Devoir maison du 24 septembre 2018
TSI 1

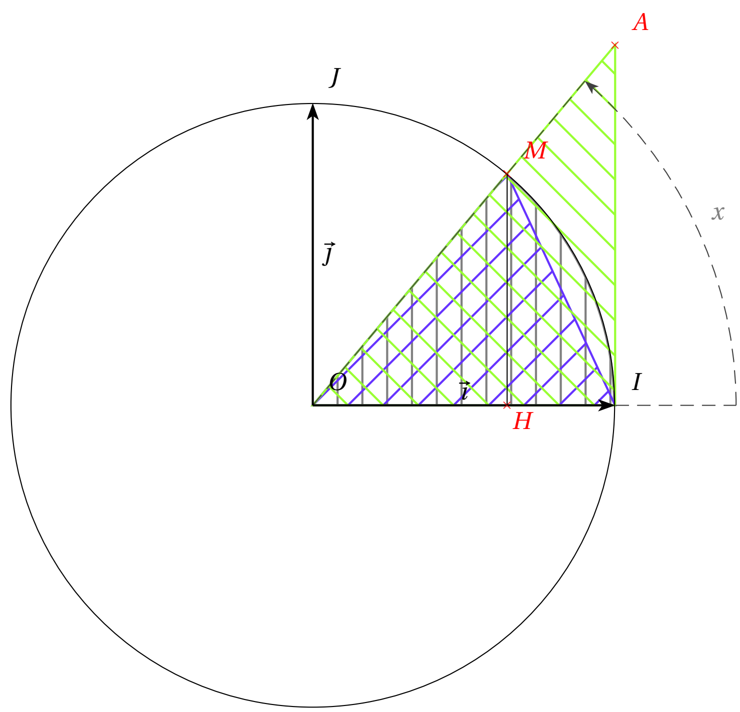
Exercice 1 : Révisions de trigonométrie

Partie A : Une inégalité

On considère un angle x quelconque compris strictement entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Réaliser un dessin comprenant
   - un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\right)$,
   - les deux points I et J tels que $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$,
   - le cercle trigonométrique Γ associé à $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\right)$,
   - le point M de Γ tel que $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right) = x$,
   - le point A tel que $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OA}\right) = x$ et AIO est rectangle en I,
   - le point H de $[OI]$ tel que (MH) est perpendiculaire à (OI).

Solution:



2. (a) Déterminer l'aire de la petite portion de disque délimitée par les points I, M et O en fonction de x, notée $\mathscr{A}_p$.

Solution: L'aire d'une portion de disque est proportionnelle à l'angle au centre.
Pour un angle de 2π, l'aire est de $\pi \times 1^2 = \pi$.
Donc, pour un angle de x, l'aire est de $\mathscr{A}_p = \dfrac{x}{2}$.

(b) Déterminer en fonction de x l'aire du triangle IMO, notée $\mathscr{A}_{IMO}$.

Solution: La hauteur $[MH]$ a pour longueur $OM \times \sin(x) = \sin(x)$. Donc l'aire du triangle est

$$\mathscr{A}_{IMO} = \frac{IO \times MH}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$$

(c) Déterminer en fonction de x l'aire du triangle IAO, notée $\mathscr{A}_{IAO}$.

Solution: On a $\dfrac{IA}{OI} = \tan(x)$ donc $IA = OI \times \tan(x) = \tan(x)$. On en déduit l'aire du triangle rectangle :

$$\mathscr{A}_{IAO} = \frac{IA \times OI}{2} = \frac{\tan(x)}{2}$$

3. En déduire la série d'inégalités :

$$\boxed{\forall\, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \sin(x) \leq x \leq \tan(x)}$$

Solution: Il est clair que $\mathscr{A}_{IMO} \leq \mathscr{A}_p \leq \mathscr{A}_{IAO}$, ce qui s'écrit :

$$\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2} \iff \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

4. Enfin démontrer que

$$\boxed{\forall\, x \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}, \qquad \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1}$$

Solution: D'après ce qui précède, pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

Comme $x > 0$ sur cet intervalle, on en déduit :

$$\frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \leq \frac{\tan(x)}{x}$$

Or $1 \leq \dfrac{\tan(x)}{x} \iff \dfrac{\sin(x)}{x\cos(x)} \geq 1$ et, pour $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos(x) > 0$. On en déduit, en multipliant l'inégalité par $\cos(x)$:

$$\frac{\sin(x)}{x\cos(x)} \geq 1 \iff \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x)$$

Finalement, pour $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a bien :

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

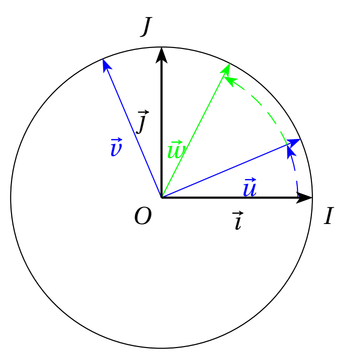
Remarquons maintenant que $x \in \left]\frac{-\pi}{2}; 0\right[\iff -x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
Or, pour tout $x \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$, on a $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x}$ et $\cos(-x) = \cos(x)$.
On en déduit l'extension de cette série d'inégalités à l'ensemble $\left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.

Partie B : Démonstration de formules

a et b désignent deux angles quelconques. Pour simplifier les dessins, on supposera que $(a;\ b) \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[^2$.
Soit un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\right)$ et Γ le cercle trigonométrique associé.
Soit $\vec{u}$ le vecteur normé (de norme 1) tel que $(\vec{\imath}, \vec{u}) = a$ et soit $\vec{v}$ le vecteur normé tel que $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$.
Soit enfin le vecteur normé $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = b$.

1. Faire un dessin représentant la situation.

Solution:



(a) Déterminer en fonction de a et b l'angle $(\vec{\imath}, \vec{w})$.
Indication: Rappeler puis utiliser la relation de Chasles sur les angles.

Solution:
$$(\vec{\imath}, \vec{w}) = (\vec{\imath}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{w}) = a + b$$

(b) En déduire les coordonnées de $\vec{w}$ dans le repère $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\right)$ en fonction de a et b.

Solution: Par définition du cosinus et du sinus, les coordonnées de $\vec{w}$ sont $\begin{pmatrix}\cos(a+b)\\\sin(a+b)\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\right)$.

2. (a) Donner, en fonction de b, les coordonnées de $\vec{w}$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Solution: Par définition du cosinus et du sinus, les coordonnées de $\vec{w}$ sont $\begin{pmatrix}\cos(b)\\\sin(b)\end{pmatrix}$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

(b) Donner, en fonction de a, les coordonnées de $\vec{u}$ puis celles de $\vec{v}$ dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\right)$.

Solution: On a $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos(a)\\\sin(a)\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\sin(a)\\\cos(a)\end{pmatrix}$ dans $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\right)$.

(c) Déduire des deux questions précédentes une seconde expression des coordonnées de $\vec{w}$ dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\right)$.

Solution: D'après ce qui précède, on sait que $\vec{w}=\cos(b)\vec{u}+\sin(b)\vec{v}$. Or, on connaît les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\right)$.
On a ainsi $\vec{u}=\cos(a)\vec{\imath}+\sin(a)\vec{\jmath}$ et $\vec{v}=-\sin(a)\vec{\imath}+\cos(a)\vec{\jmath}$.
Finalement, on a donc :

$$\begin{aligned}\vec{w}&=\cos(b)\vec{u}+\sin(b)\vec{v}\\&=\cos(b)\left(\cos(a)\vec{\imath}+\sin(a)\vec{\jmath}\right)+\sin(b)\left(-\sin(a)\vec{\imath}+\cos(a)\vec{\jmath}\right)\\&=\cos(b)\cos(a)\vec{\imath}+\cos(b)\sin(a)\vec{\jmath}-\sin(b)\sin(a)\vec{\imath}+\sin(b)\cos(a)\vec{\jmath}\\&=(\cos(b)\cos(a)-\sin(b)\sin(a))\,\vec{\imath}+(\cos(b)\sin(a)+\sin(b)\cos(a))\,\vec{\jmath}\end{aligned}$$

C'est à dire $\vec{w}\begin{pmatrix}\cos(b)\cos(a)-\sin(b)\sin(a)\\\cos(b)\sin(a)+\sin(b)\cos(a)\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath}\right)$.

3. Quelles formules retrouve-t-on ainsi ?

Solution: En identifiant les coordonnées de $\vec{w}$ trouvées dans une question précédente, on retrouve les formules :

$$\cos(a+b)=\cos(b)\cos(a)-\sin(b)\sin(a) \qquad \sin(a+b)=\cos(b)\sin(a)+\sin(b)\cos(a)$$

Partie C : Tangente de l'angle moitié

θ désigne un angle quelconque compris strictement entre $-\pi$ et π.
Dans toute la suite, on pose $t=\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

1. (a) Montrer que t est bien défini.

Solution: Pour tout $\theta \in]-\pi; \pi[$, on a $\dfrac{\theta}{2} \in \left]\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et donc t est bien défini.

(b) Rappeler puis démontrer les formules permettant d'obtenir $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *en utilisant uniquement les formules des sinus et cosinus de somme de deux angles.*

Solution: Pour tout θ :

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\\ &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

Et on a également :

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\\ &= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ &= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

(c) Montrer que $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1}{1+t^2}$

Solution: Pour tout $\theta \in]-\pi; \pi[$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+t^2} &= \frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\\ &= \frac{1}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}\\ &= \frac{1}{\frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}\end{aligned}$$

Or $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+t^2} &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}\\ &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

(d) Déduire des deux questions précédentes les expressions de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ en fonction de $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Solution: On repart de l'égalité trouvée à la première question, sachant que pour tout $\theta \in]-\pi;\pi[$, on a $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right] \\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2}
\end{aligned}$$

En ce qui concerne le sinus, on utilise une stratégie équivalente :

$$\begin{aligned}
\sin(\theta) &= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right] \\
&= \frac{2t}{1+t^2}
\end{aligned}$$

(e) Enfin, déterminer l'expression de $\tan(\theta)$ en fonction de t.

Solution: Sachant que $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$, on déduit de ce qui précède :

$$\tan(\theta) = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

2. En exploitant les formules précédentes, prouver que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est une solution positive de l'équation

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Solution: Notons que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\dfrac{\frac{\pi}{6}}{2}\right)$. On en déduit que

$$\frac{2\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. En utilisant une technique similaire, déterminer la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Solution: En utilisant le même raisonnement, on prouve que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right)$ vérifie l'égalité

$$\frac{2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Pour déterminer $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$, il faut donc trouver la solution positive de l'équation

$$\frac{2x}{1-x^2} = 1$$

Un peu de calcul permet d'obtenir $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$.

4. En faisant le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, résoudre l'équation

$$\cos(x) + 2\sin(x) = 0$$

Indication: On exprimera les solutions à l'aide de la fonction arctan

Solution: En fait cette question est un peu stupide ! En effet, on vérifie que ni $-\frac{\pi}{2}$, ni $\frac{\pi}{2}$ ne sont solutions de cette équation.
Par conséquent, on peut supposer que $x \in]-\pi;\ \pi] \setminus \left\{-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right\}$, c'est à dire que $\cos(x) \neq 0$.
Dans ce cas, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}\cos(x) + 2\sin(x) = 0 &\iff \frac{\cos(x)+2\sin(x)}{\cos(x)} = 0\\ &\iff 1 + 2\tan(x) = 0\\ &\iff \tan(x) = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

On a donc les solutions $x = -\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ ou $x = \pi - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 2 : Autour du poker

On considère un jeu de 32 cartes dans lequel on tire sans remise 5 cartes.
Les figures sont les différentes valeurs (as, 7, 8, ..., roi).
Les couleurs sont pique, cœur, carreau trèfle.
Une main est composée de cinq cartes choisies dans le jeu. Dans tout ce qui suit, on ne prend pas en compte l'ordre des cartes dans la main.

Dans toutes les questions, on détaillera les calculs en utilisant le vocabulaire des dénombrements.

Solution: On a déjà partiellement corrigé cet exercice. Je ne donne ici que les réponses sans trop de justifications.
J'ai rédigé un document portant sur un jeu de 52 cartes.

1. Donner le nombre de mains possibles.

> **Solution:** Il y a $\binom{32}{5} = 201\,376$ mains possibles.

2. Un carré est une main qui contient quatre cartes de la même figure.
   Déterminer le nombre total de carrés.

> **Solution:** Il y a 8 manières de choisir la figure et $32 - 4 = 28$ manières de choisir la cinquième carte. On a donc $8 \times 28 = 224$ carrés différents.

3. Un full comprend trois cartes d'une figure donnée et deux cartes d'une autre figure.
   Déterminer le nombre total de fulls.

> **Solution:** Pour la première figure donnée, il y a $\binom{4}{3}$ manière de choisir trois cartes. Pour la seconde figure, il y a $\binom{4}{2}$ manière de choisir deux cartes.
> Le choix des deux figures revient à réaliser une injection d'un ensemble à deux éléments dans l'ensemble des huit figures, soit 8×7 choix.
> Finalement, le nombre de fulls différents vaut $8 \times 7 \times \binom{4}{3} \times \binom{4}{2} = 1\,344$.

4. Une double paire comprend deux cartes d'une figure donnée et deux cartes d'une autre figure.
   Déterminer le nombre total de doubles paires.

> **Solution:** On choisit la dernière carte parmi les $32 - 8 = 24$ restantes.
> Pour chacune des figures, on a $\binom{4}{2}$ manières de constituer une paire. Et il y a $\binom{8}{2}$ manières de choisir deux figures.
> Finalement, le nombre de double paires est de $\binom{8}{2} \times \binom{4}{2}^2 \times 24 = 24\,192$

5. Déterminer le nombre de mains comportant au moins un as de deux manières différentes.

> **Solution:** Le nombre de mains comportant au moins un as correspond au nombre total de mains auquel on enlève les mains ne comprenant aucun as.
> Faire un main sans aucun as revient à choisir 5 cartes parmi 28 cartes.
> Il y a donc $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103\,096$ mains comprenant au moins un as.
> Une autre manière de faire consiste à faire une partition des mains comprenant au moins un as en
> - mains comprenant exactement un as : il y en a $\binom{4}{1} \times \binom{28}{4}$;
> - mains comprenant exactement deux as : il y en a $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3}$;
> - mains comprenant exactement trois as : il y en a $\binom{4}{3} \times \binom{28}{2}$;
> - mains comprenant exactement quatre as : il y en a $\binom{4}{4} \times \binom{28}{1}$.
>
> On obtient bien-sûr le même résultat puisque $\binom{4}{1} \times \binom{28}{4} + \binom{4}{2} \times \binom{28}{3} + \binom{4}{3} \times \binom{28}{2} + \binom{4}{4} \times \binom{28}{1} = 103\,096$.

6. Déterminer le nombre de mains comportant deux rois et trois piques (on notera que les trois piques peuvent éventuellement comporter un roi).

Solution: On a déjà traité un cas similaire en classe.

En faisant la disjonction de cas selon que le roi de pique fait ou non partie de la main, on obtient un nombre total égal à :

$$\underbrace{\binom{3}{2}\times\binom{7}{3}}_{\text{sans le roi de pique}} + \underbrace{\binom{3}{1}\times\binom{7}{2}\times 21}_{\text{avec le roi de pique}} = 1\,428$$