Devoir sur table du 5 octobre 2018
TSI 1

Le barème est indicatif. Il y a quatre points bonus.

Exercice 1 — 6 points

Dans tout ce qui suit, on munit le plan d'un repère orthonormé.

On considère le point $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et la droite (D) d'équation $x+2y=5$.

Partie A

1. x désigne un nombre réel quelconque. Soit le point M appartenant à la droite (D) d'abscisse x.

   a) Donner en fonction de x l'ordonnée de M.

   Solution: Les coordonnées de M vérifient l'équation de (D). Après un petit calcul (ou bien de tête), on obtient :
   $$y = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}$$

   b) Montrer que la distance AM vaut, en fonction de x, $\boxed{\sqrt{\frac{5}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{17}{4}}}$

   Solution: En appliquant la formule de la distance, on obtient, après des calculs :
   $$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(x-2)^2 + \left(\frac{-1}{2}x + \frac{5}{2} - 3\right)^2} \\ &= \cdots \\ &= \sqrt{\frac{5}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{17}{4}} \end{aligned}$$

2. On pose d la fonction qui à tout x associe la distance AM déterminée plus haut.

   a) Quelle est le domaine de définition de d ?

   Solution: d est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. En effet, AM est une distance donc AM existe quelle que soit la position de M.

   b) Déterminer les variations de d. Montrer que d admet un minimum dont on précisera le lieu et la valeur.

   Solution: On va utiliser ce que l'on sait des fonctions composées.
   Pour cela on pose $r(x) = \sqrt{x}$ et $t(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{17}{4}$ de telle sorte que $d = r \circ t$.

r est strictement croissante sur son domaine de définition. Ainsi le sens de variation de d est celui de t. Or t est une fonction trinômiale dont le coefficient a est positif.
Il s'agit donc de calculer les paramètres de la forme canonique.
Après calcul, on obtient $\alpha = \dfrac{7}{5}$ et $\beta = t(\alpha) = \dfrac{9}{5}$.
On a donc le tableau de variations de t puis celui de r par composition :

x	$-\infty$	$\frac{7}{5}$	$+\infty$
$t(x)$	$\searrow$	$\frac{9}{5}$	$\nearrow$
$d(x)$	$\searrow$	$\sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$	$\nearrow$

Finalement, d admet un minimum en $\dfrac{7}{5}$ qui vaut $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

c) Déterminer les limites de d en $+\infty$ et $-\infty$.

Solution: On reprend les mêmes notations. Pour tout $x \neq 0$, On écrit $t(x) = x^2\left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{7}{2x} + \dfrac{17}{4x^2}\right)$ ce qui permet de lever les indéterminations en $+\infty$ et $-\infty$.
En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{7}{2x} + \dfrac{17}{4x^2}\right) = \dfrac{5}{4}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{7}{2x} + \dfrac{17}{4x^2}\right) = \dfrac{5}{4}$ par somme.
Ainsi, par composition, d tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

3. Déterminer $d^{-1}\langle[2;\ +\infty[\rangle$. *Interpréter géométriquement le résultat.*

Solution: On cherche x tel que $d(x) \geq 2$. Cette équation se réécrit :

$$\begin{aligned} d(x) \geq 2 &\iff \sqrt{\frac{5}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{17}{4}} \geq 2 \\ &\iff \frac{5}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{17}{4} \geq 4 \\ &\iff x^2 - 14x + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant $\Delta = 14^2 - 4 = 192 > 0$.
Les deux racines sont $r_1 = \dfrac{14 - \sqrt{192}}{2} = 7 - 4\sqrt{3}$ et $r_2 = \dfrac{14 + \sqrt{192}}{2} = 7 + 4\sqrt{3}$.
Ainsi, l'image réciproque de $[2;\ +\infty[$ par d est $\left]-\infty;\ 7 - 4\sqrt{3}\right] \cup \left[7 + 4\sqrt{3};\ +\infty\right[$.
Géométriquement, cela correspond aux abscisses des point de (D) située à une distance supérieure à 2 de A.

Partie B

1. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur (D).

> **Solution:** Soit A' ce projeté orthogonal. Il est sur (D) et il est tel que $\overrightarrow{AA'}$ est orthogonal à (D).
> Or un vecteur normal de (D) est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. En posant $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ les coordonnées de A', x et y vérifient le système.
>
> $$\begin{cases} x+2y=5 & \text{(appartenance à } D\text{)} \\ 2(x-2)=1(y-3) & \text{(colinéarité de } \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AA'}\text{)} \end{cases}$$
>
> Après résolution, on obtient
>
> $$\begin{cases} x=\dfrac{7}{5} \\ y=\dfrac{9}{5} \end{cases}$$
>
> Cela est cohérent avec les résultats de la partie A.

2. En déduire que la distance de A à (D) vaut $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

> **Solution:** La distance de A à (D) vaut AA'. En appliquant la formule de la distance, on obtient bien $AA'=\sqrt{\dfrac{9}{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.
> Là encore, c'est cohérent avec les résultats de la partie A car la distance de A à (D) est la distance minimale entre A et n'importe quel point de la droite (D).

Exercice 2 — 6 points

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\right)$.
On considère le point $M\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et le point $\Omega\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

1. (a) Déterminer les coordonnées de l'image de M par une homothétie de centre Ω et de rapport -3.

> **Solution:** On pose $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ ce point. Il vérifie $\overrightarrow{\Omega M'}=-3\overrightarrow{\Omega M}$. Les coordonnées de M' vérifient donc
>
> $$\begin{cases} x'-1=-3\times 1 \\ y'-1=-3\times 2 \end{cases}$$
>
> Cela donne $M'\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$

   (b) Déterminer les coordonnées de l'image de M par une rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{-\pi}{2}$.

Solution: On cherche le point $M''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ tel que $\Omega M = \Omega M''$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M''}\right) = \dfrac{-\pi}{2}$.

Or $\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ possède comme vecteurs orthogonaux de même norme le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $-\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Un calcul de déterminant permet de se prononcer. En effet, $\left[\overrightarrow{\Omega M};\ \vec{v}\right] = 5 > 0$. Ainsi, c'est $-\vec{v}$ qui vérifie $\left(\overrightarrow{\Omega M}, -\vec{v}\right) = \dfrac{-\pi}{2}$.

On en déduit que x'' et y'' vérifient

$$\begin{cases} x'' - 1 = 2 \\ y'' - 1 = -1 \end{cases}$$

Ce qui donne $M''\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.

2. On considère la droite (D) d'équation $y = 2 - 2x$ et le cercle (Γ) de centre Ω et de rayon $\sqrt{2}$.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ).

Solution: Tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ vérifie la condition nécessaire et suffisante $\Omega M^2 = \sqrt{2}^2$, ce qui donne l'équation

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

   (b) Déterminer les coordonnées des intersections de (Γ) et de (D).

Solution: Une intersection vérifie le système

$$\begin{cases} y = 2 - 2x \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \end{cases}$$

En substituant y dans la seconde équation, on obtient une équation trinômiale en x :

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (1-2x)^2 = 2 &\iff 5x^2 - 6x = 0 \\ &\iff x(5x-6) = 0\end{aligned}$$

On obtient les deux abscisses des intersections : $x = 0$ et $x = \dfrac{6}{5}$. On peut facilement calculer les ordonnées de ces deux points en utilisant la première équation du système. On obtient ainsi finalement les points

$$I_1\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad I_2\begin{pmatrix}6/5\\-2/5\end{pmatrix}$$

3. (a) Déterminer les coordonnées de l'image de Ω par la réflexion par rapport à la droite (D).

Solution: On note $\Omega'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ l'image de Ω. Un tel point vérifie d'une part que le milieu de $[\Omega\Omega']$ est sur (D) et d'autre part que $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ est orthogonal à (D), c'est à dire orthogonal au vecteur directeur $\vec{d}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

On obtient le système

$$\begin{cases} \frac{y'+1}{2} = 2 - 2 \times \frac{x'+1}{2} \\ (x'-1) - 2(y'-1) = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne $\Omega' \begin{pmatrix} 1/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$.

(b) En déduire une équation cartésienne de l'image de (Γ) par cette même réflexion.

Solution: C'est un cercle de centre Ω' et de même rayon $\sqrt{2}$ que (Γ). Son équation est donc :

$$\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{5}\right)^2 = 2$$

Exercice 3 — 5 points

1. (a) Combien de mots de trois lettres comportant une voyelle puis une consonne puis une voyelle peut-on former, sans prendre en compte les caractères spéciaux? *On rappelle qu'il y a six voyelles dans la langue française.*

Solution: On note V l'ensemble des voyelles, C l'ensemble des consonnes. Un tel mot est un élément de $V \times C \times V$.
On connaît le cardinal d'un produit cartésien. Il y a $6 \times 20 \times 6 = 720$ mots fabriqués ainsi.

(b) Combien de mots de trois lettres comportant deux voyelles et une consonne peut-on former?

Solution: Dans un mot de trois lettres comportant une seule consonne, il y a trois manières de placer la consonne.
On en déduit que le nombre total de mots comportant deux voyelles et une consonne est de $3 \times 720 = 2160$.

2. Tancrède possède cinq stylos. Il les aligne devant lui selon un certain ordre.

(a) On suppose que les stylos sont tous différents. De combien de manières peut-il les disposer?

Solution: Il y a $5! = 120$ manières de disposer les stylos. C'est le nombre de bijections entre l'ensemble $[\![1;\, 5]\!]$ et les stylos de Tancrède.

(b) On suppose maintenant que Tancrède possède deux stylos bleu identiques, deux stylos noir identiques et un stylo vert. De combien de manières peut-il les disposer?

Solution: Parmi les 120 manières de disposer les stylos en les supposant tous distincts, il y a des manières identiques si l'on prend en compte cette nouvelle hypothèse. Comme l'ordre des stylos bleus et celui des stylos noirs importe peu, il y a en réalité $2 \times 2 = 4$ fois moins de manières de disposer ces stylos.
On obtient donc $\dfrac{120}{4} = 30$ manières de placer les stylos.

3. Le repère plus bas est orthonormé.
   Un petit robot part de l'origine à l'instant $t = 0$ s.
   Chaque seconde il se déplace d'une longueur de 1 vers la gauche ou bien vers le haut; c'est à dire que son abscisse augmente de 1 ou bien son ordonnée augmente de 1.
   Concrètement, au bout de la première seconde, ses coordonnées sont $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ou bien $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.
   On s'intéresse à sa position en $t = 8$ s.
   (a) Combien de coordonnées différentes peut-il avoir en $t = 8$ s?

   Solution: Une position atteinte en $t = 8$ s est entièrement définie par le nombre de fois que le robot s'est déplacé vers la gauche.
   Or il peut se déplacer vers la gauche 0 fois, 1 fois, ..., 8 fois.
   Il peut donc atteindre en tout 9 positions.

   (b) Combien de trajectoires peuvent le conduire à obtenir une abscisse supérieure ou égale à six au bout de 8 s?

   Solution: On cherche le nombre de trajectoires conduisant à une abscisse égale à 8 : il n'y en a qu'une.
   Puis on compte le nombre de trajectoires conduisant à une abscisse égale à 7 : il y en huit. Cela correspond au choix de la seconde au cours de laquelle il est monté.
   Enfin on compte le nombre de trajectoires conduisant à une abscisse égale à 6 : il y en 28. Cela correspond au choix deux deux secondes au cours desquelles il est monté ($\binom{8}{2} = 28$).
   En tout, il y a donc $1+8+28 = 37$ trajectoires conduisant à une abscisse supérieure ou égale à 6 au bout de 8 s.

Exercice 4 — 7 points

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel quelconque.

1. (a) Donner la valeur de
$$\sum_{k=1}^{200} k$$

   Solution: C'est la formule des nombres triangulaires. On obtient
$$\sum_{k=1}^{200} k = \frac{200 \times 201}{2} = 20\ 100$$

   (b) Donner la valeur de
$$\sum_{k=-10}^{10} 2$$

   Solution: On obtient $2 \times 21 = 42$.

(c) Donner la valeur de

$$\sum_{k=-20}^{80} k$$

Solution: On sait que $\displaystyle\sum_{k=-20}^{0} k = -\sum_{k=0}^{20} k = \frac{-20\times 21}{2} = -210$.
De plus, $\displaystyle\sum_{k=1}^{80} k = \frac{80\times 81}{2} = 40\times 81 = 3240$
On obtient donc $\displaystyle\sum_{k=-20}^{80} k = 3240 - 210 = 3030$.
Il y avait d'autres méthodes plus simples pour obtenir ce résultat, notamment en utilisant les sommes de termes de suites arithmétiques.

2. Déterminer la valeur de

$$\sum_{k=0}^{9} 3\times 2^k$$

Solution: On obtient :

$$\sum_{k=0}^{9} 3\times 2^k = 3\times\sum_{k=0}^{9} 2^k = 3\times\frac{2^{10}-1}{2-1} = 3\times 1024 = 3072$$

3. (a) Soient a et b deux nombres. Donner la forme développée de

$$(a+b)^n$$

Solution: C'est la formule du binôme de Newton (cf cours).

(b) En utilisant ce qui précède déterminer une expression simplifiée de

$$\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n}{k}$$

Solution: C'est la formule du binôme de Newton avec $a=-2$ et $b=1$. Ainsi, l'expression simplifiée est

$$\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n}{k} = (-2+1)^n = (-1)^n$$

4. On souhaite déterminer une formule simplifiée de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\times\binom{n}{k}$$

(a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1;\ n]\!]$, $k\times\binom{n}{k} = n\times\binom{n-1}{k-1}$.

Solution: On a

$$\begin{aligned}
k \times \binom{n}{k} &= \frac{k \times n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \cdots \times 1} \\
&= \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{(k-1) \times \cdots \times 1} \\
&= n \times \frac{(n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{(k-1) \times \cdots \times 1} \\
&= n \times \binom{n-1}{k-1}
\end{aligned}$$

(b) Rappeler la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$$

Solution: C'est la forme développée de $(1+1)^{n-1}$ à l'aide de la formule du binôme de Newton. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$$

(c) Déduire des deux questions précédentes l'expression de S_n.

Solution:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} k \times \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \times \binom{n-1}{k-1} \qquad \text{(d'après (a))} \\
&= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \qquad \text{(factorisation par } n\text{)} \\
&= n \times \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1} \right] \\
&= n \times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\
&= n \times 2^{n-1} \qquad \text{(d'après (b))}
\end{aligned}$$

Pour passer de la ligne 3 à la ligne 5, il faut en théorie faire un changement d'indice.