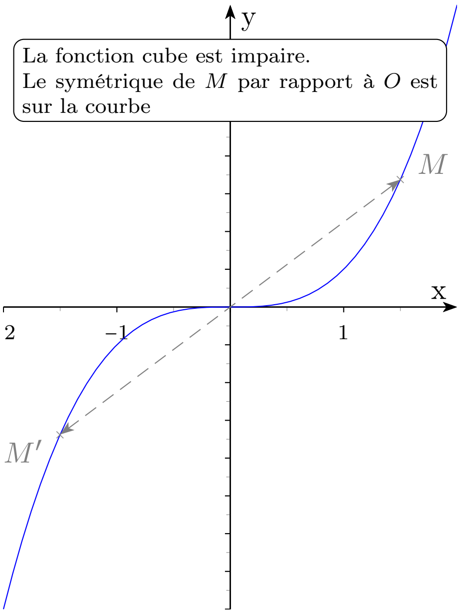
Proposition : Parité, imparité et symétrie
Soit f une fonction dont l'ensemble de définition D_f possède 0 comme centre de symétrie.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
f est impaire si et seulement si O est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}_f$.
f est paire si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour $\mathcal{C}_f$.

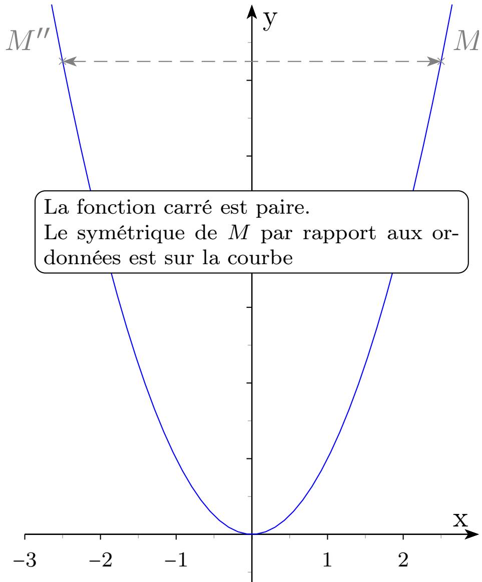
On prouve cette proposition sous forme d'exercice.

Exercice 12

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition D_f possède 0 comme centre de symétrie.
Soit x un nombre quelconque de D_f et soit M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x.

1. a) *Donner, en fonction de f et x, les coordonnées de M puis les coordonnées de M' le symétrique de M par rapport à O.*
   Indication: Faire un dessin
   b) *Donner, en fonction de f et x, les coordonnées de M'' le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.*
2. a) *À quelle condition nécessaire et suffisante le point M' appartient-il à $\mathcal{C}_f$?*
   b) *À quelle condition nécessaire et suffisante le point M'' appartient-il à $\mathcal{C}_f$?*





3.2.2 Périodicité

Si la notion de parité est reliée à l'idée géométrique de symétrie, la notion de périodicité traduit une invariance par translation le long de l'axe des abscisses. Voici sa définition

Définition : Fonction périodique, période

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f. Soit T un nombre réel strictement positif.
On dit que f est périodique de période T lorsque T est le plus petit nombre strictement positif tel que, pour tout x de D_f, $x+T$ appartient à D_f et $f(x+T)=f(x)$.

Comme annoncé, on traduit la périodicité par une propriété géométrique de la courbe.

Proposition : Périodicité et translation

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f et soit T un nombre strictement positif.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.
f est périodique de période T si et seulement si T est le plus petit nombre strictement positif tel que $\mathcal{C}_f$ est inchangée par translation de vecteur $T\vec{\imath}$.

Là encore un exercice va permettre de prouver cette proposition.

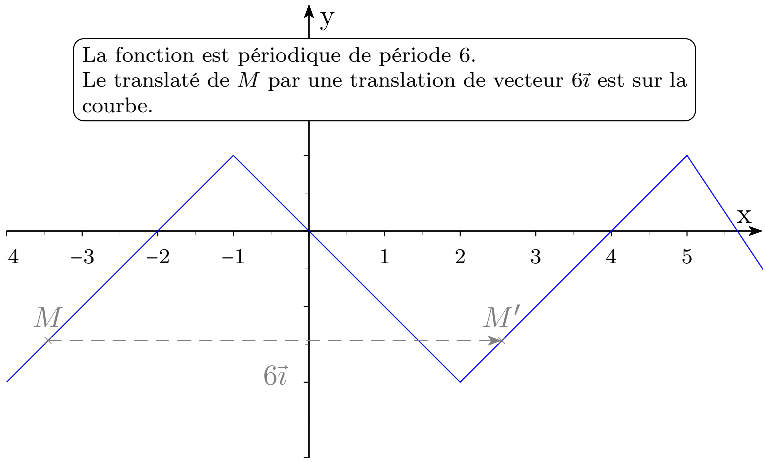
✎ ***Exercice 13***

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f et soit T un nombre strictement positif.
Soit x un nombre quelconque de D_f et soit M le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x.

1. *Donner, en fonction de f et x, les coordonnées de M puis les coordonnées de M' l'image de M par une translation de vecteur $T\vec{\imath}$.*

   Indication: Faire un dessin

2. *À quelle condition nécessaire et suffisante le point M' appartient-il à $\mathcal{C}_f$?*



3.2.3 Étude des propriétés graphiques

On a précédemment montré que la parité permet de déduire des propriétés de symétrie de la courbe. Ainsi, dans un repère orthogonal $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$:

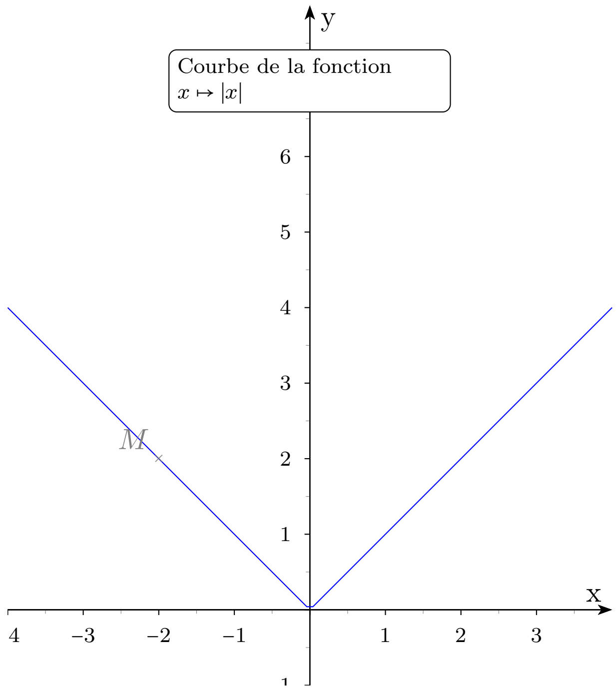
- la courbe d'une fonction paire est invariante par réflexion par rapport à l'axe des ordonnées ;
- la courbe d'une fonction impaire est invariante par symétrie par rapport à l'origine.

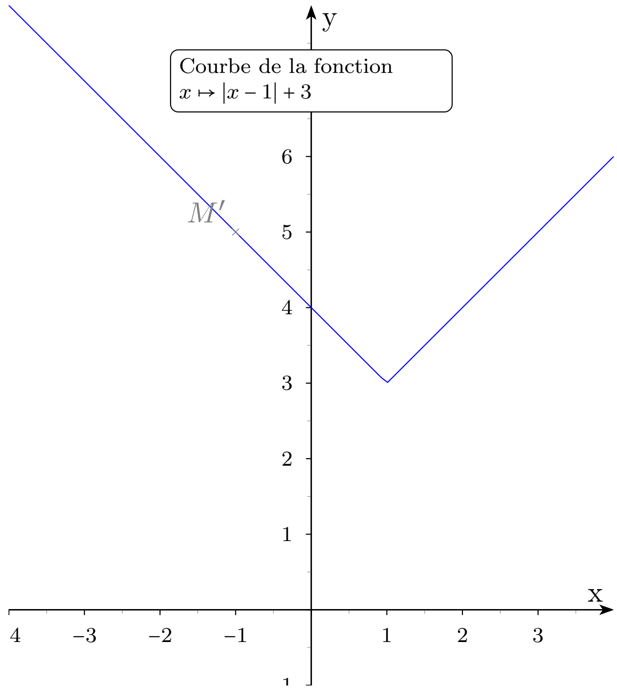
On a également établi que la périodicité de période T d'une fonction se traduit sur la courbe par une invariance par la translation de vecteur $T\vec{\imath}$.
Une fonction possédant de telles propriétés est plus simple à étudier.
Par exemple, on peut déduire les variations et les limites d'une fonction paire sur $\mathbb{R}$ tout entier à partir d'une étude sur $\mathbb{R}^+$ par symétrie. De même, il suffit d'étudier une fonction trigonométrique sur l'une de ses périodes. Et ces simplifications se combinent.
Ainsi, pour connaître complètement une fonction paire et périodique de période 2π, il suffit de l'étudier sur $[0;\ \pi]$. La parité permet d'en déduire le comportement de la fonction sur $[-\pi;\ \pi]$ et la périodicité nous fournira son comportement sur $\mathbb{R}$.

Mais il existe d'autres manières de déduire le comportement d'une fonction en utilisant des transformations géométriques. Ces propositions nous en fournissent des outils.

Proposition : Translation
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soient α et β deux nombres. On pose $\tilde{I} = \{t + \alpha;\ t \in I\}$.
Alors la courbe de la fonction g définie pour tout x de $\tilde{I}$ par $g(x) = f(x - \alpha) + \beta$ est l'image de la courbe de f par la translation de vecteur $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$.

Par exemple, la courbe de $x \mapsto |x - 1| + 3$ est l'image de la courbe de $x \mapsto |x|$ par une translation de vecteur $\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$ comme l'illustre le dessin plus bas.





Démonstration. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes de ces fonctions. On note τ la translation de vecteur $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$.
Soit M un point.

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathcal{C}_f \iff f(x) = y$$

En particulier $\tau(M)\begin{pmatrix}x+\alpha\\y+\beta\end{pmatrix}$. Mais on a $g(x+\alpha) = f(x-\alpha+\alpha)+\beta = f(x)+\beta = y+\beta$. Ainsi, $\tau(M) \in \mathcal{C}_g$.
Réciproquement, si $N\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \in \mathcal{C}_g$, on vérifie facilement que $\tau^{-1}(N) \in \mathcal{C}_f$.

Ainsi, la courbe de g est bien l'image de la courbe de f par une translation de vecteur $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$. □

Proposition : Changement d'échelle sur les abscisses, les ordonnées

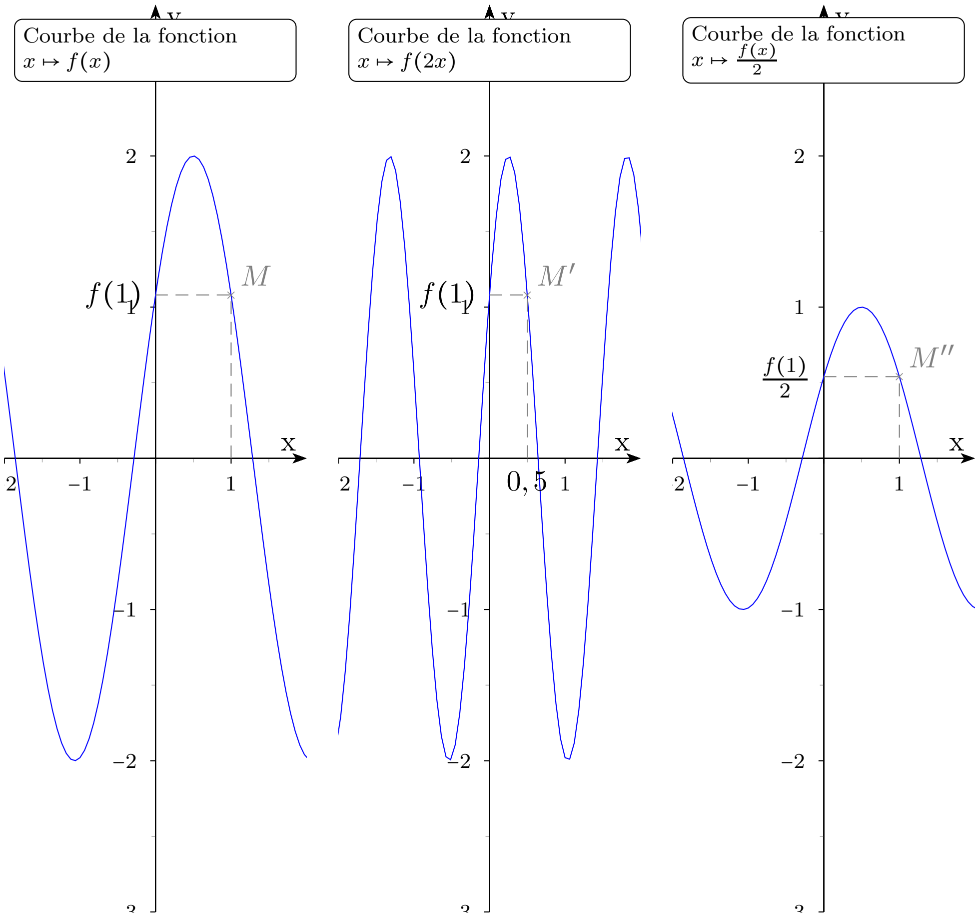
On considère une fonction f définie sur un intervalle I dont la courbe est $\mathcal{C}_f$ et $\alpha \neq 0$ un nombre.
On pose $\tilde{I} = \left\{\frac{x}{\alpha},\ x \in I\right\}$.
On peut définir la fonction g pour tout x de $\tilde{I}$ par $g(x) = f(\alpha x)$ et sa courbe $\mathcal{C}_g$.
Dans ce cas on a

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathcal{C}_f \iff M'\begin{pmatrix}x/\alpha\\y\end{pmatrix} \in \mathcal{C}_g$$

L'opération géométrique qui permet de passer de M à M' n'est pas spécifiquement au programme, c'est une dilatation d'un facteur $\frac{1}{\alpha}$ selon l'axe des abscisses.
De même, on peut définir la fonction h qui à tout x de I associe $h(x) = \alpha f(x)$ et sa courbe $\mathcal{C}_h$.
Dans ce cas, on a l'équivalence

$$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathcal{C}_f \iff M''\begin{pmatrix}x\\\alpha y\end{pmatrix} \in \mathcal{C}_h$$

L'opération géométrique qui permet de passer de M à M'' n'est pas spécifiquement au programme, c'est une dilatation d'un facteur alpha selon l'axe des ordonnées.



3.2.4 Fonctions composées

3.2.4.1 Sens de variation et composition

Proposition : Composition et sens de variation

Soient I, J et K trois intervalles.
Soit $f : I \to J$ et $g : J \to K$.
Si f est strictement croissante et g est strictement croissante alors $g \circ f$ est strictement croissante.
Si f est strictement croissante et g est strictement décroissante alors $g \circ f$ est strictement décroissante.
Si f est strictement décroissante et g est strictement croissante alors $g \circ f$ est strictement décroissante.
Si f est strictement décroissante et g est strictement décroissante alors $g \circ f$ est strictement croissante.
Les mêmes énoncés sont vrais en supprimant le mot strictement.

✎ ***Exercice 14***

Prouver l'un des quatre énoncés.

✎ ***Exercice 15***

En exploitant cette proposition et sans faire aucun calcul, dresser le tableau de variations de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{-2}{\sqrt{(x-1)^2+3}} + 5$ *sur* $\mathbb{R}$*. On précisera les limites éventuelles.*

3.2.4.2 Parité et composition

Proposition : Parité et composition

Soient f une fonction définie sur un domaine D_f et g une fonction définie sur un domaine $D_g \subset f(D_f)$.
Si f est paire alors $g \circ f$ est paire.
Si f est impaire et g est paire alors $g \circ f$ est paire.
Si f est impaire et g est impaire alors $g \circ f$ est impaire.

✎ ***Exercice 16***

Montrer ces trois énoncés.

✎ ***Exercice 17***

Déterminer la parité des fonctions suivantes :

a) $f_1 : x \mapsto \cos\left(\sqrt{x^2+1}\right)$
b) $f_2 : x \mapsto \cos(3x-1)$
c) $f_3 : x \mapsto \sin(3x-1)$
d) $f_4 : x \mapsto \sin\left(x^2-5\right)+12$
e) $f_5 : x \mapsto \left|\left(\sqrt{x^2-5}\right)+12\right|$
f) $f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$

3.2.4.3 Périodicité et composition

Proposition : Périodicité et composition

Soient f une fonction définie sur un domaine D_f et g une fonction définie sur un domaine $D_g \subset f(D_f)$.
Si f est périodique de période T alors $g \circ f$ est périodique de période au plus T.

⚠ Si g est périodique, on ne peut en général rien dire de la périodicité de $g \circ f$.
Par exemple, la fonction $\cos(x^2)$ n'est pas périodique.

3.2.4.4 Dérivation d'une fonction composée

On se donne la possibilité de dériver des fonctions plus variées en énonçant le résultat suivant concernant la dérivation de fonctions composées.

Proposition : Dérivation de fonctions composées

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et à valeurs dans un intervalle ouvert J.
Soit g une fonction définie sur J et à valeurs dans un intervalle K.
Soit a un nombre de I.
Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et on a :

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'\left(f{}^{(}a)\right)}$$

En utilisant ou non le théorème de dérivation composée, résoudre l'exercice suivant.

Exercice 18

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes :
- *son domaine de définition*
- *son tableau de variation*
- *ses limites aux bornes de son domaine de définition que l'on placera dans le tableau de variation*
- *les éventuelles équations d'asymptotes horizontales*

a) $f : x \mapsto \sqrt{3x+1}$

b) $g : x \mapsto \sqrt{2x+2} - \sqrt{x}$

c) $h : x \mapsto \sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$

d) $u : x \mapsto (2x-3)^3 - x$

3.2.5 Fonctions réciproques

3.2.5.1 Courbe d'une fonction réciproque

Proposition : Courbe d'une fonction réciproque

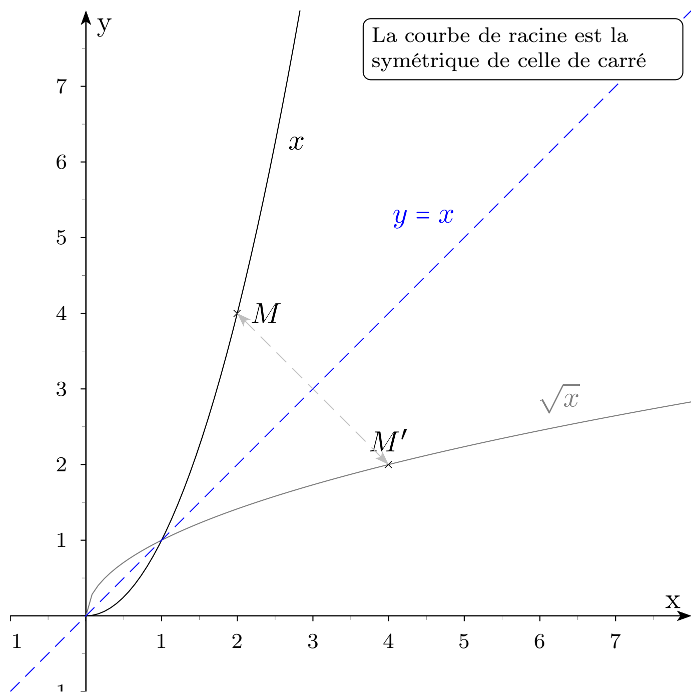
Soit f une fonction bijective d'un intervalle I vers un intervalle J et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé. On note $\mathcal{C}'$ la courbe de la fonction réciproque de f.
Alors

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \iff M'\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \in \mathcal{C}'$$

Dit autrement, $\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 19

Montrer la première équivalence.
Soit un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Prouver que le point $M'\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ est le symétrique de M par rapport à la droite d'équation $y = x$.



3.2.5.2 Parité, sens de variation d'une fonction réciproque

Proposition : Parité et sens de variation d'une fonction réciproque
Mêmes hypothèses.
Une fonction bijective impaire admet une fonction réciproque impaire.
Une fonction bijective strictement croissante admet une fonction réciproque strictement croissante.
Une fonction bijective strictement décroissante admet une fonction réciproque strictement décroissante.

3.2.5.3 Dérivation d'une fonction réciproque

Proposition : Dérivation d'une fonction réciproque
Soit f une fonction bijective d'un intervalle ouvert I vers un intervalle ouvert J.
Soit $a \in J$ tel que f est dérivable en $f^{-1}(a)$ avec $f'\left(f^{-1}(a)\right) \neq 0$.
Alors f^{-1} est dérivable en a et on a :

$$\boxed{(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}}$$

✎ ***Exercice 20***

Montrer que les fonctions suivantes sont bien définies et bijectives.
Déterminer leurs fonctions réciproques ainsi que leurs dérivées.

$$\begin{array}{llcl} f_1 : & [5;\ +\infty[& \to &]-\infty;\ 5] \\ & x & \mapsto & -x^2+10x-20 \\ f_2 : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 \\ f_3 : &]-1;\ 1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1} \end{array}$$

3.3 Fonctions usuelles

3.3.1 Fonctions polynômiales

En fait, pour le moment, on n'a rencontré pratiquement que des fonctions continues sur leurs ensembles de définition. Voici quelques propositions qui les listent de manière exhaustive.

Définition : Fonctions polynomiales, degré, coefficient dominant, racines
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On dit que f est polynomiale lorsqu'il existe un entier n et $n+1$ nombres notés a_0, a_1, $\cdots$, a_n tels que $a_n \neq 0$ et tels que
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.
L'entier n s'appelle le degré de le fonction polynomiale. Le nombre a_n s'appelle le coefficient dominant.
Enfin, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ s'appellent les racines de f.

(Remarque 3) Les fonctions affines sont polynomiales.

(Remarque 4) Les fonctions trinomiales sont polynomiales.

Proposition : Continuité des fonctions polynomiales
Si f est une fonction polynomiale alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

3.3.2 Racine

Proposition : Fonction racine
La restriction de la fonction carré sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, est bijective.
Sa fonction réciproque s'appelle la fonction racine.
Cette fonction est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$ et sa dérivée est

$$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

3.3.3 Valeur absolue

Définition : Fonction valeur absolue
La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ et à tout réel x associe $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases}$.
Cette fonction est continue et paire sur $\mathbb{R}$. Elle admet un minimum en 0 qui vaut 0.

Proposition : Définition équivalente
Pour tout x, on a $|x| = \sqrt{x^2}$.

3.3.4 Fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques

Pour les fonctions trigonométriques, se référer au formulaire.

Proposition : Fonctions trigonométriques réciproques
La restriction de la fonction cos *sur $[0;\ \pi]$ à valeurs dans $[-1;\ 1]$ est bijective. Sa fonction réciproque s'appelle arcosinus. On la note* arccos. *Elle est strictement décroissante, dérivable sur $]-1;\ 1[$ et de dérivée :*

$$x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La restriction de la fonction sin *sur $\left[\frac{-\pi}{2}-;\ \frac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans $[-1;\ 1]$ est bijective. Sa fonction réciproque s'appelle arcsinus. On la note* arcsin. *Elle est strictement croissante, dérivable sur $]-1;\ 1[$ et de dérivée :*

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La restriction de la fonction tan *sur $\left]\frac{-\pi}{2}-;\ \frac{\pi}{2}\right[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bijective. Sa fonction réciproque s'appelle arctangente. On la note* arctan. *Elle est strictement croissante, dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée :*

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

✎ *Exercice 21*

On donne un tableau de valeurs de sinus sur $[0,1;\ 1,5]$ *avec un pas de* $0,1$.

x	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$	$0,9$	1	$1,1$	$1,2$	$1,3$	$1,4$	$1,5$
$\sin(x)$	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,39$	$0,48$	$0,56$	$0,64$	$0,72$	$0,78$	$0,84$	$0,89$	$0,93$	$0,96$	$0,99$	1

Sachant que $\frac{\pi}{2} \simeq 1,571$, *tracer sur la feuille de papier millimétré plus bas la courbe de sinus puis celle d'arcsinus.*

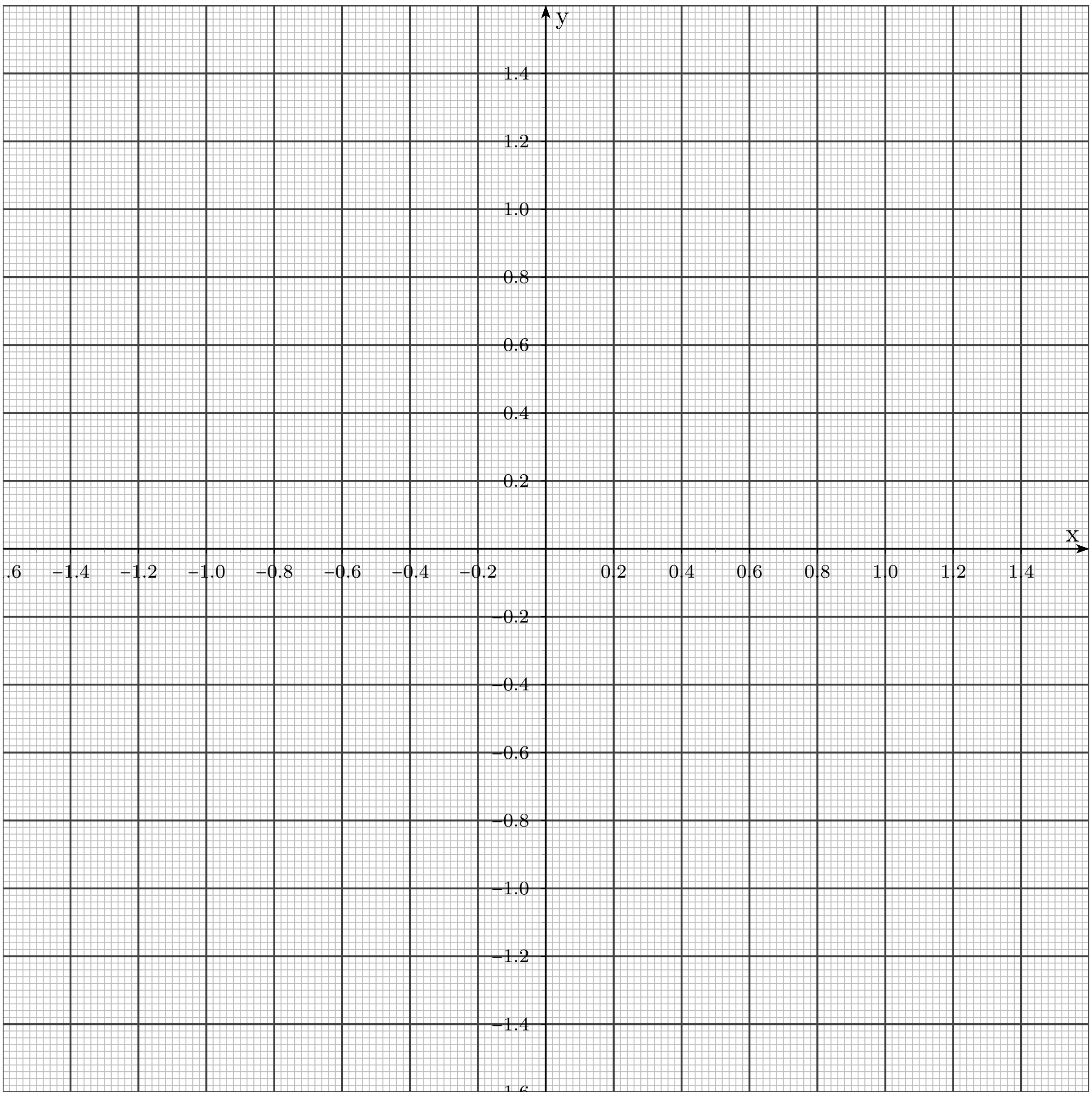
✎ *Exercice 22*

Prouver les formules de dérivation des fonctions arctan *et* arcsin.

✎ *Exercice 23*

Soit x *un réel. Déterminer les valeurs de*

$$A(x) = \arccos(\cos(x)) \qquad S(x) = \arccos(\sin(x)) \qquad T(x) = \arctan(\cos(x))$$



3.3.5 Fonction exponentielle et logarithme

Dans un certain nombre de phénomènes, on retrouve l'idée que la vitesse d'accroissement d'une grandeur est proportionnelle à la grandeur elle-même.
En physique, par exemple, dans certaines réactions nucléaires, plus il y a de particules libérées et plus il y a de désintégrations (donc de libérations de particules).
En biologie, si l'on observe des bactéries qui se multiplient sur un substrat, la vitesse d'augmentation des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries présentes.
Sur les réseaux sociaux, plus une rumeur est reçue et plus elle est rediffusée.
On qualifie souvent ce type de grandeurs d'*exponentielles*. On s'intéressera dans la suite de ce cours à la fameuse fonction *exponentielle* qui permet de comprendre et de décrire ce type d'évolutions.

3.3.5.1 Définition et propriétés de la fonction exponentielle

Comme le détaille la proposition inscrite plus bas, la fonction exponentielle est la solution d'une équation différentielle.

Proposition : Définition de la fonction exponentielle en tant que solution d'une équation différentielle
On s'intéresse au problème suivant :
On cherche une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie

$$(E)\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 1 \\ f'(x) & = & f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

Alors, ce problème possède une solution unique que l'on appelle fonction exponentielle.
On notera $\exp(x)$ *l'image de x par cette fonction.*

On admettra l'existence de la solution. En revanche, on démontrera l'unicité de la solution une fois établies quelques propriétés de la fonction exponentielle.
On suppose donc ici l'existence d'une solution à l'équation de la définition d'exponentielle. Partant de cette hypothèse, il sera possible prouver tout ce qui suit.

Proposition : Signe et sens de variation de $\exp$
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.3.5.2 Équation fonctionnelle de la fonction exponentielle

On note parfois la fonction exponentielle par $\exp(x) = e^x$ en posant $e = \exp(1)$. Cette notation se justifie par l'une des propriétés fondamentales de cette fonction qui transforme les sommes en produits, tout comme les puissances étudiées au collège.

Proposition : L'exponentielle transforme une somme en produit
Soient a et b deux réels et n un entier.
On a :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \exp(a+b) & = & \exp(a)\exp(b) \\ \exp(-a) & = & \dfrac{1}{\exp(a)} \\ \exp(na) & = & (\exp(a))^n \end{array}}$$

(Remarque 5) Si on pose $e = \exp(1)$, on vérifie que
$\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1)\exp(1) = \exp(1)^2 = e^2$.
On a aussi $\exp(3) = \exp(1+1+1) = \exp(1)\exp(1)\exp(1) = \exp(1)^3 = e^3$ et on peut généraliser (voir l'exercice plus bas).

(Remarque 6) On aurait également pu définir l'exponentielle en résolvant le problème qui consiste à chercher toutes les fonctions f qui transforment les sommes en produits.

En exploitant l'avant dernière remarque, résoudre cet exercice.

✎ ***Exercice 24***

Soient n et p deux nombres entiers avec p non nul.
On pose $e = \exp(1)$.

1. *Montrer que* $\exp(n) = \exp(1)^n = e^n$.
2. *En déduire que* $\exp(-n) = \dfrac{1}{\exp(1)^n} = e^{-n}$.
3. *Montrer que* $\exp\left(\dfrac{1}{p}\right)$ *est la racine p-ième de e, c'est à dire le nombre* $e^{\frac{1}{p}}$.
4. *Montrer que* $\exp\left(\dfrac{n}{p}\right) = e^{\frac{n}{p}}$.

(Remarque 7) Cet exercice prouve la notation $\exp(x) = e^x$ pour les nombres que l'on peut mettre sous la forme $\dfrac{n}{p}$. On qualifie de *rationnels* ces nombres.

3.3.5.3 Limites remarquables de l'exponentielle

On étudie maintenant les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction exp.

Proposition : Limites en $+\infty$ et $-\infty$

La fonction exp *possède les limites suivantes en $+\infty$ et $-\infty$.*

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$$

L'exercice suivant permet de prouver ces limites.

✎ ***Exercice 25***

Soit la fonction $f : x \mapsto \exp(x) - x$

1. a) *Pour tout x, déterminer $f'(x)$. Que dire du sens de variation de f' ?*
   b) *Résoudre $f'(x) = 0$ puis en déduire le tableau de signes de f' et enfin le tableau de variations de f.*
2. *En déduire que pour tout x,* $\exp(x) > x$.
3. *Conclure concernant* $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x)$
4. *En notant que* $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$, *démontrer le résultat concernant* $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x)$.

Le tableau de variations d'exponentielle est :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

La proposition plus bas donne deux autres limites à connaître absolument.

Proposition : Comparaison d'exponentielle par rapport aux fonctions $x \mapsto x^p$

Soit p un nombre entier.
On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^p} = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} x^p \exp(x) = 0$$

On prouve ces limites en résolvant cet exercice.

Exercice 26

Pour tout entier p on définit la fonction $g_p : x \mapsto \exp(x) - \dfrac{x^p}{p!}$.

1. *Montrer que pour tout entier p, et pour tout x, $g'_{p+1}(x) = g_p(x)$.*
2. *En déduire, par récurrence, que pour tout p et pour tout $x \geq 0$, $g_p(x) \geq 0$.*
3. *Conclure quant à $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^{p-1}}$.*
4. *En remarquant que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^p \exp(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x)^p \exp(-x)$, conclure sur $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^p \exp(x)$.*

On démontre également une autre limite à connaître en résolvant l'exercice qui suit.

Exercice 27

Donner la formule du taux d'accroissement d'exponentielle entre 0 et x où x désigne un nombre quelconque non nul.
En déduire que :

$$\lim_{x \overset{\neq}{\to} 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

Proposition : Taux d'accroissement en 0

On a

$$\boxed{\lim_{x \overset{\neq}{\to} 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

Exercice 28

Soit la fonction définie par

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. *Montrer que cette fonction est continue.*
2. *Déterminer la dérivée de cette fonction sur* $\mathbb{R}_*^+$ *puis prouver que*

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$$

3.3.5.4 Logarithme népérien

Définition : Logarithme népérien

La fonction exponentielle établit une bijection de $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}_*^+$.
Sa fonction réciproque définie de $\mathbb{R}_*^+$ *vers* $\mathbb{R}$ *s'appelle le logarithme népérien.*
On peut donc la définir de cette manière :

$$\begin{array}{llll} \ln : &]0;\ +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & x \quad / \mathrm{e}^x = y \end{array}$$

Par définition, pour tout $y > 0$, on a $\mathrm{e}^{\ln(y)} = y$. De même, pour tout x, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.
Comme $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = \mathrm{e}$, on a les valeurs remarquables :

$$\begin{array}{lll} \ln(1) & = & 0 \\ \ln(\mathrm{e}) & = & 1 \end{array}$$

On a établi précédemment qu'exponentielle « transforme des sommes en produits ». On peut en déduire tout naturellement que le logarithme transforme les produits en somme.

Proposition : Propriétés du logarithme népérien

Soient a *et* b *deux réels strictement positifs et* n *un entier :*

$$\boxed{\begin{array}{lll} \ln(ab) & = & \ln(a) + \ln(b) \\ \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) & = & -\ln(a) \\ \ln(a^n) & = & n\ln(a) \end{array}}$$

En outre, la fonction logarithme népérien est strictement croissante et sa dérivée est

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Le logarithme possède les limites suivantes aux bornes de son ensemble de définition :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

On a également les limites suivantes à connaître :

$$\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$$

✎ ***Exercice 29***

En utilisant éventuellement les équations fonctionnelles et les sens de variations de ln *et* exp, *résoudre les équations suivantes :*

a) $e^x = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{e^x}{e^{3x}} = \dfrac{1}{2}$

c) $\ln(x) + \ln(3) = 5$

d) $e^{x^2} = 4$

e) $e^x + e^{2x} = 1$

f) $\ln(x^2) - \ln(x) = -5$

✎ *Exercice 30*

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\ln(x) - \ln(2) \leq 4$

b) $4e^x < 3$

c) $4e^x < -3$

d) $e^x + e^{2x} \geq 3$

e) $\dfrac{e^x}{e^x + e^{2x}} \geq 3$

f) $e^{x^2+2x} > 4$

✎ *Exercice 31*

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(x) - x$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln(x) - x^2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2) - \ln(3x)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x^2)}{\ln(x)}$

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x^2) - \ln(x)}{x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x)\sin\left(x^3 - \exp(x)\right)$

✎ *Exercice 32*

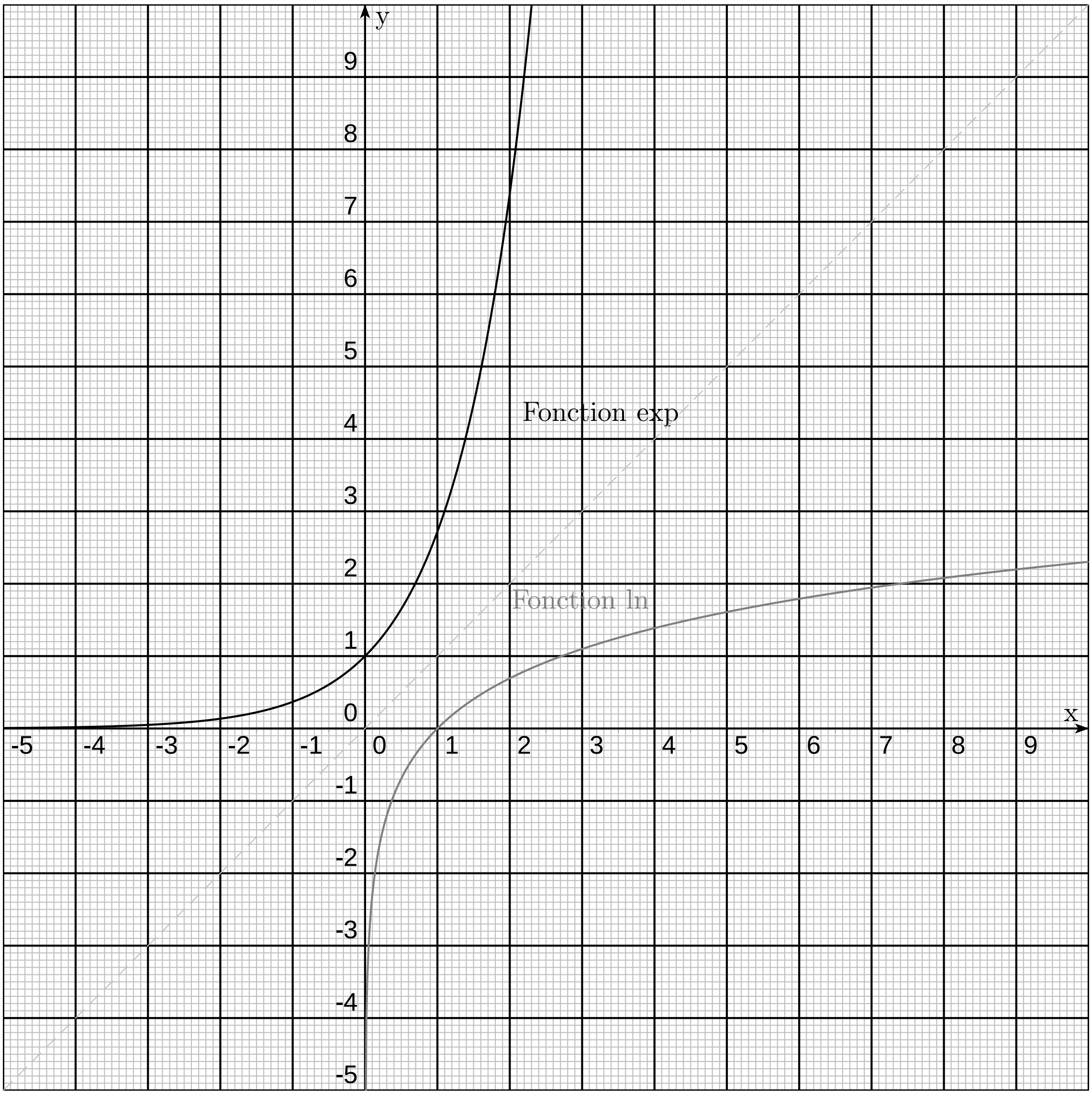
Étudier la fonction $x \mapsto \ln(x) - x^2 + 2$: domaine de définition, sens de variation, limites.
Donner le nombre de solutions de $\ln(x) = x^2 - 2$ et proposer un algorithme permettant de déterminer la plus grande de ces solutions avec une précision de $0,001$.

✎ *Exercice 33*

On note $\mathcal{C}$ la courbe de $\ln$. On cherche à étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à l'une de ses tangentes.

On fixe $a > 0$ un nombre et T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a.
On note f_a la fonction dont T_a est la courbe représentative.

1. *Pour tout $x > 0$ déterminer $f_a(x)$.*
2. *Étudier le sens de variation de la fonction*
   $\Delta_a(x) = f_a(x) - \ln(x)$. Conclure quant à la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T_a.



✎ ***Exercice 34***

Déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Indication: On pourra reconnaître un taux d'accroissement.

3.3.5.5 Fonction $x \mapsto a^x$, logarithme base a

Pour tout nombre $a > 0$, on peut définir la fonction $x \mapsto a^x$ de cette manière :

Définition : Fonction $x \mapsto a^x$

Soit $a > 0$ un nombre. On définit la fonction $x \mapsto a^x$ en posant, pour tout nombre réel x, $a^x = e^{x \ln(a)}$.

✎ ***Exercice 35***

Montrer qu'avec cette définition, et en se servant des propriétés d'exponentielle, on retrouve les valeurs usuelles de a^1, a^2, a^{-1}.

Exercice 36

Soit $a > 0$ et la fonction $x \mapsto a^x$ associée. Soit y un nombre strictement positif.

Déterminer, en fonction de y, le nombre x tel que $a^x = y$.

On appelle logarithme base a la fonction réciproque de $x \mapsto a^x$. Elle possède la même équation fonctionnelle que le logarithme usuel (népérien).

3.3.6 Fonction partie entière

Définition : Fonction partie entière

Pour tout nombre réel x, on définit la partie entière de x par

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} / k \leq x\}$$

La partie entière de x est ainsi l'unique entier k tel que $k \leq< k+1$.

La partie entière de x correspond à l'approximation par défaut de x à l'entier le plus proche. Si x est un nombre positif, la partie entière de x correspond ainsi à l'écriture de décimale de x sans les chiffres après la virgule.

Exercice 37

Sans calculatrice, déterminer les parties entières des nombres suivants :

$$A = 1,25 \qquad B = -1,25 \qquad C = \frac{-845}{3} \qquad D = \sqrt{50}$$

$$E = \frac{1}{0,0082} \qquad F = \sqrt{237} \qquad G = 3\sqrt{5} \qquad H = \frac{1}{1-0,2^3}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{15}-4} \qquad J = \frac{\sqrt{12842}}{7} \qquad K = (1,27)^1 0 \qquad L = 100 \times 0,9^4$$

Proposition : Propriétés de la partie entière

La fonction partie entière est croissante et elle a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$$

Exercice 38

Soit x un nombre réel positif. Pour tout nombre entier n, on pose $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

1. *Écrire les valeurs de a_0, a_1, a_2 dans le cas de $x = \sqrt{2}$.*
2. *Montrer, pour tout n, que $x \geq a_n$ et que $\dfrac{1}{10^n} \geq a_{n+1} - a_n \geq 0$.*
3. *Que représente la suite des a_n ?*

Annexe A

Formulaire

Ce formulaire est susceptible d'évoluer en cours d'année.

A.1 Trigonométrie

A.1.1 Opérations

a, b, p et q désignent quatre nombres.

A.1.1.1 Opérations sur les angles, formules de base

Il faut apprendre par cœur ces formules ou être capable de les retrouver très rapidement en faisant un dessin de cercle trigonométrique.

$$\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)} \qquad \cos(a)^2 + \sin(a)^2 = 1 \qquad 1 + \tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$$

$$\cos(-a) = \cos(a) \qquad \sin(-a) = -\sin(a) \qquad \tan(-a) = -\tan(a)$$

$$\cos(\pi + a) = -\cos(a) \qquad \sin(\pi + a) = -\sin(a) \qquad \tan(\pi + a) = \tan(a)$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos(a) \qquad \sin(\pi - a) = \sin(a) \qquad \tan(\pi - a) = -\tan(a)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\tan(a)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin(a) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{-1}{\tan(a)}$$

A.1.1.2 Somme

Ces formules sont également fondamentales ! Les formules avec $a - b$ se retrouvent en remplaçant b par $-b$ dans les premières formules.

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

A.1.1.3 Transformation de sommes en produits (factorisation)

$$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

A.1.1.4 Transformation de produits en sommes (linéarisation)

$$\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$$
$$\sin(a)\sin(b)=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$$
$$\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$$

A.1.1.5 Duplication

Ces formules sont très utiles !

$$\cos(2a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$$
$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a) \qquad \tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

De la première formule, on déduit très facilement :

$$\cos^2(a)=\frac{\cos(2a)+1}{2} \qquad \sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$

A.1.1.6 De Moivre

n désigne un entier quelconque.

$$(\cos(a)+\mathrm{i}\sin(a))^n=\cos(na)+\mathrm{i}\sin(na)$$

A.1.1.7 Tangente de l'angle moitié

On pose $t=\tan\left(\frac{a}{2}\right)$. On a alors :

$$\cos(a)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin(a)=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan(a)=\frac{2t}{1-t^2}$$

Pour retenir le dénominateur de ces formules, il faut se rappeler que cos et sin sont toujours définies donc le dénominateur ne s'annule pas (en $1+t^2$) tandis que tan n'est pas définie pour $a=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, c'est à dire pour $t=1$.
Quant au numérateur, on le retrouve grâce à la parité (cos est paire tandis que sin et tan sont impaires).

A.1.2 Fonctions trigonométriques

A.1.2.1 Mesures remarquables

On a les sinus et cosinus des angles remarquables suivants :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin(x)$	0	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(x)$	1	0	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

A.1.2.2 Propriétés

Les fonctions sin et cos sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
sin est impaire, cos est paire.
Ces deux fonctions sont périodiques de période 2π.
Les tableaux de variations de sin et cos sont dressés ci-après.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$\cos(x)$	1	$\searrow$ 0 $\searrow$	-1	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	1

x	0		$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin'(x) = \cos(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$ 0 $\searrow$	-1	$\nearrow$	0

La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Elle est impaire et périodique de période π.
Son tableau de variation est :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\Vert$		$+$		$\Vert$
$\tan(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

A.2 Polynômes

A.2.1 Polynôme du second degré à coefficients réels

A.2.1.1 Forme canonique

Soient a, b et c trois nombres fixés, avec $a \neq 0$.
Soit la fonction trinômiale $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.
On pose

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \alpha & = & \frac{-b}{2a} \\ \beta & = & \frac{-b^2+4ac}{4a} \end{array}}$$

Alors, pour tout x :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

On dit que l'écriture $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est la *forme canonique* de $f(x)$.

En particulier :

- la courbe représentative de f a pour sommet le point (α, β) ;
- la courbe représentative de f présente un axe de symétrie vertical d'équation $x = \alpha$;
- la fonction f admet un extrêmum en $x = \alpha$ qui vaut β et cet extrêmum est un $\begin{cases} \text{maximum} & \text{si a est négatif,} \\ \text{minimum} & \text{si a est positif;} \end{cases}$
- le tableau de variations de f s'écrit

x	$-\infty$		α		$+\infty$
si $a > 0$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$
si $a < 0$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

A.2.1.2 Factorisation

Soient a, b et c trois nombres fixés avec $a \neq 0$.
Soit une fonction f qui à tout x associe $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On calcule $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ puis on distingue trois cas :

(cas n° 1) Si $\Delta < 0$, $f(x)$ est toujours du signe de a. Dans ce cas, on ne peut pas factoriser f.

(cas n° 2) Si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe opposé à a pour x compris entre r_1 et r_2 et est du signe de a ailleurs, les valeurs de r_1 et r_2 étant :

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Dans ce cas, on dit que r_1 et r_2 sont les *racines* de f et on a, pour tout x la forme factorisée

$$f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$$

(cas n° 3) Si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq r$ et s'annule pour $x = r$ avec :

$$r = \frac{-b}{2a}$$

Dans ce cas, on dit que r est la *racine double* de f et on a, pour tout x la forme factorisée

$$f(x) = a(x-r)^2$$

A.2.2 Formule du binôme de Newton et applications

Soient a et b deux nombres quelconques. Soit n un entier naturel. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Pour $a = 1$ et $b = 1$, on obtient :

$$\sum_{0\le k\le n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Pour $a = -1$ et $b = 1$, on obtient :

$$\sum_{0\le k\le n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Pour a quelconque et $b = 1$, on obtient :

$$\sum_{0\le k\le n} a^k \binom{n}{k} = (1+a)^n$$

Pour $n = 3$, on obtient les deux identités remarquables du troisième degré :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

A.2.3 Somme des termes d'une suite géométrique et applications

Soit $q \neq 1$ un nombre et n un entier naturel :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

On en déduit la factorisation suivante :

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)$$

A.2.4 Étude formelle des polynômes : définition et opérations

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Lorsque c'est nécessaire on précisera la nature de $\mathbb{K}$
Un polynôme sur $\mathbb{K}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ qui stationne à 0 à partir d'un certain rang. Les termes de cette suite sont appelés les *coefficients* du polynôme.
Si P est un polynôme, on utilise la notation $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ pour spécifier que la suite stationne à 0 à partir du rang $n+1$. X joue le rôle d'une variable muette.
En pratique, seules comptent les valeurs des $(a_k)_{1\le k\le n}$.
On appelle *degré de* P l'entier n tel que, pour tout $k > n$, $a_k = 0$ et $a_n \neq 0$. On utilisera la notation $\delta(P) = n$.
Par ailleurs, on pose, par convention, $\delta(0) = -\infty$.
a_n s'appelle alors le *coefficient dominant de* P.
Enfin, on définit des opérations entre deux polynômes $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$:

- $P + Q$ est le polynôme de coefficient $s_k = a_k + b_k$;
- $P \times Q$ est le polynôme de coefficient $f_k = \sum_{k=i}^{k} a_i b_{k-i}$.

Ces opérations possèdent alors les mêmes propriétés que la somme et l'addition d'entiers. En particulier :

- $+$ est commutative, associative et son élément neutre est le polynôme nul ;
- Tout polynôme P possède un opposé $-P$ tel que $P + (-P) = 0$;
- $\times$ est commutative, associative et son élément neutre est le polynôme unitaire ;
- $\times$ est distributive sur $+$;

Ainsi, défini, l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes est un anneau qui possède la propriété d'être intègre ; i.e. pour tous polynômes P et Q, $PQ = 0 \iff P = 0$ ou $Q = 0$.

A.2.5 Racines

Soit P un polynôme. On dit que $\alpha \in K$ est *racine* de P lorsque $P(\alpha) = 0$.
α est racine $\iff$ $(X - \alpha)$ divise P.
On définit ainsi la *multiplicité* de la racine α comme étant le plus grand entier m_α tel que $(X - \alpha)^{m_\alpha}$ divise P.

A.2.6 Dérivation de polynômes, formule de Taylor

Soit un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On définit le polynôme dérivé de P par la formule :

$$P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

On a ainsi, $\delta(P') = \delta(P) - 1$.
On peut dériver le polynôme dérivé et fabriquer ainsi des dérivées successives définies par $P^{(0)} = P$ et $P^{(k+1)} = (P^k)'$. L'intérêt de cet construction réside dans la formule de Taylor, qui s'écrit, toujours pour ce polynôme P de degré n et quelque soit $a \in \mathbb{K}$:

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

L'un des corollaires de cette formule est que α est de multiplicité m_α si et seulement si, pour tout $k \leq m_\alpha - 1$, $P^{(k)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m_\alpha)}(\alpha) \neq 0$.

A.3 Dérivation

A.3.1 Fonctions usuelles, opérations

A.3.1.1 Dérivation des fonctions usuelles

n désigne un nombre entier naturel. p est un nombre réel fixé.

Nom	Définition	Dérivabilité	$f(t)$	$f'(t)$
Constante	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	p	0
Puissance	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	t^n	nt^{n-1}
Racine	$[0;\ +\infty[$	$]0;\ +\infty[$	$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2\sqrt{t}}$
Inverse puissance	$]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$	$]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$	$\frac{1}{t^n}$	$\frac{-n}{t^{n+1}}$
Exponentielle	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^t	e^t
Logarithme	$]0;\ +\infty[$	$]0;\ +\infty[$	$\ln(t)$	$\frac{1}{t}$
Cosinus	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(t)$	$-\sin(t)$
Sinus	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\sin(t)$	$\cos(t)$
Tangente	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\tan(t)$	$\frac{1}{\cos^2(t)}$

A.3.1.2 Opérations

On dispose également de formules permettant de calculer la dérivée de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions.
Ainsi, dans les formules suivantes, u, v et w désignent trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I et dérivables en un nombre t de I. D'autre part, α désigne un nombre fixé et on supposera que $w(t) \neq 0$.

On a alors :

$$\begin{array}{lcl} (u+v)'(t) & = & u'(t)+v'(t) \\ (\alpha u)'(t) & = & \alpha u'(t) \\ (uv)'(t) & = & u'(t)v(t)+u(t)v'(t) \\ \left(\dfrac{1}{w}\right)'(t) & = & -\dfrac{w'(t)}{w(t)^2} \\ \left(\dfrac{u}{w}\right)'(t) & = & \dfrac{u'(t)w(t)-u(t)w'(t)}{w(t)^2} \end{array}$$

A.3.2 Dérivation composée et applications

A.3.2.1 Dérivation composée

Soient f et g deux fonctions.
On suppose que f est définie sur un intervalle ouvert I, que g est définie sur un intervalle ouvert J et que pour tout x de I, $f(x)$ appartient à J. Enfin, soit a un nombre de I.
Si $f'(a)$ existe et si $g'(f(a))$ existe alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$$

A.3.2.2 Applications

Le tableau suivant donne des applications directes de la formule de dérivation composée.
u désigne une fonction dérivable en t et n désigne un entier naturel.

u est à valeurs dans	$f(t)$	$f'(t)$
$]0;\ +\infty[$	$\sqrt{u(t)}$	$\dfrac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}$
$\mathbb{R}$	$u(t)^n$	$nu'(t)u(t)^{n-1}$
$]-\infty;\ 0[\cup]0;\ +\infty[$	$\dfrac{1}{u(t)^n}$	$\dfrac{-nu'(t)}{u(t)^{n+1}}$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{e}^{u(t)}$	$u'(t)\mathrm{e}^{u(t)}$
$\mathbb{R}$	$\cos(u(t))$	$-u'(t)\sin(u(t))$
$\mathbb{R}$	$\sin(u(t))$	$u'(t)\cos(u(t))$
$]0;\ +\infty[$	$\ln(u(t))$	$\dfrac{u'(t)}{u(t)}$

A.3.3 Fonction réciproque et dérivation

A.3.3.1 Définition et formule

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.
On suppose que f' garde un signe constant sur I.
Alors :

- l'image de l'intervalle I par f est un intervalle ouvert J ;
- il existe une fonction notée f^{-1} de J dans I telle que, pour tout x de J, $f \circ f^{-1}(x) = x$ et, pour tout x de I, $f^{-1} \circ f(x) = x$
- De plus, la fonction f^{-1} est dérivable et, pour tout x de J :

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

A.3.3.2 Applications

À partir de la formule précédente, on déduit les formules suivantes concernant les fonctions trigonométriques réciproques.

domaine de dérivabilité	$f(t)$	$f'(t)$
$]-1;\ 1[$	$\arcsin(t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$]-1;\ 1[$	$\arccos(t)$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\mathbb{R}$	$\arctan(t)$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
$]1;\ +\infty[$	$\text{arccosh}(t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$
$\mathbb{R}$	$\text{arcsinh}(t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$
$]-1;\ 1[$	$\text{arctanh}(t)$	$\dfrac{1}{1-t^2}$

A.4 Fonctions trigonométriques hyperboliques

A.4.1 Introduction

A.4.1.1 Définition

On définit les fonctions cosh, sinh et tanh pour tout réel x par :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

A.4.1.2 Propriétés de base

cosh est paire tandis que sinh et tanh sont impaires.

Ces trois fonctions sont $\mathcal{C}^\infty$, elles sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}^+$ et on déduit le sens de variation sur $\mathbb{R}^-$ à partir de la parité.

cosh et sinh vérifient la relation fondamentale, pour tout x :

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Ce qui entraîne en particulier :

$$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

Enfin, leurs dérivées sont, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \cosh'(x) &= \sinh(x) \\ \sinh'(x) &= \cosh(x) \\ \tanh'(x) &= \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x) \end{aligned}$$

Les tableaux de variations sont les suivants :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\cosh'(x) = \sinh(x)$		$-$	0	$+$	
$\cosh(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\sinh'(x) = \cosh(x)$			$+$		
$\sinh(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$			$+$		
$\tanh(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

A.4.2 Formules de duplication

x désigne un réel quelconque.

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$$
$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$$
$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)}$$

A.4.3 Fonctions réciproques

On peut définir sur $[1;\ +\infty[$ la fonction réciproque de cosh, notée arccosh telle que, pour tout réel x, $\cosh\circ\operatorname{arccosh}(x) = x$.

De même, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction réciproque de sinh, notée arcsinh telle que, pour tout réel x, $\sinh\circ\operatorname{arcsinh}(x) = x$.

Et enfin, on définit sur $]-1;\ 1[$ la fonction réciproque de tanh, notée arctanh telle que, pour tout réel x, $\tanh\circ\operatorname{arctanh}(x) = x$.

Les expressions des dérivées de ces fonctions sont disponibles dans la section sur la dérivation et sont utiles pour intégrer certaines expressions.

A.5 Suites

A.5.1 Limites et opérations

A.5.1.1 Somme

Soients u et v deux suites. Soient l et m deux nombres réels.
Le tableau suivant donne la limite de la suite $u+v$ connaissant les limites de u et v.

u tend vers	v tend vers	$u+v$ tend vers
l	m	$l+m$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	On ne sait pas.
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

A.5.1.2 Produit

Soients u et v deux suites. Soient l et m deux nombres réels avec $l \neq 0$.
Le tableau suivant donne la limite de la suite $u\times v$ connaissant les limites de u et v.

u tend vers	v tend vers	$u\times v$ tend vers
l	m	lm
l	$+\infty$	$\begin{cases}+\infty \text{ si } l>0\\ -\infty \text{ si } l<0\end{cases}$
l	$-\infty$	$\begin{cases}-\infty \text{ si } l>0\\ +\infty \text{ si } l<0\end{cases}$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	On ne sait pas

A.5.1.3 Inverse

Soit u une suite dont les éléments sont tous non nuls. Soit l un nombre réel *non nul*.
Le tableau suivant donne la limite de la suite $\frac{1}{u}$ connaissant la limite de u.

u tend vers	$\frac{1}{u}$ tend vers
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$
0	On ne sait pas
l	$\frac{1}{l}$
$-\infty$	0
$+\infty$	0

A.5.2 Somme des termes

A.5.2.1 Nombres triangulaires

Pour tout nombre entier naturel n, on note $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$. On a alors la formule :

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

A.5.2.2 Suite arithmétique

Soit une suite arithmétique u de raison r. On a :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1)u_0 + r \times \frac{n(n+1)}{2}$$

A.5.2.3 Suite géométrique

Soit q un nombre différent de 1. On a :

$$1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

A.6 Propriétés d'exponentielle et logarithme

A.6.1 Exponentielle

x et y désignent deux nombres quelconques. a désigne un nombre strictement positif.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x+y} &= \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y \\ \mathrm{e}^{x-y} &= \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} \\ \mathrm{e}^{xy} &= (\mathrm{e}^x)^y \\ a^x &= \mathrm{e}^{x\ln(a)} \end{aligned}$$

Par ailleurs, exponentielle est la seule fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(x) = f(x) \qquad \forall x \end{cases}$$

A.6.2 Logarithme népérien

a, x et y désignent des nombres strictement positifs.

$$\begin{aligned}
\ln(xy) &= \ln(x) + \ln(y) \\
\ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln(x) - \ln(y) \\
\ln\left(x^a\right) &= a\ln(x)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, ln est la seule fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ telle que

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(x) = \dfrac{1}{x} & \forall x > 0 \end{cases}$$

A.7 Limites remarquables

A.7.1 Croissances comparées

p désigne un nombre entier naturel strictement positif.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^p} &= +\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} &= 0 \\
\lim_{x\to-\infty} x^p\mathrm{e}^x &= 0 \\
\lim_{x\to0^+} x^p\ln(x) &= 0
\end{aligned}$$

A.7.2 Taux d'accroissements

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} &= 1 \\
\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1 \\
\lim_{x\to0} \frac{\cos(x) - 1}{x} &= 0 \\
\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} &= 1 \\
\lim_{x\to0} \frac{\tan(x)}{x} &= 1
\end{aligned}$$

A.8 Complexes

A.8.1 Propriétés des opérations usuelles

Soient a_1, a_2, b_1, b_2 quatre nombres réels.
On pose $z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1$ et $z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2$.

On définit les opérations :

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + \mathrm{i}(b_1 + b_2) \\
(z_1z_2) &= (a_1a_2 - b_1b_2) + \mathrm{i}(a_1b_2 + a_2b_1)
\end{aligned}$$

Soient de plus z_3 un troisième nombre complexe. On a alors les propriétés usuelles pour ces opérations :

$$\begin{array}{lcll}
z_1 + z_2 & = & z_2 + z_1 & \text{(Commutativité de +)} \\
z_1 + (z_2 + z_3) & = & (z_1 + z_2) + z_3 & \text{(Associativité de +)} \\
z_1 z_2 & = & z_2 z_1 & \text{(Commutativité de } \times\text{)} \\
z_1(z_2 z_3) & = & (z_1 z_2) z_3 & \text{(Associativité de } \times\text{)} \\
z_1(z_2 + z_3) & = & z_1 z_2 + z_1 z_3 & \text{(Distributivité)} \\
0 + z_1 & = & z_1 & \text{(0 est un élément neutre pour +)} \\
0 z_1 & = & 0 & \text{(0 est un élément absorbant pour } \times\text{)} \\
1 z_1 & = & z_1 & \text{(1 est un élément neutre pour } \times\text{)}
\end{array}$$

De plus, tout nombre $z \neq 0$ est inversible et on retrouve également les propriétés usuelles sur les fractions.

A.8.2 Module et argument

Soient a et b deux nombres réels non tous nuls et $z = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe. On définit :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

De plus, il existe un unique angle θ tel que :

$$z = |z| \left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right)$$

θ est l'argument de z, noté $\arg(z)$.
z_1 et z_2 sont deux nombres complexes non nuls, n est un entier naturel. L'argument et le module possèdent les propriétés :

$$\begin{aligned}
|z_1 z_2| &= |z_1| \, |z_2| \\
|z_1^n| &= |z_1|^n \\
\left|\frac{1}{z_1}\right| &= \frac{1}{|z_1|} \\
|z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \\
\arg(z_1 z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) \\
\arg(z_1^n) &= n \arg(z_1) \\
\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) &= -\arg(z_1)
\end{aligned}$$

A.8.3 Conjugué

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels est le nombre $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.
Ainsi, si z_1, z_2, z_3 sont trois nombres complexes avec $z_3 \neq 0$. On a :

$$\begin{array}{lcl}
\overline{\overline{z_1}} & = & z_1 \\
z_1 \times \overline{z_1} & = & |z_1|^2 \\
\overline{z_1 + z_2} & = & \overline{z_1} + \overline{z_2} \\
\overline{z_1 \times z_2} & = & \overline{z_1} \times \overline{z_2} \\
\overline{\left(\dfrac{1}{z_3}\right)} & = & \dfrac{1}{\overline{z_3}} \\
z_1 = \overline{z_1} & \Longleftrightarrow & z_1 \text{ est réel} \\
|\overline{z_1}| & = & |z_1| \\
\arg\left(\overline{z_3}\right) & = & -\arg(z_3)
\end{array}$$

A.9 Développements limités

A.9.1 Formule de Taylor

Soit une fonction définie sur un ouvert I contenant un nombre a et n fois dérivable en a.
Alors, il existe une fonction ε définie sur ce même ouvert, continue en a, vérifiant $\varepsilon(a) = 0$ et telle que, pour tout x de I :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \varepsilon(x)(x-a)^n$$

A.9.2 Développements limités en 0 à connaître

Dans toute la suite, on utilise la notation de Landau : $o\left((x-a)^n\right) = \varepsilon(x)(x-a)^n$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \\
\cosh(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \\
\sinh(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{-1}{2}\right) \times \left(\frac{-3}{2}\right) \times \cdots \times \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} x^n + o\left(x^n\right) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n} x^n + o\left(x^n\right)
\end{aligned}$$

Annexe B

Rappel des propriétés des triangles et des quadrilatères

B.1 Propriétés des quadrilatères

Si $ABCD$ est un quadrilatère, on définit les cas suivants :
- lorsque $(AB) \parallel (CD)$ et $(BC) \parallel (AD)$, on dit que le quadrilatère est un parallélogramme
- lorsque $AB = CD$ et $BC = AD$, le quadrilatère est également un parallélogramme
- lorsque tous les angles du quadrilatère sont droits, on dit que le quadrilatère est un rectangle
- lorsque tous les côtés du quadrilatère ont la même longueur, on dit que le quadrilatère est un losange
- lorsque tous les angles du quadrilatère sont droits et que tous les côtés ont la même longueur, on dit que le quadrilatère est un carré

Théorème : Caractérisation d'un quadrilatère par ses diagonales

A, B, C et D sont 4 points du plan.
$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.
$ABCD$ est un rectangle si et seulement si $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu et $AC = BD$.
$ABCD$ est un losange si et seulement si $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu et (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
$ABCD$ est un carré si et seulement si $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu et $AC = BD$ et (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
Ces 4 propositions sont résumées par le tableau ci-dessous :

Nature de $ABCD$	*Propriété caractéristique des diagonales*
parallélogramme	*$[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu*
rectangle	*$[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu et $AC = BD$*
losange	*$[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu et (AC) et (BD) sont perpendiculaires*
carré	*$[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu et $AC = BD$ et (AC) et (BD) sont perpendiculaires*

B.2 Propriétés des triangles

Il y a énormément de propriétés sur les triangles. Le théorème plus bas donne les propriétés caractéristiques essentiellement utiles en classe de seconde.
Pour rappel, dans un triangle :
- les médianes se coupent en un point unique qu'on appelle le centre de gravité
- les médiatrices se coupent en un point unique qui correspond au centre du cercle circonscrit
- les hauteurs se coupent en un point unique qu'on appelle l'orthocentre.

Par ailleurs, si ABC est un triangle, on définit les cas particuliers suivants :

— lorsque l'angle $\widehat{BAC}$ est droit, on dit que le triangle est rectangle en A

— lorsque l'angle $AB = AC$, on dit que le triangle est isocèle en A

— lorsque l'angle $AB = AC = BC$, on dit que le triangle est équilatéral.

Théorème : Caractérisation d'un triangle à l'aide de ses droites caractéristiques

A, B et C sont 3 points deux à deux distincts du plan.
Le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si le point A appartient à la médiatrice de $[BC]$.
Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si le centre du cercle circonscrit est le milieu de $[BC]$.
Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si le centre du gravité est confondu avec le centre du cercle circonscrit.

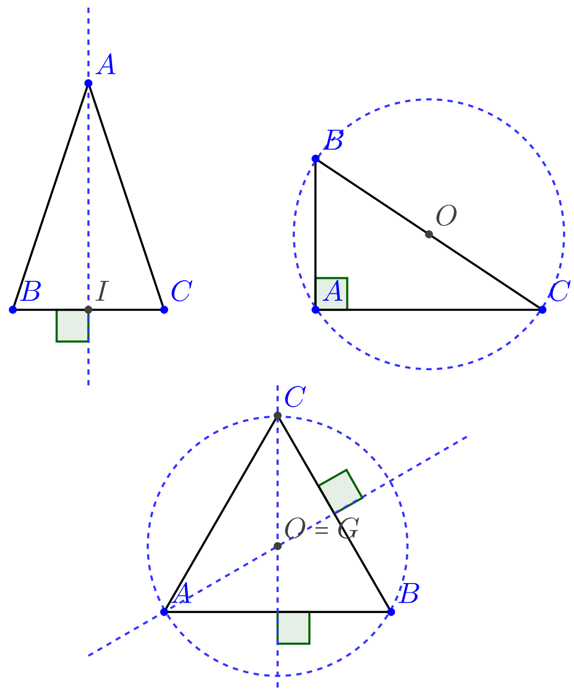


Table des matières