

Équations différentielles

Lycée Richelieu
Rueil Malmaison

2 décembre 2019

Il existe de nombreuses grandeurs dont la vitesse d'accroissement est fonction de la grandeur elle-même. Par exemple, la vitesse d'augmentation d'une population de bactéries dépend de la taille de la population elle-même; ou encore, l'accélération d'un point à l'extrémité d'un ressort dépend de la position de ce point.

On a vu précédemment que c'est la notion de dérivée qui permet de mesurer la vitesse instantanée. Ainsi, mathématiquement, on traduira le fait que l'accroissement d'une grandeur dépend de la grandeur elle-même par une équation liant la dérivée d'une fonction et la fonction elle-même. Une telle équation portera le nom d'équation différentielle.

L'inconnue d'une équation différentielle sera donc une fonction.

Nous allons étudier dans ce chapitre des cas particuliers de telles équations.

La résolution de ces équations nécessitera de faire appel à la notion de primitive dont nous rappellerons quelques propriétés en première partie.

1 Primitives des fonctions continues



On abordera la notion de continuité avec rigueur au second semestre. Pour le moment, il faut retenir cette définition intuitive :

« Une fonction est continue sur un intervalle I lorsque, pour tracer son graphe on n'a pas besoin de lever le crayon. »

1.1 Définition et premières propriétés

La primitive est en quelque sorte l'opération réciproque de la dérivée comme l'explique la définition plus bas.

Définition 1 (Primitive d'une fonction continue). *Soit une fonction f continue, définie sur un intervalle J .*

Alors il existe au moins une fonction F telle que, pour tout x de J ,

$F'(x) = f(x)$. On dit que F est une primitive de f .

Démonstration. La démonstration de l'existence des primitives se fera au second semestre. □

On peut chercher dans certains cas particuliers des primitives de fonctions en exploitant les formules de dérivation.

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction dont on aura précisé l'ensemble de définition.

a) $f_1 : x \mapsto 1$

b) $f_2 : x \mapsto 2x$

c) $f_3 : x \mapsto e^x$

d) $f_4 : x \mapsto \frac{1}{x}$

e) $f_5 : x \mapsto \cos(x)$

f) $f_6 : x \mapsto \sin(x)$

g) $f_7 : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

h) $f_8 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



On parle d'une primitive d'une fonction. En effet, pour une fonction donnée, il existe une infinité de primitives comme le prouve la proposition plus bas.

Proposition 1 (Les primitives sont définies à une constante près). *Soit f une fonction continue, définie sur un intervalle I et soit F une primitive de f .*

\tilde{F} désigne enfin une fonction définie sur I . Alors :

\tilde{F} est une primitive de f si et seulement si $\tilde{F} - F$ est constante sur I .

Démonstration. Si \tilde{F} est une autre primitive de f , la fonction $\tilde{F} - F$ est dérivable et pour tout x de I , $(\tilde{F} - F)'(x) = \tilde{F}'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. La fonction $\tilde{F} - F$ est donc bien constante.

Réciproquement, si $\tilde{F} - F$ est constante et égale au nombre k . On a donc, pour tout x de I , $\tilde{F}(x) = F(x) + k$. En particulier, \tilde{F} est dérivable et on a $\tilde{F}'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$. On en déduit que \tilde{F} est une primitive de f . \square



Toutes les primitives d'une fonction donnée sont donc égales à une constante près. Il suffit de connaître une primitive F de f pour savoir que toutes les autres primitives s'écrivent $F + k$, avec k constante.

La propriété établie permet de déduire que deux primitives d'une même fonction sont égales si et seulement si elles sont égales en un nombre au moins.

Proposition 2 (Égalité de deux primitives d'une même fonction). *Soit une fonction f définie sur un intervalle I . Soient F et \tilde{F} deux primitives de f . On a la propriété suivante :*

$$\exists x_0 \in I / F(x_0) = \tilde{F}(x_0) \iff \forall x \in I, F(x) = \tilde{F}(x)$$

Démonstration. La réciproque est évidente. En effet, si $\forall x \in I, F(x) = \tilde{F}(x)$ alors, bien sûr, $\exists x_0 \in I / F(x_0) = \tilde{F}(x_0)$. On examine maintenant le sens direct. On suppose $\exists x_0 \in I / F(x_0) = \tilde{F}(x_0)$.

Comme F et \tilde{F} sont des primitives d'une même fonction, leur différence est une constante (d'après la proposition portant sur l'égalité de deux primitives). Cette constante est en particulier égale à $F(x_0) - \tilde{F}(x_0) = 0$. Ainsi, la différence des deux fonctions est la fonction nulle. Les deux fonctions F et \tilde{F} sont donc égales. \square

Partant de cette proposition, on établit un corollaire.

Corollaire 1 (Primitive d'une fonction continue avec condition initiale). *Soit une fonction f définie sur un intervalle I . Soit $x_0 \in I$ et k un nombre.*

Alors il existe une unique primitive de f notée F telle que $F(x_0) = k$.

Démonstration. On sait qu'une primitive existe. Notons-la \tilde{F} .

Par construction, la fonction $F : x \mapsto \tilde{F}(x) - \tilde{F}(x_0) + k$ vérifie $F(x_0) = k$. De plus, par construction, la fonction $\tilde{F} - F$ est constante, égale à $-\tilde{F}(x_0) + k$.

Ainsi, F est une primitive telle que $F(x_0) = k$. L'unicité de F est, quant à elle, garantie par la proposition précédente. \square

Proposition 3 (Linéarité de la primitive). *Soient f et g deux fonctions continues, définies sur un intervalle I . Soit λ un nombre fixé.*

Soient F et G des primitives de f et g .

Alors la fonction $F + G$ est une primitive de $f + g$ et la fonction λF est une primitive de λf .

Démonstration. Cela découle directement des propriétés de la dérivée d'une somme et d'un produit par un réel. \square

1.2 Calculs de primitives

On commence par établir ici un tableau de primitives des fonctions usuelles puis par établir quelques techniques de calcul de primitives.

1.2.1 Primitives de fonctions usuelles

Gardons en tête qu'une primitive est définie à une constante près! On ne parle jamais de LA primitive d'une fonction sauf si l'on précise une condition initiale.

n désigne un nombre entier différent de -1 .

k et α sont des nombres réels fixés avec $\alpha \neq -1$.

Définition	$f(t)$	$F(t)$
\mathbb{R}	k	kt
\mathbb{R} (ou \mathbb{R}^* si $n < 0$)	t^n	$\frac{1}{n+1} \times t^{n+1}$
\mathbb{R}_*^+	t^α	$\frac{1}{\alpha+1} \times t^{\alpha+1}$
\mathbb{R}	e^t	e^t
\mathbb{R}^*	$\frac{1}{t}$	$\ln t $
\mathbb{R}	$\cos(t)$	$\sin(t)$
\mathbb{R}	$\sin(t)$	$-\cos(t)$
$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\tan(t)$	$-\ln \cos(t) $
\mathbb{R}	$\frac{1}{1+t^2}$	$\arctan(t)$
$] -1; 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\arcsin(t)$

1.2.2 Application de la linéarité et de la formule de dérivation composée

Rappelons que la linéarité des primitives (héritée de la linéarité de la dérivation) permet de déterminer une primitive de $f + \lambda g$ comme étant $F + \lambda G$ (où F et G sont des primitives respectives de f et g).

Voici un petit exercice d'application.

✎ Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction dont on aura précisé l'ensemble de définition.

a) $f_1 : x \mapsto x^2 + 3x - 5$

b) $f_2 : x \mapsto 2x^{1/3} - 3x^{1/2}$

c) $f_3 : x \mapsto 3e^x + \frac{1}{x}$

d) $f_4 : x \mapsto 1 - \sin(x)$

e) $f_5 : x \mapsto \cos(x) - 3\sin(x)$

f) $f_6 : x \mapsto \frac{4}{1+x^2} - 3$

g) $f_7 : x \mapsto 2\tan(x) - \cos(x)$

h) $f_8 : x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + 12x$

La formule de la dérivation composée fournit également des possibilités de calcul de primitives.

En général, il s'agit, par des factorisations « forcées » de faire apparaître des formules de dérivation composée

usuelles (par exemple $u'e^u$, $\frac{u'}{u}$, $nu'u^{n-1}$, $\frac{u'}{1+u^2}$...)

Explorons ces méthodes à travers des exercices.

✎ **Exercice 3**

Soit la fonction $f : t \mapsto e^{2t+3}$. En remarquant que pour tout t , $f(t) = \frac{1}{2} \times 2e^{2t+3}$, déterminer une primitive de f .

✎ **Exercice 4**

m et p désignent des nombres réels fixés avec $m \neq 0$.

Soit la fonction $f : t \mapsto e^{mt+p}$. En s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer une primitive de f .

✎ **Exercice 5**

Soit la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{2t+3}$. En remarquant que pour tout t , $g(t) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2t+3}$, déterminer une primitive de g .

✎ **Exercice 6**

m et p désignent des nombres réels fixés avec $m \neq 0$.

Soit la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{mt+p}$. En s'inspirant de l'exercice précédent, déterminer une primitive de g .

✎ **Exercice 7**

m et p désignent des nombres réels fixés avec $m \neq 0$.

α désigne un nombre réel différent de -1 .

Soit la fonction $h : t \mapsto (mt+p)^\alpha$. En s'inspirant de ce qui précède, déterminer une primitive de h .

✎ **Exercice 8**

Déterminer une primitive de la fonction $n : x \mapsto xe^{-x^2}$.

✎ **Exercice 9**

Soit la fonction $r : t \mapsto \frac{1}{t^2+2t+3}$. En utilisant des résultats sur la forme canonique d'une fonction du second degré, déterminer une primitive de r .

2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

2.1 Définition et structure des solutions

Définition 2 (Équation du premier ordre, second membre, équation homogène). Soient a et b deux fonctions définies et continues sur un intervalle I .

y désigne une fonction définie et dérivable sur I .

L'équation

$$y'(x) - a(x)y(x) = b(x) \quad (E)$$

s'appelle une équation différentielle du premier ordre à coefficient variable a .

b s'appelle le second membre de cette équation.

Une solution de cette équation sur l'intervalle I est une fonction y dérivable telle que pour tout x de I , l'égalité (E) est vérifiée.

Enfin, l'équation

$$y'(x) - a(x)y(x) = 0 \quad (E_0)$$

s'appelle l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée.

Proposition 4 (Structure des solutions d'une telle équation). *On reprend les mêmes hypothèses que précédemment. Si φ_1 et φ_2 sont deux solutions de l'équation (E) alors $\varphi_2 - \varphi_1$ est solution de l'équation homogène (E_0).*

Démonstration. On suppose que φ_1 et φ_2 sont deux solutions sur un intervalle I . Dans ce cas, pour tout x de I :

$$\begin{aligned}\varphi_2'(x) - a(x)\varphi_2(x) &= b(x) \\ \varphi_1'(x) - a(x)\varphi_1(x) &= b(x)\end{aligned}$$

Par soustraction de ces deux équations, on obtient pour tout x de I :

$$\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x) - a(x)\varphi_2(x) + a(x)\varphi_1(x) = 0$$

En utilisant la linéarité de la dérivée et en factorisant par $a(x)$ on obtient :

$$(\varphi_2(x) - \varphi_1(x))' - a(x)(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) = 0$$

Ce qui signifie que $\varphi_2 - \varphi_1$ est bien solution de l'équation homogène (E_0). □

Corollaire 2 (Solution particulière, solution générale). *Soit f_0 une solution de l'équation (E). Alors l'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions de l'ensemble :*

$$\{f_0 + y_0 \text{ où } y_0 \text{ est une solution de } (E_0)\}$$

On dit que f_0 est une solution particulière de l'équation (E).

2.2 Équation homogène

On va s'intéresser à la résolution de l'équation homogène.

Proposition 5 (Structure des solutions de l'équation homogène). *On s'intéresse à l'équation différentielle homogène*

$$y'(x) - a(x)y(x) = 0 \quad (E_0)$$

sous les mêmes hypothèses que précédemment.

Soit λ un nombre réel.

Alors, si y_1 et y_2 sont des solutions de (E_0), $y_1 + y_2$ et λy_1 sont également des solutions.



Cette proposition signifie que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est stable par addition et par multiplication par un réel. On parle de combinaisons linéaires pour désigner de telles opérations.

Exercice 10

Prouver cette proposition.

Proposition 6 (Solutions de l'équation homogène). Soit A une primitive de a . Alors y est une solution de l'équation homogène (E_0) si et seulement si il existe un réel k tel que pour tout x de I ,

$$y(x) = ke^{A(x)}$$

Démonstration. Montrons le sens réciproque. Soit une fonction dont l'expression est pour tout x de I , $y(x) = ke^{A(x)}$.

On a alors, pour tout x :

$$\begin{aligned} y'(x) - a(x)y(x) &= (ke^{A(x)})' - ka(x)e^{A(x)} \\ &= ka(x)e^{A(x)} - ka(x)e^{A(x)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Montrons maintenant le sens direct. Soit y une solution de l'équation différentielle homogène. Définissons, pour tout x de I , la fonction $\varphi(x) = y(x)e^{-A(x)}$. On va prouver que φ est constante. En effet, pour tout x :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= y'(x)e^{-A(x)} - a(x)y(x)e^{-A(x)} \\ &= e^{-A(x)}(y'(x) - a(x)y(x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, φ est bien constante. Donc il existe un réel k tel que pour tout x $\varphi(x) = k$, c'est à dire

$$y(x)e^{-A(x)} = k \iff y(x) = \frac{k}{e^{-A(x)}} = ke^{A(x)}$$

□

2.3 Déterminer des solutions particulières

2.3.1 Cas général

On l'a vu, déterminer les solutions de l'équation homogène nécessite « seulement » de trouver une primitive de a . La recherche de la solution particulière peut, en revanche, s'avérer délicate et il n'existe pas de méthode qui garantit à coup sûr la réussite de cette opération.

Lorsque le second membre s'écrit sous forme de somme de fonctions, on dispose cependant du résultat assez commode.

Proposition 7 (Principe de superposition). Soient a , b_1 et b_2 trois fonctions continues sur un intervalle I . Soient λ_1 et λ_2 deux réels.

On suppose que f_1 et f_2 sont des solutions particulières respectives de $y' - ay = b_1$ et $y' - ay = b_2$.

Alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est une solution particulière de

$$y' - ay = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

✎ Exercice 11

Prouver cette proposition.

Proposition 8 (Méthode de variation de la constante). On suppose que a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle I .

Soit A une primitive de a .

Alors f est une solution particulière si et seulement si la fonction k définie pour tout x par $k(x) = f(x)e^{-A(x)}$ vérifie

$$k'(x) = b(x)e^{-A(x)}$$

Démonstration. On écrit, pour tout x , $f(x) = k(x)e^{A(x)}$. Dans ce cas, f est solution si et seulement si

$$\begin{aligned} f'(x) - a(x)f(x) = b(x) &\iff k'(x)e^{A(x)} + a(x)k(x)e^{A(x)} - a(x)k(x)e^{A(x)} = b(x) \\ &\iff k'(x)e^{A(x)} = b(x) \\ &\iff k'(x) = \frac{b(x)}{e^{A(x)}} \\ &\iff k'(x) = b(x)e^{-A(x)} \end{aligned}$$

□

✦ Exercice 12

Résoudre les équations différentielles

$$y' + \frac{y}{x} = 2$$

et

$$y' + \frac{y}{x} = e^{x^2}$$

Indication: Utiliser la méthode de variation de la constante

En déduire la solution de

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = 2 + e^x \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Proposition 9 (Unicité des solutions avec conditions initiales). *On reprend les mêmes hypothèses.*

Soit $\alpha \in I$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Si l'équation (E) admet des solutions alors il existe une unique solution φ telle que

$$\varphi(\alpha) = \beta$$

2.3.2 Cas particulier : le coefficient a est constant

Proposition 10 (Solutions particulières d'une équation différentielle du premier ordre à coefficient constant). *On considère une fonction b définie sur un intervalle I et un nombre $a \neq 0$.*

On s'intéresse à des solutions particulières de l'équation

$$y' - ay = b \quad (E)$$

Alors, le tableau suivant recense des solutions particulières de cette équation pour certaines formes de b

$b(t)$ est de la forme	une solution particulière est de la forme
$P(t)$ avec P un polynôme.	$Q(t)$ avec Q un polynôme.
$e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.	$Ae^{\alpha t}$ avec $A \in \mathbb{R}$.
$P(t)e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme.	$Q(t)e^{\alpha t}$ avec Q un polynôme.
$e^{\alpha t} \cos(\omega t - \varphi)$ avec $(\alpha; \omega; \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$	$e^{\alpha t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$ avec $(A; B) \in \mathbb{R}^2$

✎ Exercice 13

On considère un interrupteur ouvert, un condensateur non chargé de capacité C et une résistance R branchés en série sur un générateur de tension constante $E_0 > 0$.

En $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

On note $U(t)$ la tension aux bornes du condensateur.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $U(t)$ ainsi que la tension initiale $U(0)$.
On pourra poser $\tau = RC$.
2. En déduire l'expression de $U(t)$.
3. Au bout de combien de temps a-t-on $U(t) = \frac{E_0}{2}$?

✎ Exercice 14

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a)

$$y' + y = x^2 + 1$$

b)

$$y' + 3y = \cos(2x)$$

c)

$$y' - y = xe^{-x}$$

d)

$$y' - 3y = \sin(x)e^{-x}$$

✎ Exercice 15

Reprendre les hypothèses de l'exercice sur la charge d'un condensateur.

On suppose cette fois-ci que le générateur est sinusoïdal et délivre une tension $E_0 \cos(\omega t)$ avec $\omega \in \mathbb{R}_*^+$.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.

Donner une solution particulière de cette équation « sous la forme » $t \mapsto A \cos(\omega t - \varphi)$ en précisant, en fonction de E_0 , τ et ω , les valeurs de A et φ .

Indication: On pourra utiliser les techniques de recherche d'amplitude et de phase étudiées au chapitre 3.

3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

3.1 Structure des solutions

Proposition 11 (Équation différentielle du second ordre à coefficients constants). Soient a , b et c trois coefficients réels avec $a \neq 0$

Soit d une fonction définie sur un intervalle I .

Enfin, y désigne une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I .

On dit que l'équation

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x) \quad (E)$$

est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre d .

L'équation

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad (E_0)$$

s'appelle l'équation homogène associée à E .

Proposition 12 (Structure des solutions, principe de superposition). *L'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0) est stable par combinaison linéaire.*

D'autre part, si φ_1 et φ_2 sont deux solutions de l'équation (E) alors $\varphi_2 - \varphi_1$ est solution de l'équation homogène (E_0).

Enfin, le principe de superposition s'applique, c'est à dire que si f_1 et f_2 sont des solutions particulières respectives de $ay'' + by' + cy = d_1$ et $ay'' + by' + cy = d_2$ alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est une solution de $ay'' + by' + cy = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$.

Proposition 13 (Solutions de l'équation homogène). *Pour trouver les solutions de l'équation de l'équation homogène (E_0), on cherche à résoudre l'équation*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Cette équation s'appelle l'équation caractéristique de (E_0).

On calcule donc son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et on distingue trois cas :

- si $\Delta > 0$, alors les solutions de E_0 s'écrivent toutes

$$x \mapsto K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}$$

où r_1 et r_2 sont les racines de l'expression du second degré et $(K_1; K_2) \in \mathbb{R}^2$;

- si $\Delta = 0$, alors les solutions de E_0 s'écrivent toutes

$$x \mapsto (K_1 + K_2 x) e^{r x}$$

où r_1 et r_2 sont les racines réelles de l'expression du second degré et $(K_1; K_2) \in \mathbb{R}^2$;

- si $\Delta < 0$, alors les solutions de E_0 s'écrivent toutes

$$x \mapsto (K_1 \cos(\omega x) + K_2 \sin(\omega x)) e^{\alpha x}$$

où $\alpha = \Re(r_1) = \Re(r_2)$ et $\omega = |\Im(r_1)| = |\Im(r_2)|$ où r_1 et r_2 sont les racines complexes de l'expression et $(K_1; K_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 16

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a)

$$y'' + 9y = 18$$

b)

$$y'' + y' + y = 12 + x$$

Indication: On cherchera une solution particulière sous forme de polynôme

Proposition 14 (Unicité des solutions avec conditions initiales). *On reprend les mêmes hypothèses.*

Soit $\alpha \in I$ et $(\beta_1; \beta_2) \in \mathbb{R}^2$.

Si l'équation (E) admet des solutions alors il existe une unique solution φ telle que

$$\begin{cases} \varphi(\alpha) = \beta_1 \\ \varphi'(\alpha) = \beta_2 \end{cases}$$

3.2 Fonctions à valeurs complexes

Théorème 1 (Fonctions à valeurs complexes, dérivation). *Soit I un intervalle réel.*

On considère une application $\varphi : I \mapsto \mathbb{C}$.

On posera les applications $\Re(\varphi) : t \mapsto \Re(\varphi(t))$ et $\Im(\varphi) : t \mapsto \Im(\varphi(t))$. Ce sont des fonctions à valeurs réelles.

On dira que φ est dérivable sur I si et seulement si $\Re(\varphi)$ et $\Im(\varphi)$ le sont et dans ce cas on aura, pour tout t de I :

$$\varphi'(t) = \Re(\varphi)'(t) + i\Im(\varphi)'(t)$$



On peut montrer que la dérivation d'une fonction à valeurs complexes telle que définie plus haut donne en pratique les mêmes formules de dérivation que les fonctions à valeurs réelles. En particulier, on retrouve la dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient.

Définition 3 (Exponentielle complexe). Soient $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ deux nombres et $z = a + ib$. On pose $\exp(z) = \exp(a) \times e^{ib}$ avec les notations classiques $e^{ib} = \cos(b) + i\sin(b)$ et $\exp(a)$ l'image de a par la fonction exponentielle « normale. »

Proposition 15 (Propriétés de l'exponentielle complexe). Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 ,

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \times \exp(z_2) \qquad \exp(z_2 - z_1) = \frac{\exp(z_2)}{\exp(z_1)} \qquad \exp(nz_1) = \exp(z_1)^n$$



De cette proposition, on déduit que l'exponentielle d'un nombre complexe conserve les mêmes propriétés que l'exponentielle classique. On continuera donc d'utiliser la notation e^z .

Proposition 16 (Dérivation de $\exp(\varphi)$). Soit φ une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs complexes. Si φ est dérivable alors $\exp(\varphi) : t \mapsto \exp(\varphi(t))$ l'est aussi et, pour tout t de I on a :

$$\exp(\varphi)'(t) = \varphi'(t) \exp(\varphi(t))$$



On retrouve la même formule que pour la dérivation de $\exp(u)$ où u est une fonction à valeurs réelles « classique ».

Démonstration. Pour alléger, on pose $f = \Re(\varphi)$ et $g = \Im(\varphi)$.

On a ainsi, pour tout t :

$$\begin{aligned} \exp(\varphi)'(t) &= \left[e^{f(t)} \times (\cos(g(t)) + i\sin(g(t))) \right]' \\ &= f'(t)e^{f(t)} \cos(g(t)) - e^{f(t)} g'(t) \sin(g(t)) + i f'(t)e^{f(t)} \sin(g(t)) + i e^{f(t)} g'(t) \cos(g(t)) \\ &= e^{f(t)} [f'(t) (\cos(g(t)) + i\sin(g(t))) + i g'(t) (\cos(g(t)) + i\sin(g(t)))] \\ &= e^{f(t)} (f'(t) + i g'(t)) (\cos(g(t)) + i\sin(g(t))) \\ &= \varphi'(t) e^{f(t)} e^{ig(t)} \\ &= \varphi'(t) e^{\varphi(t)} \end{aligned}$$

□

3.3 Résolution dans les fonctions à valeurs complexes

Théorème 2 (Résolution dans \mathbb{C} de l'équation homogène, équation caractéristique). *On considère toujours a et b deux nombres réelles et l'équation différentielle homogène*

$$y'' + ay' + by = 0$$

Pour résoudre cette équation, on calcule le discriminant Δ de l'équation du second degré

$$z^2 + az + b = 0$$

- Si $\Delta = 0$, les fonctions à valeurs complexes solutions de cette équation sont les fonctions

$$\{t \mapsto (At + B)e^{rt}; (A; B) \in \mathbb{C}^2\}$$

avec r la racine double de cette équation;

- Si $\Delta \neq 0$, les fonctions à valeurs complexes solutions de cette équation sont les fonctions

$$\{t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}; (A; B) \in \mathbb{C}^2\}$$

avec r_1 et r_2 les racines de cette équation;

Proposition 17 (Principe de superposition pour les équations complexes). *φ est une solution à valeurs complexes de l'équation*

$$y'' + ay' + by = c$$

si et seulement si $\Re(\varphi)$ et $\Im(\varphi)$ sont solutions réelles des équations respectives :

$$y'' + ay' + by = \Re(c) \quad \text{et} \quad y'' + ay' + by = \Im(c)$$

Exercice 17

En exploitant ce qui précède, résoudre les équations différentielles suivantes :

a)

$$y' + y = \cos(2x)$$

b)

$$y'' + 4y = \sin(2x)$$

c)

$$y'' + y = x \cos(x)$$

3.4 Preuve de la structure des solutions de l'équation homogène (hors-programme)

L'objectif de ce paragraphe est de prouver la proposition suivante :

Lemme 1 (Solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre homogène à coefficients constants). Soient $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (E)$$

que l'on veut résoudre sur l'ensemble des fonctions à valeurs complexes.

Soient $(r_1; r_2) \in \mathbb{C}^2$ les racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec éventuellement $r_1 = r_2$.

- Si $r_1 = r_2$, alors les fonctions

$$\{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_1 t}; (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

sont les solutions de (E).

- Si $r_1 \neq r_2$, alors les fonctions

$$\{t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}; (\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\}$$

sont les solutions de (E).

Démonstration. Il est très facile de prouver que de telles fonctions sont solutions. Nous allons plutôt nous consacrer au fait que ce sont les seules solutions.

Pour ce faire, nous allons considérer une solution de E notée f et poser la fonction $\varphi : t \mapsto f(t)e^{-r_1 t}$, ce qui donne, pour tout t , $f(t) = \varphi(t)e^{r_1 t}$

On va alors montrer que φ' est solution d'une équation linéaire à coefficient constant.

Pour ce faire, on va exploiter le fait que f est une solution de l'équation différentielle. Un peu de calcul montre que, pour tout t :

$$f'(t) = (r_1 \varphi(t) + \varphi'(t))e^{r_1 t} \qquad f''(t) = (r_1^2 \varphi(t) + 2r_1 \varphi'(t) + \varphi''(t))e^{r_1 t}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} af'' + bf' + cf = 0 &\iff (ar_1^2 \varphi(t) + 2ar_1 \varphi'(t) + a\varphi''(t) + br_1 \varphi(t) + b\varphi'(t) + c\varphi(t))e^{r_1 t} = 0 \\ &\iff (ar_1^2 + br_1 + c)\varphi(t) + (2ar_1 + b)\varphi'(t) + a\varphi''(t) = 0 \\ &\iff \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right)\varphi'(t) + \varphi''(t) = 0 \text{ car } ar_1^2 + br_1 + c = 0 \end{aligned}$$

On peut facilement montrer que la somme des deux racines $r_1 + r_2$ vaut $-\frac{b}{a}$. On remplace et on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} af'' + bf' + cf = 0 &\iff (2r_1 - (r_1 + r_2))\varphi'(t) + \varphi''(t) = 0 \\ &\iff \varphi''(t) = (r_2 - r_1)\varphi'(t) \end{aligned}$$

On obtient ainsi une équation différentielle du premier ordre vérifiée par φ' .

- si la racine est double, $r_2 - r_1 = 0$ et donc, pour tout t , $\varphi''(t) = 0$, ce qui montre que $\varphi(t) = \lambda t + \mu$ avec λ et μ fixés.

On a ainsi, $f(t) = \varphi(t)e^{r_1 t} = (\lambda t + \mu)e^{r_1 t}$.

- dans le cas contraire, $r_2 - r_1 \neq 0$ on obtient, pour tout t , $\varphi'(t) = K_1 e^{(r_2 - r_1)t}$. En prenant de nouveau une primitive, on obtient $\varphi(t) = \lambda_1 e^{(r_2 - r_1)t} + \lambda_2$ avec λ_1 et λ_2 fixés.

On a ainsi, après calcul, $f(t) = \varphi(t)e^{r_1 t} = \lambda_1 e^{r_2 t} + \lambda_2 e^{r_1 t}$.

Dans les deux cas, on obtient donc l'une des formes attendues. □