Devoir sur table du 25 mai 2019
TSI 1

Le barème est indicatif. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre de son choix.

On sera attentif à la précision de la rédaction et au soin de la copie.

Exercice 1 — 4 points

On note $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2×2 à coefficients réels.

On rappelle que si A et B sont deux éléments de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ tels que $A \times B = B \times A$ alors, pour tout nombre entier n :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Dans toute la suite, on note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Enfin, α et β désignent deux nombres fixés et M la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

L'objectif de cette exercice est de déterminer quelques propriétés de la matrice M.

1. Exprimer M en fonction de I, J, α et β.
2. (a) Expliquer pourquoi I et J commutent.
   (b) Rappeler pour tout entier n l'expression de I^n.
   (c) Préciser pour tout entier n l'expression de J^n. On distinguera les cas $n = 0$, $n = 1$ et $n > 1$.
   (d) En exploitant la formule du binôme rappelée en préliminaire, déterminer les coefficients de M^n en fonction de α, β et n.
3. À quelle condition sur α et β la matrice M est-elle inversible ? Déterminer, dans ce cas, l'expression de M^{-1}.

Exercice 2 — 2 points

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels. On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

Soit p un entier naturel non nul. On dit qu'une matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente d'indice p* lorsque $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$.

Dans toute la suite, on considère une telle matrice M nilpotente d'indice p.

1. (a) Montrer que si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible alors, pour tout entier $k \geq 1$, A^k est également inversible et d'inverse $\left(A^{-1}\right)^k$.
   (b) Montrer que M n'est pas inversible.
   On pourra raisonner par l'absurde en exploitant ce qui précède ou bien examiner le noyau de M.
2. (a) Montrer que $X^p - 1 = (X-1) \times \left(\sum_{k=0}^{p-1} X^k \right)$.
   (b) En déduire que $M - I_n$ est inversible. Préciser l'expression de son inverse.

Exercice 3 (adapté d'une épreuve du CCP) **7 points**

On s'intéresse dans un premier temps à la limite de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

On cherche ensuite, par deux méthodes, des approximations de π.

Partie A : questions préliminaires

1. Soit q un réel et n un entier naturel. Rappeler, sans preuve, une expression simplifiée de la somme $\sum_{k=0}^{n} q^k$. On distinguera le cas $q = 1$.
2. On rappelle que arctan désigne la fonction arctangente.
   Donner, sans justification l'ensemble de définition, de dérivabilité, la parité, l'expression de la dérivée, le tableau de variations ainsi que les limites aux bornes de l'ensemble de définition de cette fonction.

Partie B : étude de la limite de (S_n)

On définit la suite (I_k) par $\forall k \in \mathbb{N},\ I_k = \int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t$

1. Calculer I_k pour $k \in \mathbb{N}$ puis l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.
2. Justifier que $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k$ puis, en utilisant la partie A, en déduire que :

$$S_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2n+3}$$

4. À l'aide des trois questions précédentes, montrer que (S_n) admet une limite finie dont on déterminera la valeur.

Partie C : un procédé élémentaire d'approximation de π

1. Démontrer à l'aide de la partie précédente que, pour tout entier naturel n,

$$|4S_n - \pi| \leq \frac{4}{2n+3}$$

2. Écrire un algorithme en `Python` qui permet d'obtenir une approximation de π à 10^{-6} près.

Exercice 4 (adapté d'une épreuve de l'Agro) **7 points**

Notations

Dans cet exercice, on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Pour plus de commodité dans les notations, on identifiera polynômes et fonctions polynomiales. Enfin, si A est un polynôme et n un entier naturel, on note $A^{(n)}$ la dérivée n-ième de A.

Soit n un entier naturel, on pose $F_n[X] = \dfrac{1}{2^n n!}(X-1)^n(X+1)^n$, et $P_n = F_n^{(n)}$.

Enfin, pour $k \in [\![0;\ n]\!]$, on définit le polynôme $B_{n,k}$ par $B_{n,k}[X] = (X+1)^k(X-1)^{n-k}$.

Partie A : questions préliminaires

1. On rappelle que k est un entier tel que $0 \leq k \leq n$.
   (a) Démontrer, par récurrence sur k, que la dérivée k-ième de X^n est $\dfrac{n!}{(n-k)!}X^{n-k}$.
   (b) Déterminer, sans les prouver, l'expression de la dérivée k-ième de $(X+1)^n$ ainsi que celle de $(X-1)^n$.
2. Soient A et B deux polynômes. Démontrer, par récurrence sur n, la formule de Liebnitz

$$(AB)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{(k)} B^{(n-k)}$$

Partie B : étude du polynôme $\mathbf{P_n}$

1. (a) Sans le justifier, préciser le degré de F_n et son coefficient dominant.
   (b) En déduire le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.
2. (a) En utilisant les résultats de la partie A, démontrer que $P_n[X] = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 B_{n,k}[X]$.
   (b) En déduire les valeurs de $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
   (c) Déterminer également la parité de P_n en fonction de n.
3. On suppose ici que n est non nul. Soit $p \in [\![0;\ n-1]\!]$.
   (a) Démontrer que $F_n^{(p)}[X] = \dfrac{p!}{2^n n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{p-k}\binom{n}{k} B_{2n-p,n-k}[X]$.
   (b) En déduire que $F_n^{(p)}(1) = F_n^{(p)}(-1) = 0$.
   (c) En exploitant le théorème de Rolle plusieurs fois, montrer que P_n possède n racines distinctes dans l'intervalle $]-1;\ 1[$.
   (d) ♣ Déterminer la valeur de la somme des racines de P_n.