Planche n° 1: Pour s'entraîner à la plage

Chercher tous les exercices jusqu'au numéro sept inclus pour la rentrée

Exercice 1

Mettre les expressions suivantes sous forme de fractions où le numérateur et le dénominateur sont factorisés puis établir leurs tableaux de signes.

a)
$$1+\frac{2}{x-4}-\frac{2}{x+4}$$

b)
$$1-\frac{9}{(x-2)^2}$$

c)
$$\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{(x-2)^3}$$

d)
$$\frac{6}{x+1}-\frac{5x}{x^2+1}$$

e)
$$1+\frac{21}{4(x-5)}+\frac{1}{4(x+1)}$$

f)
$$1+\frac{1}{6(x-1)}-\frac{7}{3(x+3)}$$

g)
$$1+\frac{154}{75(x-3)}-\frac{44}{75(x+2)}$$

h)
$$3x-3-\frac{15}{2(x-3)}-\frac{15}{2(x+1)}$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

(a) $x^2+1=2x$; (b) $x^2-x=\sqrt{2}(x+1)$; (c) $(x+1)(x^2+2x-3)=0$;

(d) $x^3=x$; (e) $x^3-39x+70=0$; (f) $x^3+6=3x+2x^2$;

(g) $x^3-2x=x^2-2$; (h) $x^3+2x^2-x=2$; (i) $x^3-x^2+x-1=0$;

(j) $x^4=2x^2$; (k) $x^4=1$; (l) $x^4+1=0$;

(m) $x^4-4x^2+3=0$; (n) $(x^3-x)^2-x^2=0$; (o) $\dfrac{1}{x}=2x+1$;

(p) $x^2=\dfrac{2}{x+1}$; (q) $\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{18}{x^2-4}$; (r) $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2-\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2=0$.

Exercice 3

Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $6x+5<-4x+3$; (b) $3x+2\geq 5x-1$; (c) $x^2<4x$;

(d) $(x+5)(x-2)\leq 0$; (e) $x(x+2)\leq 2x+6$; (f) $x^3<x$;

(g) $x^4\geq x^2$; (h) $(x^2+x+1)^2-4(x^2-x+1)^2>0$; (i) $x^4+2x^2-3<0$;

(j) $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{3}{x+2}>0$; (k) $\dfrac{x}{2-x}<1$; (l) $\dfrac{4-x}{7+x}\leq -1$;

(m) $\dfrac{2x+1}{x+1}\geq x$; (n) $\dfrac{x-2}{2x-2}<\dfrac{x-1}{x-5}$; (o) $\dfrac{x+3}{x-3}-\dfrac{x-3}{x+3}\leq\dfrac{36}{x^2-9}$.

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

a) $3e^x + 2 = 5$

b) $e^x + 2 = 1$

c) $(e^x)^2 + 2 = 1$

d) $e^{2x} + e^x = -1$

e) $e^{2x} + 2e^x = -1$

f) $e^{2x} + e^x = -1$

g) $e^{x\ln(2)} = 1$

h) $e^{2\ln(x)} = 4$

i) $\ln(x^2 + x) = 0$

j) $\ln(x) - \ln(4x) = 5$

k) $\ln(x) - \ln(x^4) = 5$

l) $\ln(x) - \ln(x^4) + \ln(3) = 0$

m) $\ln(x^2 + x) - \ln(2) = 1$

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition, puis calculer la dérivée des fonctions suivantes.

$$f_1 : x \mapsto \frac{x^2+1}{x-1} \qquad f_2 : x \mapsto \ln(x^2-1) \qquad f_3 : x \mapsto \cos(2x) - \sin(3x)$$

$$f_4 : x \mapsto \exp(x^2-1) \qquad f_5 : x \mapsto \frac{\cos^5(x)}{\ln x}$$

Exercice 6

On se place dans le plan complexe. Dans les cas suivants, préciser l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie l'équation ou le système d'équations. On pourra s'aider de dessins.

(a) $|z + \mathrm{i}| = 1$

(b) $|z| = |z - 1|$

(c) $\begin{cases} \arg\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{-\pi}{2} \\ |z| = 1 \end{cases}$

(d) $|z| = |z - 1| = 1$

Exercice 7

1. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. En remarquant que $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, calculer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

(a) $\sin(2x) = \sin(x)$;

(b) $\cos(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(c) $\cos(x) = \sin(3x)$;

(d) $\sin(x) = -\cos(x)$;

(e) $\tan(3x - \pi/5) = \tan(x + 4\pi/5)$;

(f) $\sin(2x)(\sqrt{3} + 2\sin(2x)) = 0$;

(g) $\cos^2(x) - \frac{3}{2}\cos(x) + \frac{1}{2} = 0$;

(h) $\cos(2x) + \cos(x) = 0$;

(i) $\cos(2x) - 3\cos(x) + 2 = 0$;

(j) $\cos(2x) - \sin(x) = 1$;

(k) $1 + \sqrt{3}\sin(2x) - \cos(4x) = 0$;

(l) $\sqrt{3}\tan(x) + 4\sin^2(x) = 0$;

(m) $\sin(2x) + \sin(6x) = \sin(4x)$;

(n) $6\cos(2x) - 1 = 6\tan^2(x)$;

(o) $\cos(x) > \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

(p) $\sqrt{3 - 4\cos^2(x)} > 1 + 3\sin(x)$.

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous de paramètre réel m :

(a) $(m-1)x+1=0$; (b) $2mx-3=x+5m$; (c) $x^2+mx-2m^2=0$;

(d) $x^4+2mx^2+1=0$; (e) $\dfrac{2x+1}{x+3}=m$; (f) $\dfrac{x-2m}{mx+5}=m-1$.

Exercice 10

Déterminer selon les valeurs du réel m le signe des trinômes suivants :

(a) $2x^2-mx-m^2$; (b) $mx^2+2(2m+1)x+1$.

Exercice 11

Comparer les expressions A et B suivantes :

(a) $A=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, $B=\sqrt{2}-1$; (b) $A=\sqrt{7}+3$, $B=\sqrt{3}+4$; (c) $A=\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $B=2$.

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

a) $\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-3}$

b) $\sqrt{x^2-3x-3}=x+2$

c) $\sqrt{1-2x}=x+1$

d) $\sqrt{x+1}<\sqrt{3-2x}$

e) $\sqrt{x^2+5x+3}<x+2$

f) $2-x<\sqrt{x+1}$

Exercice 13

On rappelle que la *valeur absolue* d'un réel x est définie par $|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0, \\ -x & \text{si } x<0. \end{cases}$ Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(a) $|x|=3$;

(b) $|x|=-2$;

(c) $|x|\leq 3$;

(d) $|x|\geq 3$;

(e) $|x|\geq -2$;

(f) $|x|-2\leq 4$;

(g) $|x-2|\leq 4$;

(h) $|x-2|\leq -4$;

(i) $|x^2-4|=2$;

(j) $|x^2-8x+11|=4$;

(k) $|x^2-8x+11|<4$;

(l) $|x+1|=|2x-3|$;

(m) $|1-2x|=x+1$;

(n) $|x^2-3x-3|=x+2$;

(o) $|x^2+5x+3|<x+2$;

(p) $2-x<|x+1|$;

(q) $|x|+|x+1|=2$;

(r) $|x-7|+|x-2|\leq 3$.

Formulaire des vacances, à apprendre par cœur

Lycée Richelieu
Rueil Malmaison

26 juin 2020

1 Polynômes et sommes

1.1 Polynôme du second degré à coefficients réels

1.1.1 Forme canonique

Soient a, b et c trois nombres fixés, avec $a \neq 0$.
Soit la fonction trinômiale $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.
On pose

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \frac{-b}{2a} \\ \beta & = & \frac{-b^2+4ac}{4a} \end{array}$$

Alors, pour tout x :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

On dit que l'écriture $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est la *forme canonique* de $f(x)$.

En particulier :

- la courbe représentative de f a pour sommet le point (α, β) ;
- la courbe représentative de f présente un axe de symétrie vertical d'équation $x = \alpha$;
- la fonction f admet un extrêmum en $x = \alpha$ qui vaut β et cet extrêmum est un $\begin{cases} \text{maximum} & \text{si a est négatif,} \\ \text{minimum} & \text{si a est positif;} \end{cases}$
- le tableau de variations de f s'écrit

x	$-\infty$		α		$+\infty$
si $a > 0$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$
si $a < 0$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

1.1.2 Factorisation d'un polynôme du second degré

Soient a, b et c trois nombres fixés avec $a \neq 0$.
Soit une fonction f qui à tout x associe $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$ puis on distingue trois cas :

(cas n° 1) Si $\Delta < 0$, $f(x)$ est toujours du signe de a. Dans ce cas, on ne peut pas factoriser f.

(cas n° 2) Si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe opposé à a pour x compris entre r_1 et r_2 et est du signe de a ailleurs, les valeurs de r_1 et r_2 étant :

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Dans ce cas, on dit que r_1 et r_2 sont les *racines* de f et on a, pour tout x la forme factorisée

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

(cas n° 3) Si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq r$ et s'annule pour $x = r$ avec :

$$r = \frac{-b}{2a}$$

Dans ce cas, on dit que r est la *racine double* de f et on a, pour tout x la forme factorisée

$$f(x) = a(x - r)^2$$

1.2 Somme des termes de suites et applications

Soit $q \neq 1$ un nombre et n un entier naturel :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

On en déduit la factorisation suivante :

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

Pour tout nombre entier naturel n, on note $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$. On dit que les T_n sont les *nombres triangulaires*.
On a alors la formule :

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1.3 Identités remarquables

Soient a et b deux nombres quelconques. Alors :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

2 Trigonométrie

2.1 Opérations

a, b, p et q désignent quatre nombres.

2.1.1 Opérations sur les angles, formules de base

Il faut apprendre par cœur ces formules ou être capable de les retrouver très rapidement en faisant un dessin de cercle trigonométrique.

$$\tan(a) = \frac{\sin(a)}{\cos(a)} \qquad \cos(a)^2 + \sin(a)^2 = 1 \qquad 1 + \tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$$

$$\cos(-a) = \cos(a) \qquad \sin(-a) = -\sin(a) \qquad \tan(-a) = -\tan(a)$$

$$\cos(\pi + a) = -\cos(a) \qquad \sin(\pi + a) = -\sin(a) \qquad \tan(\pi + a) = \tan(a)$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos(a) \qquad \sin(\pi - a) = \sin(a) \qquad \tan(\pi - a) = -\tan(a)$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a) \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a) \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\tan(a)}$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} + a\right) = -\sin(a) \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a) \qquad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} + a\right) = \frac{-1}{\tan(a)}$$

2.1.2 Somme

Ces formules sont également fondamentales ! Les formules avec $a - b$ se retrouvent en remplaçant b par $-b$ dans les premières formules.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

2.2 Fonctions trigonométriques

2.2.1 Mesures remarquables

On a les sinus et cosinus des angles remarquables suivants :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin(x)$	0	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(x)$	1	0	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

2.2.2 Propriétés

Les fonctions sin et cos sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
sin est impaire, cos est paire.
Ces deux fonctions sont périodiques de période 2π.
Les tableaux de variations de sin et cos sont dressés ci-après.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

x	0		$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin'(x) = \cos(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\sin(x)$	0		1	0	-1		0

La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Elle est impaire et périodique de période π.
Son tableau de variations est :

x	$-\dfrac{\pi}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$
$\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\|$	$+$	$\|$
$\tan(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$