
Planche n° 6: Logarithme

Problèmes extraits des baccalauréats récents

Exercice 1

partiel

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x .

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) [\ln(x) - 2] + 2.$$

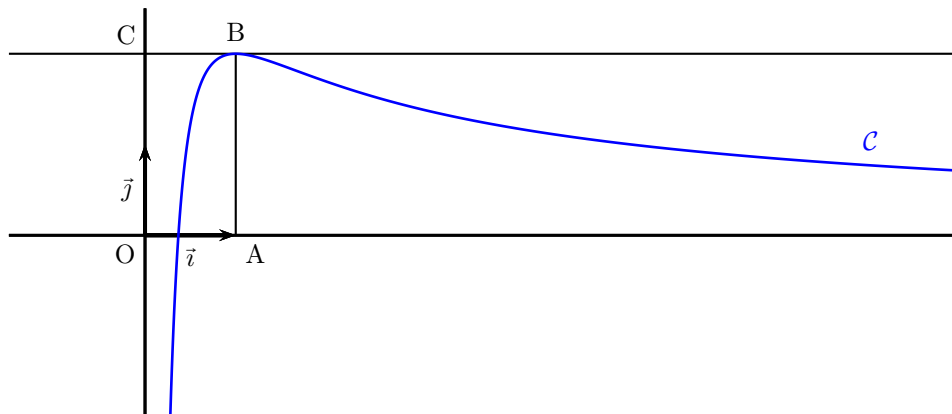
On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.
(b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Exercice 3

partiel

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe représentative \mathcal{C} d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (1, 0), (1, 2), (0, 2) ;
- la courbe \mathcal{C} passe par le point B et la droite (BC) est tangente à \mathcal{C} en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x ,

$$f(x) = \frac{a + b \ln x}{x}.$$

1. (a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
 (b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln x}{x^2}$.
 (c) En déduire les réels a et b .
2. (a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.
 (b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln x}{x}$.
 (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f .
3. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0, 1]$.
 (b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1, +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.
 Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.
4. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.				
Initialisation :	Affecter à a la valeur 0. Affecter à b la valeur 1.				
Traitement :	Tant que $b - a > 0, 1$ <table style="margin-left: 20px; border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$.</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m.</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Sinon Affecter à b la valeur m.</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">Fin de Si.</td> </tr> </table> Fin de Tant que.	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$.	Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m .	Sinon Affecter à b la valeur m .	Fin de Si.
Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a + b)$.					
Si $f(m) < 1$ alors Affecter à a la valeur m .					
Sinon Affecter à b la valeur m .					
Fin de Si.					
Sortie :	Afficher a . Afficher b .				

- (a) Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b - a$					
m					

- (b) Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?
 (c) Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1} .

Exercice 2

partiel

Les parties A et B sont indépendantes

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de $0,01$ pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».

Une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.

Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée

$0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.

Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée $0,2$ prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

- (a) Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.
- (b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leq x$, à l'aide du graphique donné plus bas, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.
Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (e - 1)x].$$

On admet que f_2 est une fonction de retouche.

On définit sur l'intervalle $[0; 1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

- (a) Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$: $g'(x) = \frac{(e - 2) - (e - 1)x}{1 + (e - 1)x}$;
- (b) Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; 1]$. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\frac{e - 2}{e - 1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est $0,12$.

- (c) Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0; 1]$ deux solutions α et β , avec $\alpha < \beta$.
 On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.
 Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables :	x (nuance initiale) y (nuance retouchée) E (écart) c (compteur) k
Initialisation :	c prend la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 0 à 100, faire x prend la valeur $\frac{k}{100}$ y prend la valeur $f(x)$ E prend la valeur $ y - x $ Si $E \geq 0,05$, faire c prend la valeur $c + 1$ Fin si
	Fin pour
Sortie :	Afficher c

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la **partie A** ?

Courbe représentative de la fonction f_1

