Planche n° 1 bis : Le cauchemar continue

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $(x+1)^2 = 3(x+1)$

b) $x^2 + x \geq -1$

c) $(x+3)^2 \geq \dfrac{1}{4}(x-1)^2$

d) $x^3 \geq 3x^2 + 2x$

e) $\dfrac{1}{(x-3)} < \dfrac{(x+1)}{(x-3)^2}$

f) $\dfrac{6}{(x+1)^2} \geq \dfrac{1}{(x-1)}$

g) $\sqrt{x^2-4} = (x-2)$

h) $\sqrt{x^2+3x-4} \leq (x-5)$

i) $|x+2| = 4$

j) $|x^2+2x| \leq 3$

k) $|x^2-5x| \geq 3x$

l) $\sqrt{x^2-x-5} \geq x-3$

m) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}} \geq 3$

n) $|x+3| \leq x-1$

o) $\dfrac{3}{(x-1)^2} \leq -1$

p) $\dfrac{|x+1|}{x-1} < 4$

Planche n° 1 bis : Indications succinctes et réponses

a) Annuler l'un des membres et factoriser. On obtient : $\{-1;\ 2\}$

b) Annuler l'un des membres et chercher le signe à l'aide du discriminant. On obtient $\mathbb{R}$.

c) Annuler l'un des membres et factoriser puis chercher le signe à l'aide d'un tableau de signes ou des résultats sur le second degré. On obtient : $]-\infty;\ -7] \cup \left[\frac{-5}{3};\ +\infty\right[$

d) Annuler l'un des membres et factoriser puis chercher le signe à l'aide d'un tableau de signes. On obtient : $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{2};\ 0\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{17}}{2};\ +\infty\right[$.

e) Annuler l'un des membres, réduire au même dénominateur, puis déterminer le signe. On obtient : $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

f) Annuler l'un des membres, réduire au même dénominateur, puis déterminer le signe. On obtient : $]-\infty;\ 1[\setminus \{-1\}$

g) Étudier le domaine de validité de l'expression puis raisonner par implications successives. À la fin, vérifier la validité de la solution. On obtient : $\{2\}$

h) Étudier le domaine de validité de l'expression puis faire une disjonction de cas sur le signe de $(x-5)$. On obtient $\emptyset$.

i) Utiliser l'équivalence suivante $|y| = 4 \iff y = 4$ ou $y = -4$. On obtient, en prenant la réunion des solutions des deux équations, $\{2;\ -6\}$

j) Utiliser l'équivalence suivante $|y| \leq 3 \iff y \leq 3$ et $y \geq -3$. On obtient en prenant l'intersection des solutions des deux inéquations, $[-3;\ 1]$.

k) Utiliser la définition de valeur absolue en tant que racine. On obtient $]-\infty;\ 2] \cup [8;\ +\infty[$.

l) On vérifie le domaine de validité puis on fait une disjonction de cas sur le signe de $x-3$.
On obtient $\left]-\infty;\ \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{21}}{2};\ +\infty\right[$.

m) Toujours avec les mêmes techniques, on obtient $\left]2;\ \frac{19}{8}\right]$.

n) Même technique, on obtient $\emptyset$. On aurait pu s'en douter car, pour tout x, $|x+3| \geq x+3 > x-1$.

o) Cette inéquation n'a pas de solutions puisque, pour tout $x \neq 1$, $\frac{3}{(x-1)^2} \geq 0$.

p) Après d'affreux calculs, on obtient $]-\infty;\ 1[\cup \left]\frac{5}{3};\ +\infty\right[$.

Voici les instructions `XCas` permettant de vérifier les résultats des dix premières.

Console

resoudre((x+1)^2=3*(x+1),x)

$$[-1, 2]$$

resoudre(x^2+x >= -1,x)

$$[x]$$

resoudre((x+3)^2 >= (1/4)*(x-1)^2,x)

$$[x \leq -7, x \geq \frac{-5}{3}]$$

resoudre(x^3 >= 3x^2+2x, x)

$$[((\mathrm{x}>=(1/2^*(3\text{-}\mathrm{sqrt}(17))))\ \mathrm{and}\ (\mathrm{x}<=0)), x \geq (\frac{1}{2}(3+\sqrt{17}))]$$

resoudre(1/(x-3) < (x+1)/((x-3)^2),x)

$$[x < 3, x > 3]$$

resoudre(6/((x+1)^2) >= 1/(x-1),x)

$$[x < -1, ((\mathrm{x}>-1)\ \mathrm{and}\ (\mathrm{x}<1))]$$

resoudre(sqrt(x^2-4) =(x-2),x)

$$[2]$$

resoudre(sqrt(x^3+3*x-4)<=(x-5),x)

$$[]$$

resoudre(abs(x^2+2*x)<=3,x)

$$[((\mathrm{x}>=-3)\ \mathrm{and}\ (\mathrm{x}<=1))]$$

?