Devoir sur table du 25 mai 2019
TSI 1

Le barème est indicatif. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre de son choix.

On sera attentif à la précision de la rédaction et au soin de la copie.

Exercice 1 — 4 points

On note $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2×2 à coefficients réels.

On rappelle que si A et B sont deux éléments de $M_2(\mathbb{R})$ tels que $A \times B = B \times A$ alors, pour tout nombre entier n :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Dans toute la suite, on note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Enfin, α et β désignent deux nombres fixés et M la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

L'objectif de cette exercice est de déterminer quelques propriétés de la matrice M.

1. Exprimer M en fonction de I, J, α et β.

   Solution: On a $M = \alpha I + \beta J$

2. (a) Expliquer pourquoi I et J commutent.

   Solution: On vérifie $IJ = JI = J$ car I est la matrice identité.

   (b) Rappeler pour tout entier n l'expression de I^n.

   Solution: On vérifie que, pour tout entier n, $I^n = I$.

   (c) Préciser pour tout entier n l'expression de J^n. On distinguera les cas $n = 0$, $n = 1$ et $n > 1$.

   Solution: Un petit calcul montre que $J^2 = 0$. Ainsi, pour tout $k \geq 2$, $J^k = 0$. En outre, $J^1 = J$ et $J^0 = I$.

   (d) En exploitant la formule du binôme rappelée en préliminaire, déterminer les coefficients de M^n en fonction de α, β et n.

Solution: On a

$$\begin{aligned}
M^n &= \left(\alpha I + \beta J\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} I^{n-k} \beta^k J^k \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} I^{n-k} \beta^k J^k \\
&= \alpha^n I + \binom{n}{1} \alpha^{n-1} \beta J \\
&= \alpha^n I + n\alpha^{n-1} \beta J
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$M^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}\beta \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

3. À quelle condition sur α et β la matrice M est-elle inversible ? Déterminer, dans ce cas, l'expression de M^{-1}.

Solution: Cette matrice est inversible si et seulement si son rang est 2, c'est à dire lorsque son déterminant est non nul.
Ainsi, M est inversible si et seulement si $\alpha^2 \neq 0 \iff \alpha \neq 0$.
Pour déterminer l'inverse, il faut résoudre, pour tout vecteur $Y \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ le système $MX = Y$.
Une résolution de système donne :

$$M^{-1} = \frac{1}{\alpha^2} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Exercice 2 — 2 points

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels. On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

Soit p un entier naturel non nul. On dit qu'une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente d'indice p* lorsque $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$.

Dans toute la suite, on considère une telle matrice M nilpotente d'indice p.

1. (a) Montrer que si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible alors, pour tout entier $k \geq 1$, A^k est également inversible et d'inverse $\left(A^{-1}\right)^k$.

Solution: C'est très simple. On a

$$A^k \times \left(A^{-1}\right)^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{A^{-1} \times \cdots \times A^{-1}}_{k \text{ fois}} = I_n$$

Ainsi, A^k est bien inversible et d'inverse $\left(A^{-1}\right)^k$.

(b) Montrer que M n'est pas inversible.
On pourra raisonner par l'absurde en exploitant ce qui précède ou bien examiner le noyau de M.

> **Solution:** Si M était inversible, M^p le serait aussi, ce qui est absurde puisque $M^p = 0$ n'est pas inversible !

2. (a) Montrer que $X^p - 1 = (X-1) \times \left(\sum_{k=0}^{p-1} X^k\right)$.

> **Solution:** On calcule :
>
> $$\begin{aligned} (X-1) \times \left(\sum_{k=0}^{p-1} X^k\right) &= X\sum_{k=0}^{p-1} X^k - \sum_{k=0}^{p-1} X^k \\ &= \sum_{k=1}^{p} X^k - \sum_{k=0}^{p-1} X^k \\ &= X^p - 1 \end{aligned}$$

(b) En déduire que $M - I_n$ est inversible. Préciser l'expression de son inverse.

> **Solution:** On évalue l'égalité polynomiale précédente pour $X = M$. Ainsi, en remarquant que $M^p = 0$, on obtient :
>
> $$\begin{aligned} M^p - I_n = (M - I_n) \times \left(\sum_{k=0}^{p-1} M^k\right) &\iff -I_n = (M - I_n) \times \left(\sum_{k=0}^{p-1} M^k\right) \\ &\iff I_n = (M - I_n) \times \left(-\sum_{k=0}^{p-1} M^k\right) \end{aligned}$$
>
> On en déduit que $M - I_n$ est inversible et d'inverse $\left(-\sum_{k=0}^{p-1} M^k\right)$.

Exercice 3 (adapté d'une épreuve du CCP) **7 points**

Exercice 4 (adapté d'une épreuve de l'Agro) **7 points**

Notations

Dans cet exercice, on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Pour plus de commodité dans les notations, on identifiera polynômes et fonctions polynomiales. Enfin, si A est un polynôme et n un entier naturel, on note $A^{(n)}$ la dérivée n-ième de A.

Soit n un entier naturel, on pose $F_n[X] = \dfrac{1}{2^n n!}(X-1)^n(X+1)^n$, et $P_n = F_n^{(n)}$.

Enfin, pour $k \in [\![0;\ n]\!]$, on définit le polynôme $B_{n,k}$ par $B_{n,k}[X] = (X+1)^k(X-1)^{n-k}$.

Partie A : questions préliminaires

1. On rappelle que k est un entier tel que $0 \leq k \leq n$.
   (a) Démontrer, par récurrence sur k, que la dérivée k-ième de X^n est $\dfrac{n!}{(n-k)!}X^{n-k}$.

Solution: La formule est valide pour $k = 0$. On la suppose vraie pour un certain rang $k < n$.

Au rang $k+1$:

$$\begin{aligned}\left(X^n\right)^{(k+1)} &= \left(\left(X^n\right)^{(k)}\right)' \\ &= \left(\frac{n!}{(n-k)!}X^{n-k}\right)' \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}\times(n-k)\times X^{n-k-1} \qquad = \frac{n!}{(n-(k+1))!}X^{n-(k+1)}\end{aligned}$$

Cette formule est donc aussi héréditaire. Ainsi, elle est vraie pour tout entier k compris entre 0 et n.

(b) Déterminer, sans les prouver, l'expression de la dérivée k-ième de $(X+1)^n$ ainsi que celle de $(X-1)^n$.

Solution: En exploitant la question précédente ainsi que la formule de la dérivée de la composée d'un polynôme :

$$\left((X+1)^n\right)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}(X+1)^{n-k} \qquad \text{et} \qquad \left((X-1)^n\right)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k}$$

2. Soient A et B deux polynômes. Démontrer, par récurrence sur n, la formule de Liebnitz

$$(AB)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{(k)}B^{(n-k)}$$

Solution: La formule est vraie pour $n=0$. On la suppose vraie pour un certain rang n. Au rang suivant, on obtient, en exploitant la formule de la dérivée d'un produit, la formule du triangle de Pascal et quelques manipulations de sommes :

$$\begin{aligned}(AB)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{(k)}B^{(n-k)}\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(A^{(k)}B^{(n-k)})' \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{(k+1)}B^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{(k)}B^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}A^{(k)}B^{(n-(k-1))} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^{(k)}B^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)A^{(k)}B^{(n+1-k)} + \binom{n}{0}A^{(0)}B^{(n+1)} + \binom{n}{n}A^{(n+1)}B^{(0)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}A^{(k)}B^{(n+1-k)}\end{aligned}$$

En effet, $\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1$ et $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}=1$.
Ainsi, cette formule est initialisée et héréditaire. On en déduit qu'elle est vraie pour tout n.

Partie B : étude du polynôme $\mathbf{P_n}$

1. (a) Sans le justifier, préciser le degré de F_n et son coefficient dominant.

Solution: Le degré de F_n est $2n$. Son coefficient dominant est $\dfrac{1}{2^n n!}$.

(b) En déduire le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.

Solution: Le terme dominant de P_n est donc $\dfrac{1}{2^n n!} \times (X^{2n})^{(n)} = \dfrac{(2n)!}{2^n n! \times n!} X^{2n-n}$ d'après les résultats préliminaires.

Ainsi, le degré de P_n est n et son coefficient dominant est $\dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.

2. (a) En utilisant les résultats de la partie A, démontrer que $P_n[X] = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 B_{n,k}[X]$.

Solution: On dérive P_n en utilisant la formule de Liebnitz :

$$\begin{aligned}
F_n^{(n)}[X] &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left((X+1)^n\right)^{(k)} ((X-1))^{(n-k)} \\
&= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{n!}{(n-(n-k))!} (X+1)^{n-k} (X-1)^{n-(n-k)} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{n!}{(n-k)!k!} (X+1)^{n-k} (X-1)^{n-(n-k)} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X+1)^{n-k} (X-1)^{n-(n-k)}
\end{aligned}$$

C'est presque la formule attendue. Il suffit juste de faire un changement de variable $k' = n-k$ dans la somme, en remarquant que $\binom{n}{(n-k')} = \binom{n}{k'}$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
P_n[X] &= F_n^{(n)}[X] \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k'=0}^{n} \binom{n}{k'}^2 (X+1)^{k'} (X-1)^{n-k'} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k'=0}^{n} \binom{n}{k'}^2 B_{n,k'}[X]
\end{aligned}$$

(b) En déduire les valeurs de $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

Solution: Pour tout $k \in [\![1;\ n-1]\!]$, $B_{n,k}(1) = B_{n,k}(-1) = 0$. Presque tous les termes de la somme seront donc nuls.

De plus, $B_{n,0}(1) = 0$, $B_{n,0}(-1) = (-2)^n$, $B_{n,n}(1) = 2^n$, $B_{n,n}(-1) = 0$.

On obtient ainsi :

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n}\sum_{k'=0}^{n}\binom{n}{k'}^2 B_{n,k'}(1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{n}^2 2^n = 1 \qquad \text{et} \qquad P_n(-1) = (-1)^n$$

(c) Déterminer également la parité de P_n en fonction de n.

Solution: Pour tout $k \in [[0;\ n]]$, $B_{n,k}[-X] = (-1)^k(X-1)^k(-1)^{n-k}(X+1)n-k = (-1)^n B_{n,n-k}[X]$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} P_n[-X] &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 B_{n,k}[-X] \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 B_{n,n-k}[X] \end{aligned}$$

Encore une fois, un changement de variable $k' = n-k$ permet d'obtenir :

$$P_n[-X] = (-1)^n P_n[X]$$

On en déduit que P_n est pair si et seulement si n est pair et que P_n est impair dans le cas contraire. On aurait aussi pu traiter cette question plus simplement en remarquant que F_n est pair, et que la parité s'inverse à chaque fois que l'on dérive. Ce qui signifie que $P_n = (F_n)^{(n)}$ est bien de la même parité que n. Mais cette technique est à la limite du programme.

3. On suppose ici que n est non nul. Soit $p \in [[0;\ n-1]]$.

(a) Démontrer que $F_n^{(p)}[X] = \dfrac{p!}{2^n n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{p-k}\binom{n}{k}B_{2n-p,n-k}[X]$.

Solution: Appliquons les mêmes techniques que précédemment, c'est à dire la formule de Liebnitz :

$$\begin{aligned} F_n^{(p)}[X] &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\left((X+1)^n\right)^{(k)}\left((X-1)^n\right)^{(p-k)} \\ &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{p}\frac{p!}{k!(p-k)!}\,\frac{n!}{(n-k)!}(X+1)^{n-k}\frac{n!}{(n-(p-k))!}(X-1)^{n-(p-k)} \text{ on réarrange les fractions :} \\ F_n^{(p)}[X] &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{p}p!\frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{n!}{(p-k)!(n-(p-k))!}(X+1)^{n-k}(X-1)^{n-(p-k)} \text{ on obtient ainsi :} \\ &= \frac{p!}{2^n n!}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n}{p-k}(X+1)^{n-k}(X-1)^{n-(p-k)} \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que

$$B_{2n-p,n-k}[X] = (X+1)^{n-k}(X-1)^{2n-p-(n-k)} = (X+1)^{n-k}(X-1)^{n-(p-k)}$$

On retrouve ainsi le résultat de l'énoncé.

(b) En déduire que $F_n^{(p)}(1) = F_n^{(p)}(-1) = 0$.

> **Solution:** Pour tout $k \in [\![0;\ p]\!]$, $B_{2n-p,n-k}(1) = B_{2n-p,n-k}(1) = 0$ pour des raisons similaires à celles exposées plus haut. Ainsi, $F_n^{(p)}(1) = F_n^{(p)}(-1) = 0$

(c) En exploitant le théorème de Rolle plusieurs fois, montrer que P_n possède n racines distinctes dans l'intervalle $]-1;\ 1[$.

> **Solution:** On va exploiter le théorème de Rolle sur les dérivées successives de F_n.
> On va ainsi montrer par récurrence que $F_n^{(k)}$ possède au moins k racines distinctes dans $]-1;\ 1[$ pour tout $k \in [\![1;\ n]\!]$.
> 1 et -1 sont des racines de F_n donc par le théorème de Rolle, il existe α dans $]-1;\ 1[$ tel que $F_n'(\alpha) = 0$. Cela initialise la propriété pour $k = 0$ et $k = 1$.
> On suppose que, pour un certain $k \in [\![1;\ n-1]\!]$, $F_n^{(k)}$ possède k racines distinctes dans $]-1;\ 1[$. Notons $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$ ces racines. On sait également que 1 et -1 sont des racines de $F_n^{(k)}$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle $k+1$ fois : sur $]-1;\ \alpha_1[$, sur $]\alpha_1;\ \alpha_2[$, ..., et sur $]\alpha_k;\ 1[$. On obtient donc bien $k+1$ racines distinctes dans $]-1;\ 1[$ pour $\left(F_n^{(k)}\right)' = F_n^{(k+1)}$. La propriété est donc bien héréditaire. On en déduit que $P_n = (F_n)^{(n)}$ possède n racines distinctes entre -1 et 1. Et comme P_n est de degré n, ce sont là toutes les racines de P_n.

(d) ♣ Déterminer la valeur de la somme des racines de P_n.

> **Solution:** On utilise le lien entre les coefficients de P_n et la somme des racines.
> Notons c_n et c_{n-1} les coefficients de degrés n et $n-1$ de P_n. On sait que la somme des racines vaut $\dfrac{-c_{n-1}}{c_n}$. On connaît c_n. Reste à calculer c_{n-1}. Pour cela, on détermine la forme développée de F_n :
>
> $$F_n[X] = \frac{1}{2^n n!}(X^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}X^{2k}$$
>
> On en déduit que le coefficient de degré $2n-1$ de F_n est nul. Ainsi, en dérivant n fois, on anticipe que le coefficient de degré $n-1$ de P_n sera nul. Par suite, la somme des racines de P_n sera nulle.
> On aurait également pu exploiter la parité de P_n pour aborder cette question !