

Trigonométrie

10 novembre 2019

1. Résoudre :

a)

$$\cos(x) = \sin(x)$$

Solution: Pour tout x :

$$\begin{aligned}\cos(x) = \sin(x) &\iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \text{ ou } x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } 0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\end{aligned}$$

On obtient donc sur $] -\pi; \pi]$ les solutions $\{\frac{\pi}{4}; \frac{-3\pi}{4}\}$

b)

$$\sin(x) = \sin(2x)$$

Solution: Pour tout x :

$$\begin{aligned}\sin(x) = \sin(2x) &\iff \exists k \in \mathbb{Z} / 2x = x + 2k\pi \text{ ou } 2x = \pi - x + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = 2k\pi \text{ ou } 3x = \pi + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\end{aligned}$$

On obtient donc sur $] -\pi; \pi]$ les solutions $\{0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{-\pi}{3}\}$.

c)

$$\sin(2x) = \cos(5x)$$

Solution: Pour tout x :

$$\begin{aligned}\sin(x) = \cos(5x) &\iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(5x) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} / \frac{\pi}{2} - x = 5x + 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} - x = -5x + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} / 6x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \text{ ou } 4x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{12} - \frac{k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{-\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\end{aligned}$$

On obtient donc sur $] -\pi; \pi]$ les solutions

$$\left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{-3\pi}{12}, \frac{-7\pi}{12}, \frac{-11\pi}{12}, \frac{-\pi}{8}, \frac{-5\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \right\}.$$

d)

$$\tan(x) = -\sqrt{3}$$

Solution: On obtient sur $] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ la solution $x = \frac{-\pi}{3}$.

Toutes les solutions se déduisent à partir de la périodicité de tangente (de période π).

e)

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}$$

Solution: Pour tout x :

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} \iff \cos(x) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On obtient donc sur $] -\pi; \pi]$ les solutions $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4} \right\}$

f)

$$\cos(x) \geq \frac{1}{2}$$

Solution: Les solutions sur $] -\pi; \pi]$ sont $\left[\frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$.

g)

$$\sin^2(x) - \frac{3}{2} \geq 0$$

Solution: Pour tout x , on a :

$$\sin^2(x) - \frac{3}{2} \geq 0 \iff \sin^2(x) \geq \frac{3}{2}$$

Or, pour tout x , $|\sin(x)| \leq 1$, ce qui donne $\sin^2(x) \leq 1 < \frac{3}{2}$. En effet, sinus est borné par -1 et 1 .

Ainsi, cette inéquation n'a pas de solutions!

h)

$$\sin(x) = \tan(x)$$

Solution: Pour tout $x \notin \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned} \sin(x) = \tan(x) &\iff \frac{\sin(x) \cos(x) - \sin(x)}{\cos(x)} = 0 \\ &\iff \frac{\sin(x) (\cos(x) - 1)}{\cos(x)} = 0 \\ &\iff \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = 1 \end{aligned}$$

On obtient donc les solutions 0 et π aux multiples de 2π près.

i)

$$\cos(x) + 2 \sin(x) = 1$$

Indication: Poser $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ et exploiter les résultats du DM n° 1.

Solution: On utilise la tangente de l'angle moitié. $x = \pi$ n'est pas solution.

Pour tout x de $] -\pi; \pi[$, on pose $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On résout ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1-u^2}{1+u^2} + 2 \times \frac{2u}{1+u^2} = 1 &\iff \frac{1-u^2+4u-1-u^2}{1+u^2} = 0 \\ &\iff \frac{-2u^2+4u}{1+u^2} = 0 \\ &\iff \frac{u(u-2)}{1+u^2} = 0 \\ &\iff u = 0 \text{ ou } u = 2 \\ &\iff \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \text{ ou } \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 2 \arctan(2) \end{aligned}$$

On obtient ainsi les solutions $\{0; 2 \arctan(2)\}$

2. Étudier les deux fonctions suivantes :

- domaine de définition, de dérivabilité,
- parité, périodicité,
- tableau de variations et limites aux bornes du domaine de définition,
- courbe.

$$f: x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$g: x \mapsto \sin^2(x) + x$$

Solution: On ne détaille pas les calculs!

Étude de f :

La fonction f est :

- définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$;
- impaire;
- périodique de période π .

Pour tout x du domaine on a

$$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

Enfin, $f(x) \xrightarrow{x \geq 0} +\infty$.

On établit le tableau de variations de f sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ uniquement. Tout le reste se déduit par parité et périodicité.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	0

Étude de g :

La fonction g est :

- définie et dérivable sur \mathbb{R} ;
- ni paire, ni impaire, ni périodique.

Cependant, on peut noter que, pour tout x , $g(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} + x$.

On en déduit que $g(x + \pi) = \frac{1 - \cos(2x + 2\pi)}{2} + x + \pi = \frac{1 - \cos(2x)}{2} + x + \pi = g(x) + \pi$.

Cela signifie que, pour tout x :

$$g(x) = g(x + \pi) - \pi$$

Or, la courbe de la fonction $x \mapsto g(x + \pi) - \pi$ est la translatée de la courbe de g par un vecteur $\begin{pmatrix} -\pi \\ -\pi \end{pmatrix}$.

La courbe de g est donc invariante par translation de vecteur $\begin{pmatrix} -\pi \\ -\pi \end{pmatrix}$.

Il suffit donc d'étudier g sur $[0; \pi[$ puis de déduire toutes les propriétés par translation!

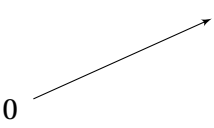
On calcule la dérivée. Pour tout x de $[0; \pi[$:

$$g'(x) = \sin(2x) + 1$$

Ainsi, la dérivée est positive pour tout x . De plus, elle s'annule en $x = \frac{3\pi}{4}$.

On en déduit le tableau de variations de la fonction sur $[0; \pi[$:

x	0	π
$g'(x)$	+	
$g(x)$	0	π



Finalement, on trace la courbe de f sur deux périodes. Et la courbe de g sur $[-\pi; \pi]$.

