

---

## Deux exercices sur les suites

---

### Suites arithmético-géométriques

Soit  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a \neq 1$ . On définit une suite  $(u_n)$  par son premier terme  $u_0$  et la relation de récurrence valable pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} = au_n + b$ .

1. On pose pour tout  $n$ ,  $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$ .
  - (a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.
  - (b) En déduire une formule explicite de  $(v_n)$ , en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $u_0$ .
2. En exploitant ce qui précède, déterminer une formule explicite de  $(u_n)$ .

### Suites définies par une récurrence d'ordre deux

Soit  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ . On définit une suite  $(u_n)$  par ses deux premiers termes  $u_0$  et  $u_1$  et la relation de récurrence  $(R_n)$  valable pour tout  $n$ ,  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ .

1.
  - (a) Montrer qu'une suite géométrique vérifie  $(R_n)$  si et seulement si sa raison est racine de l'équation  $x^2 - ax - b = 0$ .

On dira que cette équation est l'*équation caractéristique* de la suite.
  - (b) Montrer que si deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  vérifient  $(R_n)$  alors, pour tout  $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ , la suite  $(\lambda u_n + \mu v_n)$  vérifie aussi  $(R_n)$ .
2. On souhaite maintenant étudier la suite de Fibonacci  $(F_n)$  définie par  $F_0 = 1$ ,  $F_1 = 1$  et pour tout  $n$ ,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ .
  - (a) Déterminer les deux racines  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de l'équation caractéristique de  $(F_n)$ .
  - (b) Déterminer les réels  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que pour tout  $n$ ,  $F_n = \lambda_1 \alpha_1^n + \lambda_2 \alpha_2^n$ .