Démonstration de l'existence de la forme canonique
Passage à la forme factorisée

20 septembre 2018

Pour tout γ et x, on connaît l'identité remarquable $(x+\gamma)^2 = x^2+2\gamma x+\gamma^2$ que l'on peut réécrire de manière équivalente :

$$x^2+2\gamma x = (x+\gamma)^2-\gamma^2 \tag{1}$$

Remarquons maintenant que, pour tout x :

$$\begin{aligned} ax^2+bx &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right) \\ &= a\left(x^2+2\times\frac{b}{2a}x\right) \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'équation 1 et en identifiant γ avec $\frac{b}{2a}$, on obtient :

$$ax^2+bx = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)$$

Finalement, pour tout x, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2+bx+c \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c \\ &= a\left(x-\frac{(-b)}{2a}\right)^2-a\times\frac{b^2}{4a^2}+c \\ &= a\left(x-\frac{(-b)}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \\ &= a\left(x-\frac{(-b)}{2a}\right)^2+\frac{(-b^2+4ac)}{4a} \end{aligned}$$

À ce stade, on pose $\begin{cases} \alpha = -\frac{b}{2a} \\ \beta = \frac{(-b^2+4ac)}{4a} \end{cases}$ et on obtient la forme canonique, pour tout x :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta \tag{2}$$

Pour obtenir la forme factorisée, on va travailler sur la forme canonique et exploiter la troisième identité remarquable, valables pour tous réels d et e :

$$d^2-e^2 = (d-e)(d+e) \tag{3}$$

Ainsi, on a prouvé que pour tout x, $f(x) = a\left(x-\frac{(-b)}{2a}\right)^2+\frac{(-b^2+4ac)}{4a}$. On en déduit, en factorisant de nouveau par a :

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[\left(x-\frac{(-b)}{2a}\right)^2+\frac{(-b^2+4ac)}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x-\frac{(-b)}{2a}\right)^2-\frac{(b^2-4ac)}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$, on obtient, pour tout x :

$$f(x) = a\left[\left(x - \frac{(-b)}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right] \tag{4}$$

Il nous faut alors faire une disjonction de cas sur le signe de Δ.

(Cas n° 1) Si $\Delta > 0$, alors on peut écrire $\Delta = \sqrt{\Delta}^2$ et l'équation 4 devient, en exploitant l'identité 3 et en réalisant une réduction au même dénominateur :

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[\left(x - \frac{(-b)}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left[\left(x - \frac{(-b)}{2a}\right) - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]\left[\left(x - \frac{(-b)}{2a}\right) + \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] \\ &= a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

On retrouve bien dans ce cas l'expression des deux racines.

(Cas n° 2) Si $\Delta = 0$, alors on peut réécrire l'équation 4 :

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[\left(x - \frac{(-b)}{2a}\right)^2 - \frac{0}{(2a)^2}\right] \\ &= a\left(x - \frac{(-b)}{2a}\right)^2 \end{aligned}$$

On retrouve dans ce cas l'expression de la racine double.

(Cas n° 3) Si $\Delta < 0$, alors, on note que le terme $\frac{\Delta}{(2a)^2}$ de l'équation 4 est strictement négatif. Ainsi, pour tout x, le terme $\left(x - \frac{(-b)}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}$ est strictement positif.
En particulier, ce terme ne peut pas s'annuler et donc ne peut pas être factorisé !