Devoir sur table du 5 octobre 2018
TSI 1

Exercice 1

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes. Pour les équations trigonométriques, *donner uniquement les mesures principales d'angle.*

   a) $\dfrac{1}{x-1} \geq \dfrac{1}{(x+3)^2}$

   Solution: On annule le membre de gauche, on réduit au même dénominateur puis on étudie le signe.
   On obtient les solutions $]1;\ +\infty[$.

   b) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   Solution: On obtient, en mesure principale, $\left\{\frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}\right\}$.

   c) $\cos^2(x) > \frac{1}{2}$

   Solution: Cette inéquation est équivalente à $\left(\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$. Un tableau de signes permet d'obtenir les solutions, en mesure principale : $\left]-\pi;\ \frac{-3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{-\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4};\ \pi\right]$.

   d) $\left|x^2 - 3\right| \leq 1$

   Solution: Cette inéquation est équivalente à la résolution de $-1 \leq x^2 - 3 \leq 1$.
   On résout séparément $x^2 - 3 \leq 1$ et $x^2 - 3 \geq -1$ puis on détermine l'intersection des solutions de ces deux inéquations.
   On obtient les solutions de l'inéquation de départ : $\left[-2;\ -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2};\ 2\right]$.

2. Déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ à partir de la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

   Solution: On utilise l'identité :

   $$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

   Or, $\frac{\pi}{12} \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq 0$. On peut donc extraire la racine. On obtient :

   $$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Exercice 2

Partie A

Dans tout ce qui suit, on munit le plan d'un repère orthonormé.
On considère les points $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$

1. a) Déterminer les coordonnées des milieux des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

   Solution: On note respectivement C', B' et A' les milieux des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.
   En appliquant la formule on obtient.

   $$C'\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \qquad B'\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \qquad A'\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

   b) Déterminer les distances AB, AC et BC.

   Solution: En appliquant la formule de la distance, on obtient

   $$AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \qquad AC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \qquad BC = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

2. a) Déterminer une équation cartésienne ainsi qu'une équation paramétrique de la médiane issue de A.

   Solution: La médiane issue de A passe par A et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$.
   Le critère de colinéarité nous donne une équation cartésienne :

   $$3(x-1) = 0 \times (y-1) \iff x = 1$$

   Une équation paramétrique est

   $$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

   b) Déterminer une équation cartésienne de la médiane issue de B.

   Solution: La médiane issue de B passe par B et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$.
   Le critère de colinéarité nous donne une équation cartésienne :

   $$0 \times (x-5) = -6(y-3) \iff y = 3$$

   c) En déduire les coordonnées du centre de gravité du triangle.

   Solution: Le centre de gravité a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; la recherche de l'intersection des deux médianes étant évidente.

3. En expliquant soigneusement la méthode, déterminer également les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Solution: On doit déterminer les équations de deux médiatrices puis calculer l'intersection de ces deux médiatrices.
La médiatrice de $[AC]$ est la droite passant par B' de vecteur normal $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$.
Ainsi, son équation cartésienne est $-4(x+1)+4(y-3)=0 \iff -x+y=4$.
La médiatrice de $[AB]$ est la droite passant par C' de vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$.
Ainsi, son équation cartésienne est $4(x-3)+2(y-2)=0 \iff 2x+y=8$.
On cherche à résoudre

$$\begin{aligned}\begin{cases}-x+y=4\\2x+y=8\end{cases} &\iff \begin{cases}-x+y=4\\3x=4\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}y=4+\frac{4}{3}\\x=\frac{4}{3}\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}y=\frac{16}{3}\\x=\frac{4}{3}\end{cases}\end{aligned}$$

Les coordonnées du centre du cercle circonscrit sont donc $\begin{pmatrix}4/3\\16/3\end{pmatrix}$.

4. Déterminer l'aire du triangle ABC.

Solution: Pour déterminer l'aide du triangle ABC, on calcule le déterminant $\left[\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AB}\right]=\begin{vmatrix}4 & -4\\2 & 4\end{vmatrix}=24$.
Ainsi, l'aire de ABC est $\dfrac{24}{2}=12$

Partie B

Soit un triangle ABC non aplati. On note I le milieu de $[BC]$.

1. Prouver que
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AI^2-IB^2$$

Solution: On exploite la relation de Chasles et le fait que I soit le milieu de $[BC]$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)\\ &= \overrightarrow{AI}^2+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}\\ &= AI^2+\overrightarrow{AI}\cdot\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}\right)-IB^2\\ &= AI^2-IB^2\end{aligned}$$

2. Prouver que

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

> **Solution:** Même recette. Pour aller plus vite dans les calculs, on exploite le théorème d'Al Kashi.
>
> $$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= AI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + AI^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC} \\ &= AI^2 + 2IB^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) \\ &= AI^2 + 2IB^2 \\ &= AI^2 + 2 \times \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \\ &= AI^2 + \frac{BC^2}{2} \end{aligned}$$

Exercice 3

1. Combien de mots de trois lettres comportant une consonne puis une voyelle puis une consonne peut-on former, sans prendre en compte les caractères spéciaux? *On rappelle qu'il y a six voyelles dans la langue française.*

> **Solution:** On note V l'ensemble des voyelles, C l'ensemble des consonnes. Un tel mot est un élément de $C \times V \times C$.
>
> On connaît le cardinal d'un produit cartésien. Il y a $20 \times 6 \times 20 = 2400$ mots fabriqués ainsi.

2. a) De combien de manières peut-on ranger six livres sur une étagère?

> **Solution:** Chaque ordre sur l'étagère est défini de manière unique par une bijection de $[\![1;\ 6]\!]$ vers l'ensemble des livres.
>
> Il y a donc $6! = 720$ manières de ranger ces six livres sur une étagère.

b) De combien de manières peut-on ranger six livres sur deux étagères superposées, en mettant trois livres sur l'étagère du haut et trois livres sur l'étagère du bas?
Commenter le résultat. Cela est-il normal?

> **Solution:** Le choix des trois livres pour l'étagère du haut peut se faire de $\binom{6}{3} = 20$ manières différentes.
>
> Ensuite, il y a $3! = 6$ manière de ranger chaque étagère.
>
> Finalement, le nombre de manières de ranger ces six livres selon les modalités de l'énoncé peut se faire de $20 \times 6 \times 6 = 720$ manières.

3. On considère un jeu de 32 cartes comportant quatre couleurs (carreau, trèfle, pique et cœur) et huit figures (7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as).
On pioche cinq cartes dans ce jeu sans remise. On ne s'intéresse par à l'ordre des cartes.

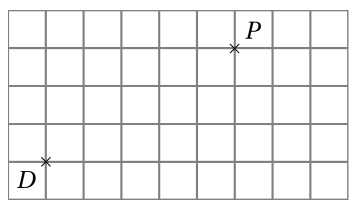
a) De combien de manières peut-on tirer quatre rois ?

Solution: Il y a une manière de choisir les quatre rois. Ensuite, on choisit une carte parmi les cartes restantes.
Ainsi, il y a 28 manières de choisir quatre rois.

b) De combien de manières peut-on tirer un brelan, c'est à dire trois cartes de la même figure et deux cartes d'une autre figure ?

Solution: Il y a $\binom{4}{3} = 4$ manières de choisir trois cartes d'une figure donnée. Il y a 8 manières de choisir la figure. Enfin, il y a $\binom{28}{2}$ manières de choisir les deux cartes restantes.
Ainsi, il y a $4 \times 8 \times \dfrac{28 \times 27}{2} = 16 \times 28 \times 27 = 12\,096$ brelans.

4. Vous habitez NYC et tous les jours vous vous rendez de votre domicile (point D) à votre lieu de travail, un restaurant dont vous êtes le-la pizzaïol-o-a (point P).
Sur le plan, les rues délimitent un ensemble de blocks parfaitement carrés.
On suppose que vous empruntez toujours le plus court chemin.
Combien de trajets différents pouvez-vous faire ?



Solution: En tout on parcourt huit portions de rue. Mais sur les huit portions de rue, on doit aller trois fois vers le nord et cinq fois vers l'est.
Par exemple, un trajet valide est Est-Est-Est-Est-Est-Nord-Nord-Nord.
Un autre trajet valide est Est-Est-Est-Est-Nord-Nord-Nord-Est.
Un trajet correspond ainsi à la position des cinq « nord » sur les huit possibilités.
Il y a donc $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$ trajets possibles.

Exercice 4

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (2 - \ln x)\ln x.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormal est donnée sur la feuille **ANNEXE**.

1. Lire sur le graphique la limite de la fonction f en 0. Retrouver ce résultat à l'aide de l'expression de $f(x)$.

Solution: La limite de f en 0 semble être $-\infty$.
Mais on sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (2-\ln(x)) = +\infty$.
Par produit, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

2. Montrer que la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ est définie par $f'(x) = \dfrac{2(1-\ln x)}{x}$.

Solution: Cela se fait en utilisant la formule de la dérivée d'un produit.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x est dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ puis donner les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Solution: $1-\ln(x)$ est positif lorsque $\ln(x) < 1$, c'est à dire $x < \mathrm{e}$. On en déduit le tableau de signes de f' puis le tableau de variations de f.
On calcule $f(\mathrm{e}) = 1$.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

On calcule la limite de f en $+\infty$ avec la même technique qu'en première question : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

4. (a) On appelle A et B les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses (Voir le graphique). Calculer les abscisses des points A et B.

Solution: On cherche les abscisse en résolvant $f(x) = 0$. On obtient deux solutions $x = 1$ et $x = \mathrm{e}^2$.

(b) Calculer le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A. Tracer la droite $\mathscr{T}$ sur le graphique donné en annexe.

Solution: C'est $f'(1) = 2$. On a tracé la tangente sur l'annexe.

5. Déterminer les ensembles suivants :

a) $f^{-1}\langle\{1\}\rangle$

Solution: On cherche les nombres x tels que $f(x) = 1$. Par lecture du tableau de variations, on obtient $f^{-1}\langle\{1\}\rangle = \{\mathrm{e}\}$

b) $f^{-1}\langle[0;\,+\infty[\rangle$

Solution: On cherche les nombres x tels que $f(x) \geq 0$. Par lecture du tableau de variations, en utilisant une question précédente, on obtient
$f^{-1}\langle [0;\ +\infty[\rangle = [1;\ \mathrm{e}^2]$.

c) $f\left(]0;\ e^2]\right)$

Solution: On cherche les images des nombres x de l'intervalle $]0;\ \mathrm{e}^2]$. Par lecture du tableau de variations, en utilisant une question précédente, on obtient
$f\left(]0;\ e^2]\right) =]-\infty;\ 1]$.

ANNEXE à remettre avec la copie

Nom et prénom : ....