Devoir sur table du 8 décembre 2018
TSI 1

Le barème est indicatif.

Exercice 1 — 7 points

Dans tout le problème, $(\mathscr{C})$ désigne la courbe d'équation $y = \ln x$ représentant la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormal.
Question préliminaire : Tracer avec soin **dans le repère en annexe**, et sans justification, la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D) d'équation $y = x$. On donne $\mathrm{e} \simeq 2,72$, $e^2 \simeq 7,39$, $\frac{1}{\mathrm{e}} \simeq 0,37$ et $\frac{1}{\mathrm{e}^2} \simeq 0,14$

Partie A

1. (a) Déterminer une équation de la tangente (Δ) à $(\mathscr{C})$ au point I d'abscisse 1.

> **Solution:** I a pour coordonnées $(1\,;\,0)$ car $\ln(1) = 0$. De plus, la dérivée de logarithme en 1 vaut $\frac{1}{1} = 1$.
> Une équation de la tangente (Δ) à la courbe C représentative de la fonction $x \longmapsto \ln x$ a donc pour équation :
> $$M(x\,;\,y) \in (\Delta) \iff y - 0 = \frac{1}{1}(x-1) \iff y = x - 1$$

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par :

$$f(x) = x - 1 - \ln x$$

On oubliera pas de déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

> **Solution:** Pour tout x du domaine, on a
> $$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$
> Or, sur ce domaine, $x > 0$. On en déduit que le signe de la dérivée est donné par le signe de $x - 1$.
> Reste à déterminer $f(1) = 0$ et les limites.
> En 0^+, on obtient par somme $\lim_{0^+} f = +\infty$.
> En $+\infty$, c'est une forme indéterminée. Il faut lever l'indétermination. Pour cela, on écrit, pour tout $x > 0$:
> $$f(x) = x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$
> Par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. On en déduit, par somme et par produits $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
> Finalement, on peut dresser le tableau de variations de la fonction :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(c) En déduire la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ).

Solution: La position relative de ces deux courbes est donné par le signe de f. Or, par lecture du tableau de variations, f est positive sur son ensemble de définition.
On en déduit que (Δ) est au dessus de $(\mathscr{C})$.

2. (a) Déduire de la question précédente la valeur minimale prise par $x - \ln x$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Solution: On a $x - \ln x = f(x) + 1$. On en déduit que $x - \ln(x)$ a pour valeur minimale 1.

(b) M et N sont les points de même abscisse x des courbes $(\mathscr{C})$ et (D) respectivement.
Déterminer la plus petite valeur prise par la distance MN lorsque x décrit l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Solution: La distance MN vaut $|\ln(x) - x| = \left|f(x) + 1\right| = f(x) + 1$ car $f(x) + 1$ est positive pour tout $x > 0$. Cette distance est minimale pour $x = 1$ et vaut 1.

Partie B

1. Soit M le point d'abscisse x de la courbe $(\mathscr{C})$. Exprimer la distance OM de l'origine à M en fonction de x.

Solution: L'application de la formule de la distance donne

$$OM = \sqrt{\ln(x)^2 + x^2}$$

2. *Étude de la fonction auxiliaire u définie sur* $]0\,;\,+\infty[$ *par* $u(x) = x^2 + \ln x$.

(a) Justifier les limites de u en 0 et en $+\infty$ ainsi que le sens de variations de u.

Solution: Sur l'intervalle considéré les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont strictement croissantes.
Ainsi u est strictement croissante.
De plus, par somme, on obtient $\lim\limits_{+\infty} u = +\infty$ et $\lim\limits_{0^+} u = -\infty$.

(b) Montrer qu'il existe un réel α et un seul tel que $u(\alpha) = 0$. Préciser un encadrement de α par deux entiers consécutifs.

Solution: L'application du théorème des valeurs intermédiaires, sachant que u est continue, strictement monotone et que son intervalle image est $\mathbb{R}$ entraîne que n'importe quel réel possède un unique antécédent par u.
En particulier 0 possède un unique antécédent α.
D'autre part, on a $u(1) = 1$. Or $0 \in]-\infty;\ 1[$. On en déduit que $\alpha \in]0;\ 1[$.

(c) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant la valeur de x.

Solution: On déduit le tableau de signes de u à partir de son sens de variation. On obtient :

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	‖	$-$	0	$+$	

3. *Étude de la fonction g définie sur* $]0\ ;\ +\infty[$ *par* $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$.
Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = \dfrac{2}{x}u(x)$.
En déduire le tableau de variations de g.

Solution: Pour tout $x > 0$, on a

$$g'(x) = 2x + \frac{2\ln(x)}{x} = \frac{2(x^2 + \ln(x))}{x} = \frac{2}{x} \times u(x)$$

Or, sur l'intervalle considéré, $\dfrac{2}{x}$ est positif. On en déduit le signe de g' et, par suite, les variations de g.
On calcule très facilement les limites de g par somme :
$\lim\limits_{0^+} g = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$g(\alpha)$	↗	$+\infty$

4. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe $(\mathscr{C})$.

Solution: La plus courte distance est $\sqrt{g(\alpha)} = \sqrt{\alpha^2 + \ln(\alpha)^2}$. On sait que $u(\alpha) = 0$, c'est à dire $-\alpha^2 = \ln(\alpha)$.
On en déduit une expression simplifiée de ce minimum :

$$\sqrt{g(\alpha)} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4}$$

5. A étant le point d'abscisse α de $(\mathscr{C})$, démontrer que la tangente en A est perpendiculaire à la droite (OA).

Solution: Un vecteur directeur de (OA) est $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\alpha\\ \ln(\alpha)\end{pmatrix}$.

La tangente en α a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{\alpha}$ et donc pour vecteur directeur $\vec{d}\begin{pmatrix}1\\ 1/\alpha\end{pmatrix}$.
Calculons le produit scalaire de ces deux vecteurs :

$$\vec{d}\cdot\overrightarrow{OA} = \alpha + \frac{\ln(\alpha)}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\ln(\alpha)}{\alpha} = \frac{u(\alpha)}{\alpha} = 0$$

Les deux droites sont donc bien perpendiculaires.

Exercice 2 — 9 points

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{e};\ \vec{f}\right)$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. (a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2+z+1=0.$$

Solution: Le discriminant vaut -3. Il y a donc deux racines complexes conjuguées.

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} r_1 & = & \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\\ r_2 & = & \dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.}$$

(b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

Solution: j correspond à r_1.

2. Donner la forme exponentielle de j.

Solution: On calcule le module de j :
$|\mathrm{j}| = \sqrt{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1.$

On note θ l'argument de j. θ vérifie $\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{j}}{|\mathrm{j}|} = \mathrm{j}.$

En identifiant parties réelles et imaginaires, il vient $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.
Finalement

$$\boxed{\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}}$$

3. Démontrer les égalités suivantes :
   (a) $\mathrm{j}^3 = 1$;

   Solution: Il faut utiliser la notation exponentielle :
   $\mathrm{j}^3 = \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right)^3 = \mathrm{e}^{\frac{3\times 2\mathrm{i}\pi}{3}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1.$

   (b) $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.

   Solution: L'égalité à prouver est équivalente à $\mathrm{j}^2 + 1 + \mathrm{j} = 0$. Mais comme on l'a montré plus haut, j est une racine de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. Cette égalité est donc vraie.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
   Quelle est la nature du triangle PQR? Justifier la réponse.

   Solution: PQR est un triangle équilatéral. Il y a plusieurs manières de le prouver. À ce niveau, il faut déterminer les distances en utilisant les modules. On obtient $PQ = |\mathrm{j} - 1| = \sqrt{3}$ (après calcul).
   D'autre part, $QR = |\mathrm{j} - \mathrm{j}^2| = |\mathrm{j}| \times |1 - \mathrm{j}| = \sqrt{3}$ car $|\mathrm{j}| = 1$.
   Enfin, $PR = |\mathrm{j}^2 - 1| = |\mathrm{j} - 1| \times |\mathrm{j} + 1| = |\mathrm{j} - 1| \times |-\mathrm{j}^2| = \sqrt{3}$ car $\mathrm{j} + 1 = -\mathrm{j}^2$ et $|\mathrm{j}^2| = |\mathrm{j}|^2 = 1$.
   Les trois distances sont donc bien égales ce qui permet de conclure.

Partie B : une équation

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2 c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant les résultats de la partie A, démontrer l'égalité : $a - c = \mathrm{j}(c - b)$.

   Solution: On se sert de l'indication.

   $$a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2 c = 0 \iff a + \mathrm{j}b + (-\mathrm{j} - 1)\mathrm{c} = 0$$

   En développant et en regroupant les termes :

   $$\iff a - c + \mathrm{jb} - \mathrm{jc} = 0$$
   $$\iff a - c = \mathrm{j}(\mathrm{c} - \mathrm{b})$$

2. Que peut-on en déduire concernant la nature du triangle ABC?

Solution: Si $c = b$, on a $a - c = \mathrm{j}(\mathrm{c} - \mathrm{b}) = 0$, c'est à dire que les trois points sont confondus. On se place dans le cas où $c \neq b$.
Dans ce cas, on a

$$\frac{a-c}{c-b} = \mathrm{j}$$

En particulier $\left|\frac{a-c}{c-b}\right| = |\mathrm{j}| = 1$ et $\arg\left(\frac{a-c}{c-b}\right) = \arg(j) = \frac{2\pi}{3}$.
En traduisant cela géométriquement, on obtient $AC = BC$ et $\left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CA}\right) = \frac{2\pi}{3}$.
Or $\left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}\right) = \left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CA}\right)$.
On en déduit que $\left(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}\right) = \frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3} \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi]$.
Ainsi, le triangle ABC est équilatéral (deux côtés égaux et un angle égal à $\frac{\pi}{3}$).

Partie C : une somme

Pour tout entier $n > 0$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} j^k$.

1. Pourquoi a-t-on, pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\Re(z_1 + z_2) = \Re(z_1) + \Re(z_2)$?

Solution: Cette identité est vraie par définition de la somme de deux complexes.
En effet, posons $a_1 = \Re(z_1)$, $b_1 = \Im(z_1)$, $a_2 = \Re(z_2)$, $b_2 = \Im(z_2)$.
On a

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + \mathrm{i}(b_1 + b_2)$$

En particulier, $\Re(z_1 + z_2) = a_1 + a_2 = \Re(z_1) + \Re(z_2)$.

2. Montrer que S_n ne peut prendre que trois valeurs dont on déterminera les formes algébriques.
Établir un critère (portant sur n) permettant de déterminer la valeur de S_n.

Solution: S_n est une somme de termes de suite géométrique. On a, pour tout n,

$$S_n = \frac{1 - j^n}{1 - j}$$

Or $j^3 = 1$. On en déduit que, pour tout entier p, $j^{3p} = 1$, $j^{3p+1} = j$ et $j^{3p+2} = j^2$.
Ainsi, selon le reste de la division euclidienne de n par 3, on obtient :

$$S_n = \begin{cases} \frac{1-1}{1-j} = 0 \text{ si } n \text{ est multiple de } 3 \\ \frac{1-j}{1-j} = 1 \text{ si le reste de la division de } n \text{ par 3 vaut 1} \\ \frac{1-j^2}{1-j} = \frac{(1-j)(1+j)}{(1-j)} = 1 + j = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ si le reste de la division de } n \text{ par 3 vaut 2} \end{cases}$$

3. En exploitant ce qui précède, déterminer la valeur de S_{12517}.
Déterminer une expression simplifiée de
$$\sum_{k=0}^{12516} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$$

Solution: 12 516 est divisible par 3. On en déduit, d'après ce qui précède, $S_{12517} = 1$.
Notons que
$$\sum_{k=0}^{12516} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = \Re\left(\sum_{k=0}^{12516} e^{2ik\pi/3}\right) = \Re\left(\sum_{k=0}^{12516} j^k\right) = \Re\left(S_{12517}\right) = 1$$
On pouvait aussi montrer que, en regroupant les termes par paquets de trois, cette somme se simplifie!

Partie D : transformation géométrique

Soit l'application qui à tout nombre complexe z associe $z' = 1 + i + j\left(z - (1+i)\right)$.

1. On note M l'image de z dans le plan complexe et M' l'image de z' dans ce même plan.
Montrer que M' est l'image de M par une rotation dont on précisera les paramètres.

Solution: Soit R le point d'affixe $z_r = 1 + i$. On a $z' - z_r = j\left(z - z_r\right)$.
En particulier, en interprétant cette dernière égalité en termes de module et d'arguments, on en déduit que
$RM' = RM$ et, lorsque $M \neq R$, $\left(\overrightarrow{RM};\ \overrightarrow{RM'}\right) = \arg(j) = \dfrac{2\pi}{3}$.
Ainsi, M' est l'image de M par une rotation de centre R et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

2. Déterminer les coordonnées de l'image du point $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ par cette rotation.

Solution: Pour $z = 2 + 3i$, on calcule
$$\begin{aligned} z' &= 1 + i + \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(2 + 3i - (1+i)\right) \\ &= 1 + i + \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1 + 2i) \\ &= 1 + i - \frac{1}{2} - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - i \\ &= \frac{1}{2} - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$
Les coordonnées sont donc $\begin{pmatrix}1/2 - \sqrt{3}\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$.

3. Déterminer les coordonnées de l'antécédent du point A par cette même rotation.

Solution: On calcule l'image par une rotation d'angle $\frac{-2\pi}{3}$, ce qui revient à déterminer

$$z'' = z_r + j^2(z - z_r)$$

On obtient

$$\begin{aligned} z'' &= 1+\mathrm{i}+\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(2+3\mathrm{i}-(1+\mathrm{i})) \\ &= 1+\mathrm{i}+\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(1+2\mathrm{i}) \\ &= 1+\mathrm{i}-\frac{1}{2}+\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}-\mathrm{i} \\ &= \frac{1}{2}+\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \end{aligned}$$

Les coordonnées sont donc $\begin{pmatrix} 1/2+\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 **4 points**

Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$y' - \frac{y}{x} = 2x^2\cos\left(x^2\right)$$

Solution: Résolution de l'équation homogène.
On pose $a : x \mapsto \frac{1}{x}$.
Sur l'intervalle considéré, a possède une primitive qui est la fonction logarithme.
Or, pour tout $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$
On en déduit les solutions de l'équation homogène :

$$\{x \mapsto Kx;\ \text{avec } K \in \mathbb{R}\}$$

Pour trouver une solution particulière, on utilise la méthode de variation de la constante. Pour ce faire, on cherche une fonction k définie et dérivable sur $]0;\ +\infty[$ telle que $x \mapsto k(x)x$ est solution.
On en déduit que k vérifie :

$$k'(x) = \frac{2x^2\cos\left(x^2\right)}{x} = 2x\cos\left(x^2\right)$$

On reconnaît une forme $u'\cos(u)$ et on en déduit que la fonction $k : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ convient. Ainsi, $x \mapsto x\sin\left(x^2\right)$ est une solution particulière.

Finalement, les solutions de l'équation différentielles sont :

$$\left\{x \mapsto Kx + x\sin\left(x^2\right);\ \text{avec } K \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 4 **(Bonus)**

Un écureuil possède un trésor de dix-sept noisettes identiques [1].

1. De combien de manières peut-il cacher ses noisettes dans deux emplacements ?
2. De combien de manières peut-il cacher ses noisettes dans quatre emplacements ?

1. En pratique, je pense qu'un écureuil arrive à distinguer les noisettes entre elles. Je suis même sûr qu'il leur donne un petit nom à toutes.

ANNEXE à remettre avec la copie

Nom et prénom : ....