Annexe A

Formulaire

Ce formulaire est susceptible d'évoluer en cours d'année.

A.1 Trigonométrie

A.1.1 Opérations

a, b, p et q désignent quatre nombres.

A.1.1.1 Opérations sur les angles, formules de base

Il faut apprendre par cœur ces formules ou être capable de les retrouver très rapidement en faisant un dessin de cercle trigonométrique.

$$\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)} \qquad \cos(a)^2 + \sin(a)^2 = 1 \qquad 1 + \tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$$

$$\cos(-a) = \cos(a) \qquad \sin(-a) = -\sin(a) \qquad \tan(-a) = -\tan(a)$$

$$\cos(\pi + a) = -\cos(a) \qquad \sin(\pi + a) = -\sin(a) \qquad \tan(\pi + a) = \tan(a)$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos(a) \qquad \sin(\pi - a) = \sin(a) \qquad \tan(\pi - a) = -\tan(a)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\tan(a)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin(a) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{-1}{\tan(a)}$$

A.1.1.2 Somme

Ces formules sont également fondamentales ! Les formules avec $a - b$ se retrouvent en remplaçant b par $-b$ dans les premières formules.

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

A.1.1.3 Transformation de sommes en produits (factorisation)

$$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

A.1.1.4 Transformation de produits en sommes (linéarisation)

$$\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$$
$$\sin(a)\sin(b)=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$$
$$\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$$

A.1.1.5 Duplication

Ces formules sont très utiles !

$$\cos(2a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$$
$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a) \qquad \tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$$

De la première formule, on déduit très facilement :

$$\cos^2(a)=\frac{\cos(2a)+1}{2} \qquad \sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}$$

A.1.1.6 De Moivre

n désigne un entier quelconque.

$$(\cos(a)+\mathrm{i}\sin(a))^n=\cos(na)+\mathrm{i}\sin(na)$$

A.1.1.7 Tangente de l'angle moitié

On pose $t=\tan\left(\frac{a}{2}\right)$. On a alors :

$$\cos(a)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin(a)=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan(a)=\frac{2t}{1-t^2}$$

Pour retenir le dénominateur de ces formules, il faut se rappeler que cos et sin sont toujours définies donc le dénominateur ne s'annule pas (en $1+t^2$) tandis que tan n'est pas définie pour $a=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, c'est à dire pour $t=1$.
Quant au numérateur, on le retrouve grâce à la parité (cos est paire tandis que sin et tan sont impaires).

A.1.2 Fonctions trigonométriques

A.1.2.1 Mesures remarquables

On a les sinus et cosinus des angles remarquables suivants :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin(x)$	0	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(x)$	1	0	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

A.1.2.2 Propriétés

Les fonctions sin et cos sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
sin est impaire, cos est paire.
Ces deux fonctions sont périodiques de période 2π.
Les tableaux de variations de sin et cos sont dressés ci-après.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

x	0		$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin'(x) = \cos(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\sin(x)$	0		1	0	-1		0

La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Elle est impaire et périodique de période π.
Son tableau de variation est :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\Vert$		$+$		$\Vert$
$\tan(x)$	$\Vert$	$-\infty$	0	$+\infty$	$\Vert$

A.2 Polynômes

A.2.1 Polynôme du second degré à coefficients réels

A.2.1.1 Forme canonique

Soient a, b et c trois nombres fixés, avec $a \neq 0$.
Soit la fonction trinômiale $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.
On pose

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \alpha & = & \frac{-b}{2a} \\ \beta & = & \frac{-b^2+4ac}{4a} \end{array}}$$

Alors, pour tout x :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

On dit que l'écriture $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est la *forme canonique* de $f(x)$.

En particulier :

- la courbe représentative de f a pour sommet le point (α, β) ;
- la courbe représentative de f présente un axe de symétrie vertical d'équation $x = \alpha$;
- la fonction f admet un extrêmum en $x = \alpha$ qui vaut β et cet extrêmum est un $\begin{cases} \text{maximum} & \text{si a est négatif,} \\ \text{minimum} & \text{si a est positif;} \end{cases}$
- le tableau de variations de f s'écrit

x	$-\infty$	α	$+\infty$
si $a > 0$	$+\infty$ $\searrow$	β	$\nearrow$ $+\infty$
si $a < 0$	$-\infty$ $\nearrow$	β	$\searrow$ $-\infty$

A.2.1.2 Factorisation

Soient a, b et c trois nombres fixés avec $a \neq 0$.
Soit une fonction f qui à tout x associe $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On calcule $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ puis on distingue trois cas :

(cas n° 1) Si $\Delta < 0$, $f(x)$ est toujours du signe de a. Dans ce cas, on ne peut pas factoriser f.

(cas n° 2) Si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe opposé à a pour x compris entre r_1 et r_2 et est du signe de a ailleurs, les valeurs de r_1 et r_2 étant :

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Dans ce cas, on dit que r_1 et r_2 sont les *racines* de f et on a, pour tout x la forme factorisée

$$f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$$

(cas n° 3) Si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq r$ et s'annule pour $x = r$ avec :

$$r = \frac{-b}{2a}$$

Dans ce cas, on dit que r est la *racine double* de f et on a, pour tout x la forme factorisée

$$f(x) = a(x-r)^2$$

A.2.2 Formule du binôme de Newton et applications

Soient a et b deux nombres quelconques. Soit n un entier naturel. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Pour $a = 1$ et $b = 1$, on obtient :

$$\sum_{0\leq k\leq n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Pour $a = -1$ et $b = 1$, on obtient :

$$\sum_{0\leq k\leq n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Pour a quelconque et $b = 1$, on obtient :

$$\sum_{0\leq k\leq n} a^k \binom{n}{k} = (1+a)^n$$

Pour $n = 3$, on obtient les deux identités remarquables du troisième degré :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

A.2.3 Somme des termes d'une suite géométrique et applications

Soit $q \neq 1$ un nombre et n un entier naturel :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

On en déduit la factorisation suivante :

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right)$$

A.2.4 Étude formelle des polynômes : définition et opérations

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Lorsque c'est nécessaire on précisera la nature de $\mathbb{K}$
Un polynôme sur $\mathbb{K}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ qui stationne à 0 à partir d'un certain rang. Les termes de cette suite sont appelés les *coefficients* du polynôme.
Si P est un polynôme, on utilise la notation $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ pour spécifier que la suite stationne à 0 à partir du rang $n+1$. X joue le rôle d'une variable muette.
En pratique, seules comptent les valeurs des $(a_k)_{1\leq k\leq n}$.
On appelle *degré de* P l'entier n tel que, pour tout $k > n$, $a_k = 0$ et $a_n \neq 0$. On utilisera la notation $\delta(P) = n$.
Par ailleurs, on pose, par convention, $\delta(0) = -\infty$.
a_n s'appelle alors le *coefficient dominant de* P.
Enfin, on définit des opérations entre deux polynômes $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$:

- $P + Q$ est le polynôme de coefficient $s_k = a_k + b_k$;
- $P \times Q$ est le polynôme de coefficient $f_k = \sum_{k=i}^{k} a_i b_{k-i}$.

Ces opérations possèdent alors les mêmes propriétés que la somme et l'addition d'entiers. En particulier :

- $+$ est commutative, associative et son élément neutre est le polynôme nul ;
- Tout polynôme P possède un opposé $-P$ tel que $P + (-P) = 0$;
- $\times$ est commutative, associative et son élément neutre est le polynôme unitaire ;
- $\times$ est distributive sur $+$;

Ainsi, défini, l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes est un anneau qui possède la propriété d'être intègre ; i.e. pour tous polynômes P et Q, $PQ = 0 \iff P = 0$ ou $Q = 0$.