Devoir sur table du 6 avril 2019
TSI 1

Le barème est indicatif. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre de son choix.

On sera attentif à la précision de la rédaction et au soin de la copie.

Exercice 1 (adapté d'une épreuve CCP) — 4 points

On cherche à résoudre sur $]0;\ 1[$, l'équation :

$$16(x^2 - x)\,y'' + (16x - 8)\,y' = 0 \qquad (E_0)$$

1. Soit $f : x \mapsto \arcsin(2x - 1)$.
   Montrer que f est définie et continue sur le segment $[0;\ 1]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]0;\ 1[$ et que :

$$\forall x \in]0;\ 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

> **Solution:** La fonction arcsin est dérivable sur $]-1;\ 1[$ donc par composition, la fonction f est dérivable lorsque $2x - 1 \in]-1;\ 1[$, c'est à dire, après résolution, pour $x \in]0;\ 1[$.
> De plus, toujours par composition, f est continue sur $[0;\ 1]$.
> Enfin, pour tout $x \in]0;\ 1[$:
>
> $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{[1-(2x-1)]\,[1+(2x-1)]}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{(2-2x)(2x)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4x(1-x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \end{aligned}$$

2. Montrer que toute fonction constante sur $]0;\ 1[$ est solution de (E_0).

> **Solution:** C'est évident! Il suffit de constater que $16(x^2 - x) \times 0 + (16x - 8) \times 0 = 0$.

3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0;\ 1\}, \quad \dfrac{16x - 8}{16(x^2 - x)} = \dfrac{1/2}{x} + \dfrac{1/2}{x-1}$.

> **Solution:** Un petit calcul de réduction au même dénominateur permet de prouver cette égalité.

4. On pose $z = y'$.
   Montrer que (E_0) est équivalente à

$$z' + \left(\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1}\right) z = 0 \qquad (E^\star)$$

> **Solution:** C'est assez évident aussi. Il suffit de constater que $z' = y''$ puis de substituer z à y' et z' à y''.

5. Résoudre $(E^\star)$ sur $]0;\ 1[$.

> **Solution:** Sur $]0;\ 1[$:
> - une primitive de $x \mapsto \dfrac{1/2}{x-1}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x-1)$;
> - une primitive de $x \mapsto \dfrac{1/2}{x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x)$.
>
> De plus, on vérifie que, pour tout $x \in]0;\ 1[$, $\mathrm{e}^{\frac{-(\ln(x)+\ln(x-1))}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$
>
> On en déduit que les solutions de $(E^\star)$ sont les fonctions
>
> $$\left\{x \mapsto \frac{K}{\sqrt{x(x-1)}};\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

6. En déduire les solutions de (E_0) sur $]0;\ 1[$.

> **Solution:** Les premières questions nous ont permis de déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$ qui est $x \mapsto \arcsin(2x-1)$.
>
> Ainsi, les solutions de (E_0) sur $]0;\ 1[$ sont :
>
> $$\left\{x \mapsto K\arcsin(2x-1) + L;\ (K;\ L) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice 2 (tiré d'une épreuve CCP) **6 points**

Les parties A et B ne sont pas indépendantes.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{12} - x + 1$.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   Solution: Avec la technique habituelle de factorisation par le terme dominant, on obtient une limite de $+\infty$.

   (b) Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$, calculer $f'(x)$ et déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$. En déduire le tableau de variations de f.

   Solution: f est dérivable en tant que fonction polynômiale. De plus, pour tout x, $f'(x) = \dfrac{x^2}{4} - 1 = \dfrac{(x-2)(x+2)}{4}$.
   On calcule $f(2) = \dfrac{2}{3} - 1 = \dfrac{-1}{3}$ et $f(0) = 1$ en enfin on peut dresser le tableau de variations de f et le tableau de signes de f' :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{-1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. (a) Montrer que f s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $[0;\ +\infty[$: une première fois sur l'intervalle $]0;\ 2[$ et une deuxième fois sur l'intervalle $]2;\ +\infty[$.

   On notera β et γ les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0;\ +\infty[$ avec $\beta < \gamma$.

   Solution: La fonction f est continue.
   Donc, par lecture du tableau de variations et application du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que f s'annule exactement deux fois : une première fois entre 0 et 2 et une seconde fois entre 2 et $+\infty$.

   (b) Simplifier l'expression $1 + \dfrac{\beta^3}{12}$ (on l'exprimera à l'aide de β).

   Solution: On sait que $f(\beta) = 0$, c'est à dire $\dfrac{\beta^3}{12} - \beta + 1 = 0$. On en déduit que $\beta = 1 + \dfrac{\beta^3}{12}$

(c) Montrer que $\beta \in \left]1;\ \frac{3}{2}\right[$ et $\gamma \in \left]\frac{5}{2};\ 3\right[$.

> **Solution:** Un peu de calcul montre que $f(1) = \frac{1}{12} > 0 > f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-7}{32}$ donc $\beta \in \left]1;\ \frac{3}{2}\right[$.
> De même, $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{-19}{96} < 0 < f(3) = \frac{1}{4}$ donc $\gamma \in \left]\frac{5}{2};\ 3\right[$.

(d) Préciser le signe de f sur $[0;\ +\infty[$.

> **Solution:** Par lecture du tableau de variations de f, on obtient :

x	0		β		γ		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. On cherche à obtenir une approximation de β. À cet effet, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n^3}{12} \end{cases}$$

(a) Calculer u_1 puis démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $[0;\ \beta]$.

> **Solution:** On calcule $u_1 = \frac{13}{12}$.
> On va montrer l'hypothèse de récurrence $P_n : u_n \in [0;\ \beta]$.
> Cette hypothèse est vraie au rang 0.
> On la suppose vraie au rang n, c'est à dire $0 \leq u_n \leq \beta$. Sachant que la fonction $x \mapsto \frac{x^3}{12} + 1$ est croissante, on en déduit
> $$\frac{0^3}{12} + 1 \leq u_{n+1} \leq \frac{\beta^3}{12} + 1$$
> Or $\frac{\beta^3}{12} + 1 = \beta$. Ainsi, on a $0 < 1 \leq u_{n+1} \leq \beta$, ce qui montre que l'hypothèse est héréditaire.
> Par récurrence, cette hypothèse est donc vraie pour tout n.

(b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$.
Que peut-on en déduire sur la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

> **Solution:** Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^3}{12} + 1 - u_n = f(u_n)$.
> Comme f est positive sur l'intervalle $[0;\ \beta]$ et que $u_n \in [0;\ \beta]$, on en déduit que la suite (u_n) est croissante.

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers β.

Solution: Par application du théorème de convergence monotone, (u_n) converge car elle est croissante et majorée.

De plus, comme la fonction $x \mapsto \dfrac{x^3}{12}+1$ est continue, elle converge vers un point fixe de cette fonction. Or un point fixe de cette fonction est solution de $f(x)=0$. La suite converge donc vers β ou γ. Mais elle ne peut pas converger vers γ (car $\gamma \notin [0;\ \beta]$) donc elle converge vers β.

(d) Écrire en Python un programme de quelques lignes permettant d'obtenir pour une entier N donné la valeur de u_N.

Solution: Voilà une possibilité :

```
def DST7(N):
    u=1
    for i in range(N):
        u=u**3/12+1
    return u
```

Partie B

Soit la fonction $g : x \mapsto 1+\dfrac{x^3}{12}$.

1. (a) Déterminer le maximum de $g'(x)$ pour $x \in \left[1; \dfrac{3}{2}\right]$.

Dans toute la suite, on notera K ce maximum.

Solution: g est dérivable et pour tout x, $g'(x)=\dfrac{x^2}{4}$.
La dérivée est strictement croissante qui sur $\left[1; \dfrac{3}{2}\right]$ et son maximum est donc $K = g'\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{16}$.
Notons que $0<K<1$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $0 \leq \beta - u_{n+1} \leq K(\beta-u_n)$.

Solution: On a vu dans la première partie que (u_n) était croissante et avait pour limite β donc pour tout n, $\beta - u_{n+1} \geq \beta - u_n \geq 0$.
Reste à prouver la dernière inégalité. Mais on sait que $\beta - u_{n+1} = g(\beta) - g(u_n)$ car β est un point fixe de g et d'après la définition de (u_n). Aussi, l'inégalité des accroissements finis entraîne :

$$\left|\beta - u_{n+1}\right| \leq K\left|\beta - u_n\right|$$

Or on sait que $\beta - u_{n+1} \geq 0$ et $\beta - u_n \geq 0$ donc on obtient bien la série d'inégalités recherchée.

(c) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leq \beta - u_n \leq K^n(\beta-u_0) \leq \frac{K^n}{2}$$

Solution: On sait que $\beta \in \left[1;\ \frac{3}{2}\right]$ donc $\beta - u_0 \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, la seconde inégalité $K^n(\beta - u_0) \leq \frac{K^n}{2}$ est vraie pour tout n.
Montrons la première série d'inégalités par récurrence. Elle est vraie pour $n = 0$ car $0 \leq \beta - u_0 \leq K^0(\beta - u_0)$.
On la suppose vraie pour un certain entier n. Au rang $n+1$, on a donc, d'après la question précédente :

$$0 \leq u_{n+1} - \beta \leq K(u_n - \beta)$$

Or $K(u_n - \beta) \leq K \times K^n(u_n - \beta)$ par hypothèse de récurrence. On obtient donc bien :

$$0 \leq \beta - u_{n+1} \leq K^{n+1}(\beta - u_0) \leq \frac{K^{n+1}}{2}$$

2. Écrire une fonction Python qui prend en entrée une précision $\varepsilon > 0$ et qui renvoie en sortie une approximation de β avec la précision ε.

Solution: La série d'inégalité précédente signifie que, pour tout n, u_n est proche de β avec une précision au moins égale à $\frac{K^n}{2}$.
Ainsi, le nombre n d'itérations nécessaires doit vérifie $\frac{K^n}{2} < \varepsilon$, ce qui donne, après calcul :

$$n \geq \frac{\ln(2\varepsilon)}{\ln(K)}$$

Ainsi, la valeur optimale de n est la partie entière par excès de $\frac{\ln(2\varepsilon)}{\ln(K)}$. Voilà à quoi peut ressembler le script :

```
import math as m
def DST7_2(e):
    K=9/16
    n=m.ceil(m.log(2*e)/m.log(K)) ## ceil calcule la partie entiere par exces
    u=1
    for i in range(n):
        u=u**3/12+1
    return u
```

En fait il existe des formules qui permettent de déterminer les solutions d'une équation du troisième degré. L'approche numérique proposée par l'exercice 2 ne présente donc en réalité que peu d'intérêt.

Exercice 3 — 4 points

Un texte contient n erreurs avec $n \in \mathbb{N}^*$. Un correcteur relit ce texte, détecte et corrige chaque erreur, de manière indépendante, et avec une probabilité $p \in]0;\ 1[$.
On suppose que la correction d'une erreur lui prend 30 secondes. Par ailleurs, la lecture complète du texte lui prend 10 minutes.

On note X le nombre d'erreurs détectées et corrigées, et T le temps, en minutes, passé à lire le texte et à corriger les erreurs.

1. (a) Quelle est la loi suivie par X ? *Justifier soigneusement.*

   Solution: La détection de chaque erreur est une épreuve de Bernoulli de paramètre p. On répète ces épreuves n fois de manière indépendante et on compte le nombre de succès. Ainsi, $X \sim \mathscr{B}(n;\ p)$.

   (b) Donner, pour tout $k \in [\![0;\ n]\!]$, la probabilité de l'évènement $X = k$.

   Solution: On sait que
   $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2. (a) Exprimer T en fonction de X.

   Solution: On a
   $$T = 10 + 0,5X$$

   (b) Déterminer l'espérance de T, en fonction de n et p. Comment s'interprète ce nombre ?

   Solution:
   $$E(T) = 0,5 \times E(X) + 10 = 0,5 \times n \times p + 10$$
   C'est le temps moyen passé à lire et corriger le texte.

   (c) Déterminer la variance de T, en fonction de n et p.

   Solution:
   $$V(T) = 0,5^2 \times V(X) = 0,25 \times n \times p \times (1-p)$$

3. Pour cette question uniquement, on fixe $p < 0,9$.

   On suppose maintenant que le correcteur relit et corrige m fois ce texte, avec $m \in \mathbb{N}^*$, chaque relecture étant indépendante des autres et chaque erreur ayant la même probabilité p d'être détectée pour une relecture donnée.

   On souhaite que chaque erreur ait une probabilité d'au moins 90% d'être détectée à l'issue des m relectures.

   Déterminer une formule, en fonction de p, permettant d'obtenir la valeur minimale de m.

   Solution: Pour chaque erreur, la probabilité qu'elle ne soit pas détectée à l'issue est m relectures est $(1-p)^m$. On cherche donc m tel que
   $$(1-p)^m \leq 0,1 \iff m \ln(1-p) \leq \ln(0,1) \iff m \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(1-p)}$$
   Ainsi, m doit être le premier entier supérieur ou égal à $\dfrac{\ln(0,1)}{\ln(1-p)}$. Cet entier s'appelle la partie entière par excès.

Exercice 4 (adapté d'un partiel de l'UPMC) **6 points**

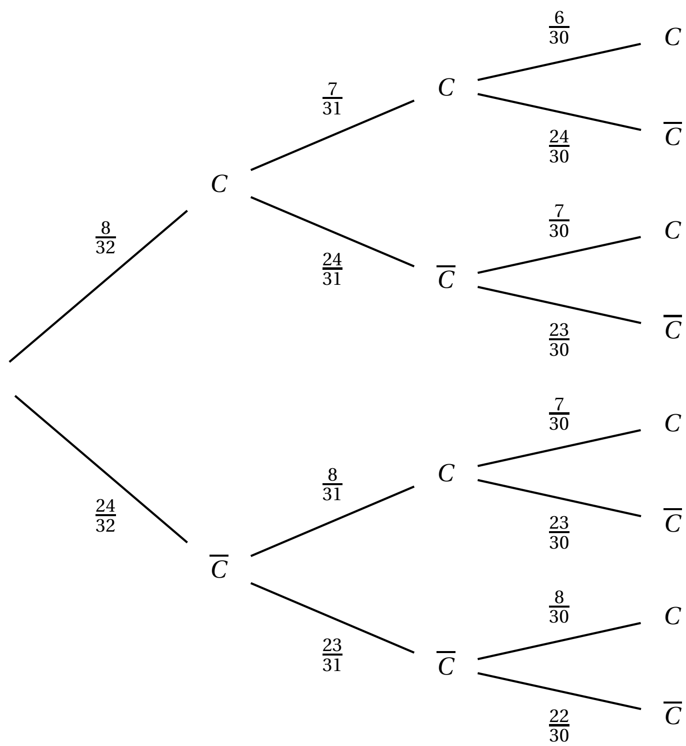
On considère un jeu de 32 cartes, contenant 8 cœurs, et mélangées de manière complètement équiprobable (toutes les cartes ont la même probabilité d'occuper une position donnée dans la pile).

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A : Étude du nombre de cœurs dans une main réduite

Un joueur prend les trois premières cartes de la pile. On note N le nombre de cœurs qu'il a obtenu.
Pour cette partie uniquement, le candidat pourra s'appuyer sur le tracé d'un arbre dont il précisera la légende.

Solution: On fait un arbre en notant, pour chaque carte tirée C si la carte est un cœur :



1. Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire N ?

Solution: N peut valoir tous les entiers de 0 à 3.

2. (a) Que signifie l'évènement $N = 0$? Déterminer sa probabilité.

Solution: $N = 0$ signifie qu'il n'a obtenu aucun cœur. Par lecture de l'arbre :

$$P(N = 0) = \frac{24 \times 23 \times 22}{32 \times 31 \times 30}$$

(b) Déterminer complètement la loi de probabilité de N.

Solution: Toujours par lecture de l'arbre et après calcul, on obtient :

k	0	1	2	3
$P(N=k)$	$\frac{24\times23\times22}{32\times31\times30}=\frac{11\times23}{4\times5\times31}$	$\frac{3\times8\times24\times23}{32\times31\times30}=\frac{3\times23}{5\times31}$	$\frac{3\times8\times7\times24}{32\times31\times30}=\frac{3\times7}{5\times31}$	$\frac{8\times7\times6}{32\times31\times30}=\frac{7}{4\times5\times31}$

Partie B : Étude du nombre de cœurs dans une main quelconque

On suppose maintenant qu'un joueur prend les n premières cartes du jeu avec $1 \leq n \leq 32$. On note N le nombre de cœurs obtenus.

1. Décrire un univers équiprobable Ω pour cette expérience. Préciser son cardinal.

Solution: Il y a deux possibilités selon que l'on considère que l'ordre des cartes est important ou pas. Ici, on va, pour simplifier, ignorer l'ordre des cartes.

Ainsi l'univers équiprobable choisi est formé de toutes les mains de n cartes choisies parmi les 32. Son cardinal est $\binom{32}{n}$

2. Soit un entier $k \in [\![0;\ n]\!]$. Déterminer le cardinal de l'évènement $N = k$.
On pourra distinguer le cas $k > 8$.

Solution: Si $k > 8$, le cardinal est nul (impossible d'obtenir plus de 8 cœurs).
Dans le cas contraire, il y a $\binom{8}{k}$ manières de choisir les k cœurs combinées aux $\binom{24}{n-k}$ manières de choisir les $n-k$ autres cartes. Ainsi, le cardinal de $N = k$ est $\binom{8}{k} \times \binom{24}{n-k}$.

3. En déduire la loi de N.

Solution: On a

$$P(N=k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k > 8 \\ \dfrac{\binom{8}{k} \times \binom{24}{n-k}}{\binom{32}{n}} \text{ si } k \in [\![0;\ 8]\!] \end{cases}$$

Partie C : Calcul de l'espérance du nombre de cœurs dans une main quelconque

Pour tout entier $i \in [\![1;\ 32]\!]$, on définit une variable aléatoire X_i telle que

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si la i-ème carte de la pile est un coeur} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Comment appelle-t-on une telle variable X_i ?

Solution: Une variable de Bernoulli.

2. Déterminer $P(X_1 = 1)$ puis $P(X_2 = 1)$.

> **Solution:** L'exploitation de l'arbre précédent permet de montrer, après calcul, que
> $$P(X_1 = 1) = P(X_2 = 1) = \frac{8}{31} = \frac{1}{4}$$

3. On s'intéresse maintenant, pour tout $1 \leq i \leq 32$, à la loi de X_i.

   (a) Prouver que $P(X_i = 1) = \dfrac{1}{4}$.

   > **Solution:** Cette fois ci l'univers choisi correspond à l'ensemble des manières de trier le tas de 32 cartes. Son cardinal est 32!.
   > Dans cet univers, l'évènement $X_i = 1$ est déterminé par le choix du cœur à la i-ème position et l'ordre des cartes sur les 31 positions restantes.
   > Ainsi, le cardinal de $X_i = 1$ est $8 \times 31!$. On en déduit
   > $$P(X_i = 1) = \frac{8 \times 31!}{32!} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

   (b) En déduire l'espérance de X_i.

   > **Solution:** L'espérance de cette variable de Bernoulli est donc de $\dfrac{1}{4}$.

4. On fixe maintenant un entier $n \in [\![1; 32]\!]$ et on pose, comme dans la partie B, N le nombre de cœurs obtenus dans le tirage des n premières cartes de la pile.

   (a) Exprimer N en fonction des $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$.

   > **Solution:** On a
   > $$N = \sum_{k=1}^{n} X_k$$
   > En effet, on compte le nombre de cœurs obtenus sur les n premières positions.

   (b) En déduire l'espérance de N.

   > **Solution:** En raison de la linéarité de l'espérance :
   > $$E(N) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{n}{4}$$