E.5 Logarithme

Exercice 1 — Amérique du Nord, juin 2015

Partie A

1. Les fonctions $x \mapsto x - 3$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont strictement croissantes sur l'intervalle considéré. Donc leur somme, u, l'est aussi.
2. On vérifie à la calculatrice que $u(2) < 0 < u(3)$. Or u est continue donc par application du théorème des valeurs intermédiaires, 0 possède un antécédent par u sur $[2;3]$. Comme d'autre part, u est strictement monotone, cet antécédent est unique.
3. On utilise le fait que $u(\alpha) = 0$ et que u est strictement croissante pour dresser le tableau de signes de u :

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Partie B

1. On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{-1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty$. Donc par somme et produit :

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty}$$

2. (a) On utilise la formule de dérivation d'un produit. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}[\ln(x) - 2] + \frac{1}{x}\left[1 - \frac{1}{x}\right] \\ &= \frac{1}{x^2}\left(\ln(x) - 2 + x - 1\right) \\ &= \frac{u(x)}{x^2} \end{aligned}$$

(b) On connaît le signe de u. D'autre part, on vérifie facilement, par produit et somme que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On peut donc dresser le tableau de variations de f.

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

Exercice 2 — Centres Étrangers, juin 2014

Partie A

1. (a) On calcule $f_1(0) = 0$, puis $f_1(1) = 1$. Comme f_1 est une fonction polynômiale, f_1 est continue. Enfin, il faut prouver que f_1 est croissante.
   Pour cela, on dérive f_1. Pour tout x, $f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3$. C'est une fonction trinomiale. On calcule son déterminant $\Delta = 12^2 - 4 \times 3 \times 12 = 0$. Ainsi, cette fonction est toujours positive et elle s'annule en sa racine double.
   En particulier, f_1 est bien croissante.

   (b) Les solution de cette inéquation sont les nombres de l'intervalle $[0,5;\ 1]$
   On note que la fonction de référence $x \mapsto x$ ne modifie pas l'image.
   Si on est inférieur à cette fonction, on aura tendance à éclaircir (la valeur du pixel diminue donc est plus proche du blanc). Dans le cas contraire, on a tendance à assombrir.
   Ainsi, les pâles (pour $x < 0,5$) seront assombris et les foncés (pour $x > 0,5$) seront éclaircis. En d'autre terme, cette fonction diminuera le contraste.

2. (a) Pour tout x de $[0;1]$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f_2'(x) - 1 \\ &= (\mathrm{e}-1) \times \frac{1}{1+(\mathrm{e}-1)x} - 1 \\ &= \frac{\mathrm{e}-1-(1+(\mathrm{e}-1)x)}{1+(\mathrm{e}-1)x} \\ &= \frac{\mathrm{e}-2-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x} \end{aligned}$$

   (b) On note que $\mathrm{e}-1 > 0$ et $\mathrm{e}-2 > 0$.
   Pour tout $x \geq 0$, on a ainsi $1+(\mathrm{e}-1)x \geq 1 > 0$. Le signe de g' est donc celui du numérateur.
   $g'(x)$ est positif pour $\mathrm{e}-2-(\mathrm{e}-1)x > 0 \iff \dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} > x$.
   Ainsi g est croissante sur $\left[0; \dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}\right]$ puis décroissante sur $\left[\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}; 1\right]$. D'autre part $g(0) = g(1) = 0$. Son tableau de variations est donc :

x	0		$\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$		1
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g\left(\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}\right)$	$\searrow$	0

   En particulier g admet bien un maximum en $\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$.

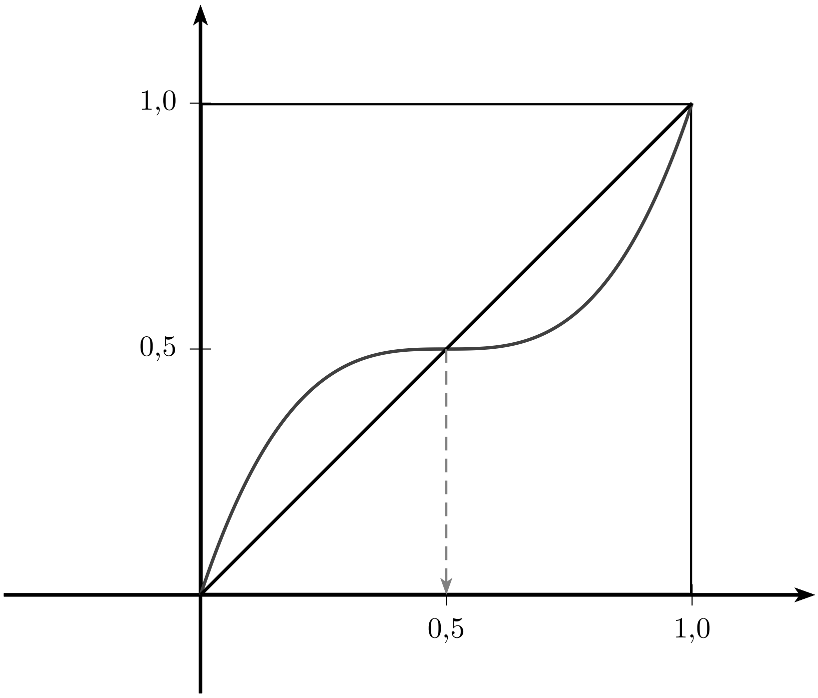
   (c) On calcule une valeur approchée par défaut de $g\left(\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}\right) \simeq 0,12$. Comme $0,05 \in [0;0,12]$, que la fonction g est continue et que $g(0) = g(1) = 0$, on en déduit que l'équation $g(x) = 0,05$ possède deux solutions : une sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}\right]$ et l'autre sur l'intervalle $\left[\dfrac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}; 1\right]$.

Partie B

1. Cet algorithme compte le nombre de nuances affectées visuellement par la retouche (dans le cas où l'écart entre la valeur d'origine et la valeur modifiée est supérieure à $0,05$).
2. On sait que $g(x) = f_2(x) - x$. Or g est positive. Ainsi, pour tout x, $|f_2(x) - x| = g(x)$. On doit donc résoudre $g(x) \geq 0,05$ et déterminer le nombre de nuances dans cet intervalle de solutions.

   On a vu plus haut que l'intervalle des solutions est $[\alpha; \beta]$. Or la largeur de cet intervalle $\beta - \alpha$ est comprise strictement entre $0,86 - 0,08 = 0,78$ et $0,85 - 0,09 = 0,76$. Il y a donc exactement 77 nuances sur 100 affectées par la fonction de retouche.

Courbe représentative de la fonction f_1



> Cet exercice très particulier présentait des notions intéressantes de traitement d'image. Pour un élève n'ayant aucune notion de la manière dont sont codées les images en noir et blanc, il s'avérait extrêmement délicat d'interpréter les calculs ou l'algorithme proposé.

Exercice 3 — Métropole, juin 2013

1. (a) $f(1)$ est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 1, on lit $f(1) = 2$.

   $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1. On lit $f'(1) = 0$.

   (b) Il faut dériver f. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{b}{x}\right)x - (a + b\ln(x)) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{b - a - b\ln(x)}{x^2} \end{aligned}$$

(c) On sait que $f(1) = 2$ or $f(1) = \dfrac{a + b\ln(1)}{1} = a$. Ainsi $a = 2$.

D'autre part, $f'(1) = 0$ or $f'(1) = \dfrac{b - a - b\ln(1)}{1^2} = b-a$. Ainsi, on obtient $b-a = 0$, c'est à dire $\boxed{b = a = 2}$.

2. (a) À partir des valeurs de a et b qui viennent d'être calculées, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{-2\ln(x)}{x^2}$.
Comme le dénominateur est strictement positif, on en déduit que $f'(x)$ est du signe de $-2\ln(x)$, c'est à dire du signe de $-\ln(x)$.

(b) En 0^+, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty$.
On en déduit, par somme et produits :

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty}$$

On exploite l'indication pour lever l'indétermination en $+\infty$:
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln(x)}{x} = 0$, par croissance comparée, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$.
On obtient donc, par somme :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

(c) On a $f'(x)$ positif $\iff \ln(x) < 0 \iff x < 1$.
D'autre part, $f(1) = 2$. On peut donc dresser le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	2	↘ 0	

3. (a) C'est une application du théorème de valeurs intermédiaires : f est continue, $1 \in]-\infty; 2]$, et f est strictement monotone sur l'intervalle $]0; 1]$. Ainsi 1 possède un unique antécédent par f sur $]0; 1]$.

(b) Avec les mêmes arguments, sachant que $1 \in]0; 2]$, on en déduit que 1 possède un autre antécédent sur $[1; +\infty[$.
On fait un tableau de valeurs à la calculatrice et on en déduit que $5 < \beta < 6$.

4. (a) Pour « faire tourner » l'algorithme et afficher les valeurs intermédiaires de a, b, $b-a$ et m, on insère des instructions d'affichages au sein de la boucle et on utilise la fonction `Pause`. Avant de lancer le programme, il faut avoir préalablement défini la fonction Y_1 =`(2+2*ln(X))/X`
L'algorithme à la `TI` peut s'écrire de cette manière :

```
:0 → A
:1 → B
:While B-A>0.1
:(A+B)/2 → M
:Disp A, B, B-A, M
:Pause
:If Y1(M)<1
:Then
:M → A
:Else
:M → B
```

```
:End
:End
:Disp A, B, B-A, M
```

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0.25	0.375	0.4375
b	1	0.5	0.5	0.5	0.5
$b-a$	1	0.5	0.25	0.125	0.0625
m	0.5	0.25	0.375	0.4375	

(b) Elles représentent les valeurs successives des approximations par défaut et excès de α obtenues par dichotomie.

(c) Ici, les valeurs initiales de a et b sont modifiées ainsi que le test sur m car la fonction est décroissante sur l'intervalle considéré.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels.
Initialisation :	Affecter à a la valeur 5. Affecter à b la valeur 6.
Traitement :	Tant que $b-a>0,1$: Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$. Si $f(m)>1$: Affecter à a la valeur m. Sinon : Affecter à b la valeur m. Fin de Si. Fin de Tant que.
Sortie :	Afficher a. Afficher b.