Devoir sur table du 8 décembre 2018
TSI 1

Le barème est indicatif.

Exercice 1 — 7 points

Dans tout le problème, $(\mathscr{C})$ désigne la courbe d'équation $y = \ln x$ représentant la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormal.
Question préliminaire : Tracer avec soin **dans le repère en annexe**, et sans justification, la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D) d'équation $y = x$. On donne $\mathrm{e} \simeq 2,72$, $e^2 \simeq 7,39$, $\frac{1}{\mathrm{e}} \simeq 0,37$ et $\frac{1}{\mathrm{e}^2} \simeq 0,14$

Partie A

1. (a) Déterminer une équation de la tangente (Δ) à $(\mathscr{C})$ au point I d'abscisse 1.

   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par :

   $$f(x) = x - 1 - \ln x$$

   On oubliera pas de déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

   (c) En déduire la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ).

2. (a) Déduire de la question précédente la valeur minimale prise par $x - \ln x$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   (b) M et N sont les points de même abscisse x des courbes $(\mathscr{C})$ et (D) respectivement.
   Déterminer la plus petite valeur prise par la distance MN lorsque x décrit l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

1. Soit M le point d'abscisse x de la courbe $(\mathscr{C})$. Exprimer la distance OM de l'origine à M en fonction de x.
2. *Étude de la fonction auxiliaire u définie sur* $]0\,;\,+\infty[$ *par* $u(x) = x^2 + \ln x$.

   (a) Justifier les limites de u en 0 et en $+\infty$ ainsi que le sens de variations de u.

   (b) Montrer qu'il existe un réel α et un seul tel que $u(\alpha) = 0$. Préciser un encadrement de α par deux entiers consécutifs.

   (c) Déterminer le signe de $u(x)$ suivant la valeur de x.
3. *Étude de la fonction g définie sur* $]0\,;\,+\infty[$ *par* $g(x) = x^2 + (\ln x)^2$.
   Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = \dfrac{2}{x}u(x)$.
   En déduire le tableau de variations de g.
4. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de la plus courte distance de l'origine aux points de la courbe $(\mathscr{C})$.
5. A étant le point d'abscisse α de $(\mathscr{C})$, démontrer que la tangente en A est perpendiculaire à la droite (OA).

Exercice 2 **9 points**

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{e};\ \vec{f}\right)$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. (a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

   (b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
2. Donner la forme exponentielle de j.
3. Démontrer les égalités suivantes :
   (a) $\mathrm{j}^3 = 1$;
   (b) $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
   Quelle est la nature du triangle PQR? Justifier la réponse.

Partie B : une équation

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2 c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant les résultats de la partie A, démontrer l'égalité : $a - c = \mathrm{j}(c - b)$.
2. Que peut-on en déduire concernant la nature du triangle ABC?

Partie C : une somme

Pour tout entier $n > 0$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} j^k$.

1. Pourquoi a-t-on, pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\Re(z_1 + z_2) = \Re(z_1) + \Re(z_2)$?
2. Montrer que S_n ne peut prendre que trois valeurs dont on déterminera les formes algébriques.
   Établir un critère (portant sur n) permettant de déterminer la valeur de S_n.
3. En exploitant ce qui précède, déterminer la valeur de S_{12517}.
   Déterminer une expression simplifiée de

$$\sum_{k=0}^{12516} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$$

Partie D : transformation géométrique

Soit l'application qui à tout nombre complexe z associe $z' = 1 + \mathrm{i} + j\,(z - (1 + \mathrm{i}))$.

1. On note M l'image de z dans le plan complexe et M' l'image de z' dans ce même plan.
   Montrer que M' est l'image de M par une rotation dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer les coordonnées de l'image du point $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ par cette rotation.
3. Déterminer les coordonnées de l'antécédent du point A par cette même rotation.

Exercice 3 — 4 points

Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_*^+$:

$$y' - \frac{y}{x} = 2x^2 \cos\left(x^2\right)$$

Exercice 4 — (Bonus)

Un écureuil possède un trésor de dix-sept noisettes identiques[1].

1. De combien de manières peut-il cacher ses noisettes dans deux emplacements ?
2. De combien de manières peut-il cacher ses noisettes dans quatre emplacements ?

1. En pratique, je pense qu'un écureuil arrive à distinguer les noisettes entre elles. Je suis même sûr qu'il leur donne un petit nom à toutes.

ANNEXE à remettre avec la copie

Nom et prénom : ....