
Devoir sur table du 23 février 2019

TSI 1

*Le barème est indicatif. Le candidat peut traiter les exercices dans l'ordre de son choix.
On sera attentif à la précision de la rédaction et au soin de la copie.*

Problème

8 points

Soit $a > 1$ un nombre. On considère la fonction $f_a : x \mapsto \frac{x + \frac{a}{x}}{2}$.
On définit également la suite h par

$$\begin{cases} h_0 = a \\ h_{n+1} = f_a(h_n) \end{cases}$$

Partie A : Conjecture graphique

Dans toute cette partie, on considère le cas particulier $a = 4$.

1. En justifiant soigneusement, tracer la courbe de f_4 sur le repère en annexe.
2. Faire la construction graphique des trois premiers termes de (h_n) dans ce cas particulier.
3. Conjecturer le sens de variation ainsi que la convergence de (h_n) dans ce cas particulier.

Partie B : Étude de la convergence

On revient au cas général, $a > 1$ est un nombre quelconque.

1. Résoudre $f_a(x) = x$.
2. Démontrer la série d'inégalités :

$$\sqrt{a} < \frac{a+1}{2} < a$$

3. (a) Étudier la fonction f_a sur l'intervalle $]0; +\infty[$: on déterminera le tableau de variations, les limites aux bornes.
(b) Montrer que $f_a([\sqrt{a}; a]) \subset [\sqrt{a}; a]$.
(c) À partir de ce qui précède, montrer par récurrence que la suite (h_n) est décroissante et bornée.
(d) Conclure quant à la convergence de (h_n) . Préciser sa limite.

Partie C : Étude de la vitesse de convergence de (h_n)

1. Montrer que, pour tout n ,

$$h_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(h_n - \sqrt{a})^2}{2h_n}$$

2. Soit p un entier. Dédire de la question précédente que, pour tout $n \geq p$:

$$0 \leq h_n - \sqrt{a} \leq \frac{(h_p - \sqrt{a})^{2^{n-p}}}{(2\sqrt{a})^{2^{n-p}-1}} \leq (h_p - \sqrt{a})^{2^{n-p}}$$

3. On suppose que la précision vaut 10^{-1} au rang 2, c'est à dire que $h_2 - \sqrt{a} \leq 10^{-1}$

À partir de quel rang la précision sera inférieure à 10^{-8} ?

Exercice 1

5 points

Soient $a < b$ deux nombres et soit une fonction f définie et continue sur $[a; b]$.

On suppose en outre que $f(a)f(b) < 0$.

Enfin, on définit les suites (a_n) , (b_n) et (m_n) par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \\ m_0 = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

Et, pour tout entier n :

- Si $f(a_n)f(m_n) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = m_n$ et $m_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$.
- Dans le cas contraire, on pose $a_{n+1} = m_n$, $b_{n+1} = b_n$ et $m_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$.

1. Démontrer par récurrence que la suite (a_n) est croissante, que la suite (b_n) est décroissante et que, pour tout n , $a_n \leq b_n$.
2. Montrer que la suite $(b_n - a_n)$ est une suite géométrique. On précisera le premier terme et la raison.
3. (a) Dédire des questions précédentes que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune.
(b) Montrer que leur limite commune l vérifie $f(l)^2 \leq 0$.
(c) Que peut-on en déduire sur $f(l)$?
4. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, déterminer, en fonction de a , b et ε , le rang à partir duquel (a_n) et (b_n) seront proches de leur limite avec une précision ε .

Exercice 2**5 points**

Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses. Justifier par la démonstration ou le contre-exemple.

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites.
Si (u_n) est strictement croissante et si, pour tout n , $v_n > u_n$, alors (v_n) est croissante.
- Toute suite qui possède une limite strictement positive est strictement positive à partir d'un certain rang.
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui ne s'annulent pas.
Si $u_n = O(v_n)$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Le produit d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.
- Soit (u_n) une suite.
Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent alors (u_n) converge.

Exercice 3**2 points**

Soit x un nombre. On définit la suite (d_n) pour tout n par :

$$d_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$$

- Justifier que les termes de (d_n) sont rationnels.
- Montrer que, pour tout n , $0 \leq x - d_n \leq 10^{-n}$.
- Que peut-on en déduire concernant la convergence de (d_n) ?

Exercice 4**3 points**

On s'intéresse à la limite de la suite $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ définie pour tout $n \geq 1$.

- Déterminer le sens de variation de (S_n) .
- Démontrer l'assertion suivante :
« Si une suite (u_n) converge alors $(u_{2n} - u_n)$ tend vers 0. »
- (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.
(b) Que peut-on en déduire concernant la limite de (S_n) ?

Nom et prénom :

Annexe à rendre avec la copie

