# Devoir sur table du 10 novembre 2018
# TSI 1

*Le barème est indicatif. Il y a quatre points bonus.*

## Exercice 1 — 6 points

Dans tout ce qui suit, on munit le plan d'un repère orthonormé.

On considère le point $A\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et la droite $(D)$ d'équation $x+2y=5$.

**Partie A**

1. $x$ désigne un nombre réel quelconque. Soit le point $M$ appartenant à la droite $(D)$ d'abscisse $x$.
   a) Donner en fonction de $x$ l'ordonnée de $M$.
   b) Montrer que la distance $AM$ vaut, en fonction de $x$, $\boxed{\sqrt{\frac{5}{4}x^2-\frac{7}{2}x+\frac{17}{4}}}$
2. On pose $d$ la fonction qui à tout $x$ associe la distance $AM$ déterminée plus haut.
   a) Quelle est le domaine de définition de $d$ ?
   b) Déterminer les variations de $d$. Montrer que $d$ admet un minimum dont on précisera le lieu et la valeur.
   c) Déterminer les limites de $d$ en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Déterminer $d^{-1}\langle[2;\ +\infty[\rangle$. *Interpréter géométriquement le résultat.*

**Partie B**

1. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de $A$ sur $(D)$.
2. En déduire que la distance de $A$ à $(D)$ vaut $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

## Exercice 2 — 6 points

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\right)$.

On considère le point $M\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et le point $\Omega\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

1. (a) Déterminer les coordonnées de l'image de $M$ par une homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $-3$.
   (b) Déterminer les coordonnées de l'image de $M$ par une rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\dfrac{-\pi}{2}$.
2. On considère la droite $(D)$ d'équation $y=2-2x$ et le cercle $(\Gamma)$ de centre $\Omega$ et de rayon $\sqrt{2}$.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de $(\Gamma)$.
   (b) Déterminer les coordonnées des intersections de $(\Gamma)$ et de $(D)$.
3. (a) Déterminer les coordonnées de l'image de $\Omega$ par la réflexion par rapport à la droite $(D)$.
   (b) En déduire une équation cartésienne de l'image de $(\Gamma)$ par cette même réflexion.

## Exercice 3 **5 points**

1. (a) Combien de mots de trois lettres comportant une voyelle puis une consonne puis une voyelle peut-on former, sans prendre en compte les caractères spéciaux? *On rappelle qu'il y a six voyelles dans la langue française.*

   (b) Combien de mots de trois lettres comportant deux voyelles et une consonne peut-on former?

2. Tancrède possède cinq stylos. Il les aligne devant lui selon un certain ordre.

   (a) On suppose que les stylos sont tous différents. De combien de manières peut-il les disposer?

   (b) On suppose maintenant que Tancrède possède deux stylos bleu identiques, deux stylos noir identiques et un stylo vert. De combien de manières peut-il les disposer?

3. Le repère plus bas est orthonormé.

   Un petit robot part de l'origine à l'instant $t = 0$ s.

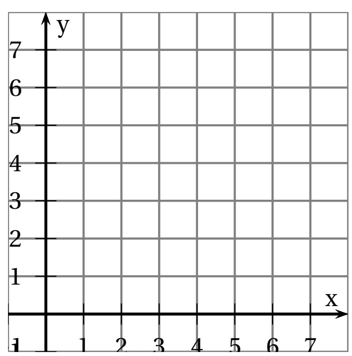
   Chaque seconde il se déplace d'une longueur de 1 vers la droite ou bien vers le haut; c'est à dire que son abscisse augmente de 1 ou bien son ordonnée augmente de 1.

   Concrètement, au bout de la première seconde, ses coordonnées sont $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ou bien $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

   On s'intéresse à sa position en $t = 8$ s.

   (a) Combien de coordonnées différentes peut-il avoir en $t = 8$ s?

   (b) Combien de trajectoires peuvent le conduire à obtenir une abscisse supérieure ou égale à six au bout de 8 s?




## Exercice 4 **7 points**

Dans tout cet exercice, $n$ désigne un entier naturel quelconque.

1. (a) Donner la valeur de
$$\sum_{k=1}^{200} k$$

   (b) Donner la valeur de
$$\sum_{k=-10}^{10} 2$$

   (c) Donner la valeur de
$$\sum_{k=-20}^{80} k$$

2. Déterminer la valeur de

$$\sum_{k=0}^{9} 3 \times 2^k$$

3. (a) Soient $a$ et $b$ deux nombres. Donner la forme développée de

$$(a+b)^n$$

   (b) En utilisant ce qui précède déterminer une expression simplifiée de

$$\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n}{k}$$

4. On souhaite déterminer une formule simplifiée de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \times \binom{n}{k}$$

   (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1;\ n]\!]$, $k \times \binom{n}{k} = n \times \binom{n-1}{k-1}$.

   (b) Rappeler la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$$

   (c) Déduire des deux questions précédentes l'expression de $S_n$.